И. Г. ХАЧАТРЯН

ПРОСТРАНСТВА С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА

Издание второе, переработанное и дополненное

ЕРЕВАН 2008

УДК 517.5

Хачатрян И. Г.
Пространства с операцией предела. Ереван, 2008. — 523 с.

Работа посвящена вопросу построения теории, обобщающей основные понятия классического математического анализа. В отличие от известных подходов, здесь понятия окрестности и предела вводятся совместно на основе их интуитивного понимания без использования специальных аксиом. Этот подход применяется в двух вариантах. В одном из них совместно с понятием окрестности вводится понятие предела последовательности, а в другом — понятие предела направленности или фильтра. В результате возникают две различные теории, не сравнимые с точки зрения общности. Одна из них называется теорией пространств с операцией предела последовательности, а другая — теорией пространств с операцией предела направленности или фильтра. Вторая теория в некотором смысле может быть включена в первую, причем ее часть, относящаяся к топологическим пространствам с операцией предела направленности или фильтра, совпадает с общей топологией. Введенное здесь понятие окрестности шире, чем рассматриваемое в общей топологии, а именно: окрестность точки может не содержать непустого открытого подмножества даже в топологическом пространстве с операцией предела последовательности. В работе основное внимание уделено теории пространств с операцией предела последовательности, которая является более гибкой и может служить более удобной основой для функционального анализа.

По сравнению с первым изданием работы изложение переработано и дополнено новыми результатами, включено также добавление, где исследуется причина появления известных парадоксов в интуитивной теории множеств и обсуждаются некоторые вопросы, связанные с формализацией теории множеств.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Вопрос построения теории, обобщающей основные понятия классического математического анализа, стал предметом систематического исследования в начале XX века (см. [14], с. 138—145, 166—167; [16], с. 11—16, 194—198, 259—260; [46], с. 197; [76], с. 42—45). К числу этих понятий относятся понятия окрестности, предела (сходимости), замкнутости, компактности, связности, непрерывности, равномерной непрерывности, ограниченности, полноты, дифференциала, производной, интеграла и др. Первую попытку построения общей теории предпринял М. Фреше [69] (1906). В качестве исходного понятия теории он принял предел последовательности. Его подход заключается в следующем: выделяется некоторый класс последовательностей в множестве X, называемых сходящимися, каждой последовательности из этого класса сопоставляется некоторый элемент множества X, называемый ее пределом, и требуется выполнение аксиом

1) для каждого $x \in X$ *последовательность* $(x, x, \ldots)$ *сходится к* x*;*

2) подпоследовательность сходящейся к $x \in X$ *последовательности в* X *сходится к* x*.*

Однако эти две аксиомы не дают удовлетворительной характеристики понятия предела последовательности. Поэтому П. С. Урысон [63] (1926) (см. также [64], с. 801—806) к указанным аксиомам добавил следующую аксиому:

3) несходящаяся к $x \in X$ *последовательность в* X *обладает подпоследовательностью, никакая подпоследовательность которой не сходится к* x*.*

Основанная на этих трех аксиомах теория L^*-пространств получила некоторое дальнейшее развитие в [46], с. 197—212, и [38] (см. также [76], с. 108—109).

Другую попытку построения общей теории предпринял Ф. Рисс [57] (1908), исходя из понятия точки накопления. Однако его теория осталась незаконченной и дана им лишь в виде предварительных наметок.

Начало общей топологии (т. е. теории, основанной на понятии окрестности) положил Ф. Хаусдорф [71] (1914). О системе аксиом этой теории в [16], с. 13, написано: «*Выбор налагаемых на окрестности аксиом, очевидно, до некоторой степени произволен, и исторически он был предметом продолжительных поисков. Система аксиом, на которой, в конце концов, остановились, вполне отвечает потребностям современного анализа, не впадая при этом в чрезмерную и беспредметную общность*».

С историей выбора этой системы аксиом вкратце можно ознакомиться в [76], с. 42—45.

В классическом анализе при введении основных понятий используется такое семейство окрестностей, что возникшая система всех открытых множеств не допускает расширения с сохранением операции предела последовательности, т. е. отображения, сопоставляющего каждой последовательности множество ее пределов. Это имеет место и в любом метрическом пространстве (понятие метрического пространства ввел М. Фреше [69] (1906)). Однако топология как система открытых множеств, вообще говоря, не обладает указанным свойством, и две различные топологии могут определить одну и ту же операцию предела последовательности. По этой причине введенные в общей топологии понятия оторваны от понятия предела последовательности в том смысле, что, к примеру, одна и та же функция при одной и той же операции предела последовательности непрерывна в одной топологии и не непрерывна в другой (см. пример в главе I, § 10, n° 20).

Топология фиксируется заданием сходимости направленностей или фильтров. Поэтому рассматриваемые в общей топологии понятия однозначно связаны с понятием предела направленности или фильтра. Однако по своей роли в общей топологии понятие предела направленности или фильтра носит декоративный характер в том смысле, что условия, сформулированные в терминах сходящихся направленностей или фильтров, могут быть эффективно описаны в терминах окрестностей. С историей введения понятий направленности, фильтра и их сходимости вкратце можно ознакомиться в [76], с. 96. В общей топологии к понятию окрестности было приспособлено понятие сходимости в конце 1930-х годов. Характеристические свойства топологической сходимости направленностей указаны Келли [36] (1950) (см. также [37], с. 107).

Начиная с 1950-х годов появились исследования (см., например, [6], [10], [12], [29], [41], [45], [61], [66], [70]), посвященные построению общей теории сходимости, в которых, как и в указанных выше работах Фреше и Урысона, понятие предела вводится с помощью аксиом без учета понятия окрестности. Однако в интуитивном восприятии понятия окрестности и предела взаимно связаны, и поэтому правильнее ввести их совместно. Более того, при построении теории методом введения одного из указанных понятий с помощью аксиом без учета другого допускается некоторый произвол в выборе системы аксиом, что делает теорию несколько искусственной.

Настоящая работа также посвящена вопросу построения теории, обобщающей основные понятия классического анализа. В отличие от указанных подходов к решению вопроса здесь понятия окрестности и предела вводятся совместно, без использования специальных аксиом, на основе их интуитивного понимания. Характеристические свойства введенного понятия операции предела или полной системы окрестностей точки могут быть использованы для аксиоматического построения теории. Этот подход применяется в двух вариантах. В одном из них совместно с понятием окрестности вводится понятие предела последовательности, а в другом — понятие предела направленности или фильтра. В результате возникают две различные теории, не сравнимые с точки зрения общности. Одна из них называется теорией пространств с операцией предела последовательности, а другая — теорией пространств с операцией предела направленности или фильтра. Вторая теория в некотором смысле может быть включена в первую, причем ее часть, относящаяся к топологическим пространствам с операцией предела направленности или фильтра, совпадает с общей топологией. Введенное здесь понятие окрестности шире, чем рассматриваемое в общей топологии, а именно: окрестность точки может не содержать непустого открытого подмножества даже в топологическом пространстве с операцией предела последовательности (например, в пространстве всех вещественных функций на вещественной оси с операцией предела, соответствующей поточечной сходимости, дополнение множества непрерывных функций является окрестностью функции Дирихле и не содержит открытой окрестности этой функции).

Интуитивно окрестность точки представляется как всякое подмножество, из дополнения которого нельзя приблизиться к этой точке. Окрестность точки должна содержать эту точку, так как в интуитивном восприятии точка сколь угодно близка к себе. Если задан некоторый способ приближения к точке, то по нему определяется система всех окрестностей этой точки. Обратно, исходя из какой-либо системы окрестностей точки, можно дать некоторый способ приближения к точке, а затем уточнить систему всех окрестностей этой точки. Здесь при введении понятия окрестности точки в одном случае требуется, чтобы из дополнения окрестности нельзя было приблизиться к этой точке последовательностью, а в другом — направленностью.

В непустом множестве X, элементы которого называются точками, понятия окрестности точки и предела последовательности вводятся следующим образом. Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $X^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей в X, а 2^X — множество всех подмножеств множества X. Каждой точке $x \in X$ сопоставляется некоторое непустое множество V_x подмножеств множества X, содержащих x. Каждое множество $v \in V_x$ называется окрестностью точки x, а V_x — системой (точнее — предварительной системой) окрестностей этой точки. Точка $x \in X$ называется пределом последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ по системе окрестностей V_x, а последовательность $\hat{x}$ называется сходящейся к x, если вне каждого $v \in V_x$ может находиться лишь конечное число членов этой последовательности. Рассматривается отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, сопоставляющее каждой последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ множество ее пределов $\Lambda(\hat{x}) \in 2^X$ и называемое операцией предела последовательности в X, определенной семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Если каждая сходящаяся последовательность имеет лишь один предел, то Λ называется операцией однозначного предела последовательности. Пара (X, Λ) называется пространством с операцией предела последовательности. В пространстве (X, Λ) окрестностью точки $x \in X$ называется всякое подмножество $u \subset X$, в дополнении $X \setminus u$ которого нет сходящейся к x последовательности. Множество U_x всех окрестностей точки x пространства (X, Λ) называется полной системой окрестностей этой точки. Операция предела последовательности в X, определенная указанным выше способом при помощи семейства полных систем окрестностей $(U_x : x \in X)$, совпадает с Λ. Для каждого $x \in X$ система U_x является фильтром в X и совпадает с пересечением всех фильтров в X, имеющих конечную или счетную базу (или только ассоциированных с последовательностями) и содержащих исходную систему V_x (фильтр U_x может не иметь конечной или счетной базы). В (X, Λ) подмножество $M \subset X$ называется открытым, если оно либо пусто, либо является окрестностью каждой своей точки, т. е. $M \in U_x$ для каждого $x \in M$. Множество τ всех открытых подмножеств пространства (X, Λ) является топологией в X и определяет операцию предела последовательноти Λ', которая может отличаться от Λ (т. е. Λ' определяется семейством систем окрестностей $(V'_x : x \in X)$, где V'_x для каждого $x \in X$ является системой всех таких $v \in \tau$, что $x \in v$). Среди топологий в X, определяющих операцию предела последовательности Λ', τ является сильнейшей и называется секвенциальной топологией пространства (X, Λ). Она является также топологией всех открытых подмножеств пространства (X, Λ'), а значит, и его секвенциальной топологией. Имеет место включение $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. В случае $\Lambda' = \Lambda$ пространство (X, Λ) называется топологическим. Примерами топологических пространств с операцией предела последовательности могут служить секвенциально равномерные пространства (см. определение 2.2), в частности, пространства с операцией однозначного предела последовательности и линейные пространства. Пространство (X, Λ) называется линейным, а Λ — линейной операцией предела последовательности, если X — векторное пространство над полем вещественных или комплексных чисел, а для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$, $\hat{y}$ в X и любой сходящейся к некоторому α числовой последовательности $\hat{\alpha}$ имеют место включения $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ и $\alpha\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ (отсюда вытекает, что на самом деле выполняются равенства, если, конечно, $\alpha \neq 0$ в случае операции неоднозначного предела последовательности Λ). Секвенциальная топология линейного пространства инвариантна относительно сдвигов и гомотетий. В векторном пространстве среди топологий, определяющих данную линейную операцию однозначного предела последовательности, может не существовать векторной или даже хаусдорфовой топологии (см. примеры в главе III, § 16, n° 1 и n° 2).

Аналогично вводятся понятия окрестности точки и предела направленности. Пусть $\mathcal{K}(X)$ — класс всех направленностей в X. Точка $x \in X$ называется пределом направленности $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ по системе окрестностей V_x этой точки, если направленность $\check{x}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_x$. Отображение $L : \mathcal{K}(X) \to 2^X$, сопоставляющее каждой направленности $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ множество ее пределов $L(\check{x}) \in 2^X$, называется операцией предела направленности в X, определенной семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Пара (X, L) называется пространством с операцией предела направленности. В пространстве (X, L) окрестностью точки $x \in X$ называется всякое подмножество $w \subset X$, в дополнении $X \backslash w$ которого нет сходящейся к x направленности. Множество W_x всех окрестностей точки x пространства (X, L) называется полной системой окрестностей этой точки. Семейство систем окрестностей $(W_x : x \in X)$ тоже определяет в X операцию предела направленности L. Для каждого $x \in X$ система W_x является фильтром в X, имеющим предбазу V_x. В (X, L) множество называется открытым, если оно либо пусто, либо является окрестностью каждой своей точки. Множество τ' всех открытых подмножеств пространства (X, L) является топологией в X и определяет операцию предела направленности L', которая может отличаться от L. При этом τ' является также топологией всех открытых подмножеств пространства (X, L'). В случае $L' = L$ пространство (X, L) называется топологическим. Пространство с операцией предела направленности является топологическим тогда и только тогда, когда в нем окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки (пространство с операцией предела последовательности, обладающее этим свойством, является частным случаем топологического пространства с операцией предела последовательности и называется пространством Фреше–Урысона). Пространство с операцией однозначного предела направленности может не быть топологическим. Семейства систем окрестностей $(V_x : x \in X)$ и $(W_x : x \in X)$ определяют в X одну и ту же операцю предела последовательности Λ, которая является сужением отображения L на $X^{\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X)$. Однако $W_x \subset U_x$ и $\tau' \subset \tau$, где U_x — полная система окрестностей точки x, а τ — секвенциальная топология пространства (X, Λ). Теория топологических пространств с операцией предела направленности совпадает с общей топологией. При этом включения $W_x \subset U_x$ и $\tau' \subset \tau$ позволяют результаты теории пространств с операцией предела направленности, а значит, и общей топологии сформулировать также в теории пространств с операцией предела последовательности.

Другой вариант построения теории (хотя он не представляет определенного интереса) можно получить, если зафиксировать направленное множество I и использовать лишь класс тех направленностей в X, каждая из которых является поднаправленностью некоторой направленности в X, имеющей область определения I.

Указанные варианты могут быть включены в одну общую схему. Пусть $(V_x : x \in X)$ — семейство некоторых систем окрестностей, а $\mathfrak{F}$ — некоторый фильтр в множестве X. Точка $x \in X$ называется пределом фильтра $\mathfrak{F}$ по системе окрестностей V_x этой точки, а фильтр $\mathfrak{F}$ — сходящимся к x, если $V_x \subset \mathfrak{F}$. Для каждого $x \in X$ обозначим через $\mathfrak{F}_x$ фильтр всех подмножеств множества X, содержащих x. Рассмотрим систему $\varPhi$ фильтров в X, которая содержит все фильтры $\mathfrak{F}_x$, $x \in X$, а для любых $\mathfrak{F} \in \varPhi$ и $M \subset X$ при $M \notin \mathfrak{F}$ содержит такой фильтр $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$, что $X \setminus M \in \mathfrak{F}'$. Определим отображение $\mathfrak{L} : \varPhi \to 2^X$, сопоставляющее каждому $\mathfrak{F} \in \varPhi$ множество его пределов $\mathfrak{L}(F) \in 2^X$ по семейству систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, и назовем $\mathfrak{L}$ операцией предела фильтров из $\varPhi$, а пару $(X, \mathfrak{L})$ — пространством с операцией предела фильтров из $\varPhi$. В пространстве $(X, \mathfrak{L})$ окрестностью точки $x \in X$ называется всякое такое подмножество $v \subset X$, что $x \notin \mathfrak{L}(F)$ для любого $\mathfrak{F} \in \varPhi$, содержащего, $X \setminus v$. Множество $\mathcal{V}_x$ всех окрестностей точки x пространства $(X, \mathfrak{L})$ называется полной системой окрестностей этой точки. Система $\mathcal{V}_x$ является фильтром в X и совпадает с пересечением всех сходящихся к x фильтров из Φ, т. е. $\mathcal{V}_x = \bigcap\{\mathfrak{F}\in\Phi : V_x\subset\mathfrak{F}\} = \bigcap\{\mathfrak{F}\in\Phi : x\in\mathfrak{L}(F)\}$. Фильтр $\mathcal{V}_x$ может не принадлежать Φ. Пусть W_x — фильтр в X, имеющий предбазу V_x. Очевидно, $V_x\subset W_x\subset\mathcal{V}_x$. Каждое семейство систем окрестностей $(W_x : x\in X)$ и $(\mathcal{V}_x : x\in X)$ тоже определяет операцию предела $\mathfrak{L}$. В $(X, \mathfrak{L})$ множество называется открытым, если оно либо пусто, либо является окрестностью каждой своей точки. Множество $\widetilde{\tau}$ всех открытых подмножеств пространства $(X, \mathfrak{L})$ является топологией в X и определяет операцию предела $\mathfrak{L}'$ фильтров из Φ, которая может отличаться от $\mathfrak{L}$. При этом $\widetilde{\tau}$ является также топологией всех открытых подмножеств пространства $(X, \mathfrak{L}')$. В случае $\mathfrak{L}'=\mathfrak{L}$ операция предела $\mathfrak{L}$ и пространство $(X, \mathfrak{L})$ называются топологическими. В $(X, \mathfrak{L})$ возможность приближения к $x\in X$ точками подмножества $M\subset X$ означает существование фильтра из Φ, который содержит M и сходится к x. Когда Φ есть множество всех фильтров в X, будем называть $\mathfrak{L}$ просто операцией предела фильтра. В этом случае можно принять $\mathfrak{L}$ также в качестве операции предела направленности, а когда Φ есть множество всех фильтров в X, ассоциированных с последовательностями (или даже имеющих конечную или счетную базу), можно принять $\mathfrak{L}$ в качестве операции предела последовательности. Справедливы следующие утверждения.

Отображение $\mathfrak{L} : \Phi\to 2^X$ является операцией предела фильтров из Φ (т. е. определяется семейством систем окрестностей) тогда и только тогда, когда

1) $x\in\mathfrak{L}(F_x)$ для каждого $x\in X$;

2) $\mathfrak{L}(F)\subset\mathfrak{L}(F')$ для любых фильтров $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}'$ из Φ;

3) для каждых $\mathfrak{F}\in\Phi$ и $x\in X\backslash\mathfrak{L}(F)$ существует фильтр $\mathfrak{F}'\supset\mathfrak{F}$ из Φ, содержащий такое $M\subset X$, что $x\notin\mathfrak{L}(F'')$ для любого $\mathfrak{F}''\in\Phi$, содержащего M.

Отображение $\mathfrak{L}$ является топологической операцией предела фильтров из Φ тогда и только тогда, когда выполняются условия 1), 2) и

3′) для каждых $\mathfrak{F}\in\Phi$ и $x\in X\backslash\mathfrak{L}(F)$ существует фильтр $\mathfrak{F}'\supset\mathfrak{F}$ из Φ, содержащий такое $M\subset X\backslash\{x\}$, что $\mathfrak{L}(F'')\subset M$ для любого $\mathfrak{F}''\in\Phi$, содержащего M.

Содержание работы разбито на четыре главы. Выделен также вспомогательный раздел, где вводятся необходимые обозначения и приводятся некоторые часто используемые в работе понятия и предложения из теории множеств, общей топологии и линейной алгебры, проясняется терминология. Есть и добавление, где обсуждаются некоторые вопросы теории множеств.

Первые три главы занимает теория пространств с операцией предела последовательности. В главе I исследуются общие пространства, в том числе, топологические пространства с операцией предела последовательности и пространства Фреше–Урысона. Полученные здесь характеристические свойства операции однозначного предела последовательности эквивалентны приведенным выше трем аксиомам.

Глава II посвящена пространствам с секвенциальной равномерностью, имеющим аналогию с равномерными пространствами, введенными в общую топологию А. Вейлем [25] (1937). В этих пространствах операция предела последовательности определяется при помощи специального отношения эквивалентности в множестве последовательностей, называемого отношением секвенциальной равномерности.

В главе III рассматриваются линейные пространства с операцией предела последовательности, а вкратце — также группы, кольца и алгебры с операцией предела последовательности.

В главе IV дается краткое описание теории пространств с операцией предела направленности или фильтра, где проводится также сопоставление построенных двух теорий.

Некоторые из доказанных здесь утверждений известны также из работ других авторов в связи с исследованиями L^*-пространств (см. [38], [46], [76]), секвенциальных пространств (см. [12], [67], [68], [76]) и дифференцируемости нормы (см. [30], с. 482—511; [23], с. 19—60). Как было отмечено, результаты общей топологии и, в частности, теории топологических векторных пространств могут быть сформулированы также в теории пространств с операцией предела последовательности. В связи с этим следует отметить, что полученные здесь результаты, которые имеют аналоги в общей топологии, в основном отличаются от этих аналогов по характеру условий или утверждений.

Остановимся вкратце на некоторых особенностях теории пространств с операцией предела последовательности.

Условия, сформулированные при помощи операции предела последовательности, не всегда допускают эффективное описание в терминах окрестностей (например, аксиомы линейной операции предела последовательности, понятие дифференцируемой функции или указанные в теореме 2.13 необходимые и достаточные условия секвенциальной равномеризуемости пространства с операцией предела последовательности). Обратно, условия, сформулированные в терминах окрестностей, не всегда допускают эффективное описание при помощи операции предела последовательности (например, аксиомы векторной топологии или необходимое и достаточное условие метризуемости линейного пространства с операцией предела последовательности). Поэтому понятия окрестности и предела последовательности вместе дают более широкую классификацию рассматриваемых объектов. Это, в частности, относится к подмножествам частично упорядоченного множества $\mathcal{L}(X)$ всех операций предела последовательности в заданном множестве X (для $\Lambda_1 \in \mathcal{L}(X)$ и $\Lambda_2 \in \mathcal{L}(X)$ считается $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$ и говорится Λ_1 сильнее Λ_2 или Λ_2 слабее Λ_1, если $\Lambda_1(\hat{x}) \subset \Lambda_2(\hat{x})$ при всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$). Множество $\mathcal{L}(X)$ является полной решеткой. В множестве $\mathcal{L}_1(X)$ всех операций однозначного предела последовательности совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, следовательно, в $\mathcal{L}_1(X)$ существует максимальный элемент, т. е. максимально слабая операция однозначного предела последовательности. Однако в множестве всех операций предела последоватвльноти, определенных хаусдорфовыми топологиями, совершенно упорядоченное подмножество может не иметь верхней границы. Если X — векторное пространство, то в множестве $\mathcal{L}_1^*(X)$ всех линейных операций однозначного предела последовательности совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, следовательно, в $\mathcal{L}_1^*(X)$ существует максимальный элемент. Существует также наименьший элемент, т. е. сильнейшая линейная операция предела последовательности (она определяется векторной топологией). Однако в множестве всех линейных операций однозначного предела последовательности, определенных векторными топологиями, совершенно упорядоченное подмножество может не иметь верхней границы. В векторном пространстве X вместе с данной линейной операцией предела последовательности Λ представляет интерес рассмотрение множества Ł всех линейных операций предела последовательности, порождающих ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и Λ. В Ł совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, значит, в Ł существует максимальный элемент (существует также наименьший элемент). Линейная операция предела последовательности, являющаяся наименьшим или максимальным элементом в Ł, может не определяться векторной топологией (см. замечание 3.12 в главе III, § 12 и пример в главе III, § 16, n° 1). Линейные пространства, соответствующие наименьшему и максимальному элементам, могут быть различных категорий (см. замечание 3.15 в главе III, § 12), причем пространство, соответствующее максимальному элементу, квазиполно.

Расширение понятия окрестности способствует получению новых результатов. Такими являются, например, теорема 3.54

в § 12 главы III и основанные на ней теоремы 3.55, 3.56, 3.59, 3.60, обобщающие классические теорему Банаха–Штейнгауза и теорему об открытом отображении, а также теоремы 3.57, 3.58, усиливающие некоторые известные варианты теоремы Банаха–Штейнгауза для топологических векторных пространств (среди результатов, связанных с понятием ограниченного множества, выделим еще теорему 3.53, предложения 3.33, 3.46—3.51 и следствия 3.9—3.13).

Введенное здесь понятие пополнения пространства непривычно в том смысле, что, например, пополнение линейного пространства многочленов на отрезке вещественной оси с равномерной сходимостью есть линейное пространство непрерывных функций, в котором сходимость сильнее равномерной сходимости (см. главу III, § 16, n° 10 и n° 11). Это понятие пополнения интересно хотя бы тем, что всякое секвенциально непрерывное линейное отображение неполного линейного пространства в полное линейное пространство допускает секвенциально непрерывное линейное продолжение на пополнение. С другой стороны, как показывает пример в главе III, § 16, n° 9, секвенциально непрерывный линейный функционал, определенный на векторном подпространстве линейного пространства, может не допускать секвенциально непрерывного продолжения на замыкание этого подпространства (в § 12 главы III доказывается теорема 3.67 типа Хана–Банаха, в которой указывается необходимое и достаточное условие для продолжения функционала по секвенциальной непрерывности и линейности).

Теория пространств с операцией предела последовательности удобна также для введения понятия дифференцируемой функции в ненормируемых линейных пространствах (в связи с этим см. [70], с. 5—16; [23], с. 43—48; [1]; [2]).

Сказанное показывает, что теория пространств с операцией предела последовательности является более гибкой и может служить более удобной основой для функционального анализа.

В работе используются термины «пространство с топологией», «пространство с равномерностью» и «пространство с метрикой», которые имеют такой же смысл, какой имеют в общей топологии термины «топологическое пространство», «равномерное пространство» и «метрическое пространство» соответственно, а последние термины используются здесь в смысле топологизируемого, равномеризуемого и метризуемого пространства соответственно. Начало и окончание доказательства указываются знаками ◀ и ▶ соответственно, причем появление второго знака сразу после утверждения теоремы, предложения или следствия подразумевает, что доказательство не трудно.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. Обозначения и определения, связанные с множествами, семействами и последовательностями. Всюду в дальнейшем

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
- $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
- $\mathbb{R}_+$ — множество вещественных неотрицательных чисел;
- $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
- $\varnothing$ — пустое множество;
- 2^X — множество всех подмножеств множества X;
- $X^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей

$$\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) = (x_1,\, x_2,\, \ldots)$$

в множестве $X \neq \varnothing$, а $[\hat{x}]$ или $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ — множество элементов из X, являющихся членами последовательности $\hat{x}$.

Последовательность $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и указывается записью $\hat{x}' \prec \hat{x}$, если для некоторой последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$ выполняются равенства $x'_n = x_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Множество, состоящее из одного элемента x, обозначается через $\{x\}$. Последовательность, все члены которой являются одним и тем же элементом x, называется *стационарной* последовательностью, составленной элементом x, и обозначается через $\dot{x}$ (в этом случае $[\dot{x}] = \{x\}$). Последовательность, все члены которой, кроме конечного их числа, являются одним и тем же элементом, называется *почти стационарной*.

Будем говорить, что последовательность $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *почти вся лежит* (*является частой*) в подмножестве $M \subset X$, если $X \setminus M$ содержит лишь конечное (M содержит бесконечное) число членов последовательности $\hat{x}$. Почти вся лежащая в M последовательность является частой в M.

Говорят, что числовая последовательность $(r_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ *стремится к бесконечности*, если для каждого $r' \in \mathbb{R}_+$ существует такое $n' \in \mathbb{N}$, что $r_n > r'$ для всех $n > n'$.

Пустое множество рассматривается как конечное множество. Два множества, имеющие пустое пересечение, называются *непересекающимися*. Непустое подмножество множества будем называть также *системой* элементов этого множества.

Если подмножество $M \subset X$ содержится в объединении системы γ подмножеств множества X, то говорят, что γ *покрывает* M или γ является *покрытием* для M.

Разбиением непустого множества X называется всякая система непустых и попарно непересекающихся подмножеств в X, объединение которой совпадает с X.

Относительно систем γ_1 и γ_2 подмножеств множества X при $\gamma_1 \subset \gamma_2$ будем говорить, что γ_2 *сильнее* γ_1 или γ_1 *слабее* γ_2.

Термины *функция* и *отображение* используются как синонимы, причем всюду в дальнейшем, говоря о функции или отображении $f : X \to Y$, предполагается, что множетва X и Y непустые. Отображение f называется *биективным*, если $f(X) = Y$ и $f(x_1) \neq f(x_2)$ для любых элементов $x_1 \neq x_2$ из X. Для *сужения* отображения f на $X' \subset X$ используется запись $f|_{X'}$. Функция, принимающая числовые значения, называется *числовой функцией* или *функционалом*. Говорят, что система F отображений $f : X \to Y$ *разделяет* элементы в X, если для любых двух элементов $x_1 \neq x_2$ из X существует такое $f \in F$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Отображение $i \mapsto x_i$ множества I в множество X называется также *семейством* элементов X (или семейством в X) и записывается в виде $(x_i : i \in I)$, причем каждое $i \in I$ называется *индексом*, I — *индексным множеством*, каждое x_i — членом семейства, а образ множества I при этом отображении называется множеством (или системой) членов семейства и записывается в виде $\{x_i : i \in I\}$. Относительно подмножества $\{x_i : i \in I\} \subset X$ говорят также, что оно задается семейством $(x_i : i \in I)$. Семейство $(x'_i : i \in I')$ в X называется *подсемейством* семейства $(x_i : i \in I)$, если $I' \subset I$ и $x'_i = x_i$ для всех $i \in I'$. Семейство $(x_i : i \in I)$ называется *конечным* (*счетным*), если I конечно (счетно).

Последовательность является семейством с индексным множеством $\mathbb{N}$. Однако подпоследовательность как семейство, вообще говоря, не является подсемейством последовательности. Относительно подпоследовательности $\hat{x}' = (x_{n+m} : n \in \mathbb{N})$ последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, где $m \in \mathbb{N}$, будем говорить, что она получается удалением из $\hat{x}$ первых m членов, причем будем записывать ее также в виде семейства $\hat{x}' = (x_n : n > m)$, индексное множество которого отличается от $\mathbb{N}$. Если строго возрастающие последовательности натуральных чисел k_n и m_n, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{m_n : n \in \mathbb{N}\}$ образуют разбиение $\mathbb{N}$, то будем говорить, что $\hat{y} = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (x_{m_n} : n \in \mathbb{N})$ образуют разбиение $\hat{x}$ на две подпоследовательности.

Для пары $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ обозначается $[(\hat{x}, \hat{y})] = \{(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\}$, а для пары $(\hat{x}', \hat{y}')$ последовательностей $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y}' = (y'_n : n \in \mathbb{N})$ запись $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ означает $((x'_n, y'_n) : n \in \mathbb{N}) \prec ((x_n, y_n) : n \in \mathbb{N})$.

Для объединения, пересечения и декартова произведения семейства множеств $(X_i : i \in I)$ используются обозначения

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup\{X_i : i \in I\},$$

$$\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap\{X_i : i \in I\},$$

$$\prod_{i\in I} X_i = \prod(X_i : i \in I).$$

Элемент x декартова произведения $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ записывается в виде семейства $x = (x_i : i \in I)$, где $x_i \in X_i$, а для каждого $i \in I$ *проектирующее отображение* $x \mapsto x_i$ произведения X на *сомножитель* X_i обозначается через pr_i, т. е. $pr_i(x) = x_i$. Если $\hat{x} = (x^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ — последовательность элементов $x^{(n)} = \big(x_i^{(n)} : i \in I\big)$ из X, то для последовательности $\hat{x}_i = \big(x_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big)$ в X_i используется обозначение $\hat{x}_i = pr_i(\hat{x})$. В случае, когда $X_i = Y$ для всех $i \in I$, произведение X записывается в виде $X = Y^I$ или $X = Y^\nu$, где ν — мощность множества I. Произведение Y^I есть множество всех отображений множества I в Y.

Для объединения, пересечения и декартова произведения конечного или счетного семейства множеств используются также другие общепринятые обозначения.

2. Обозначения и определения, связанные с декартовым произведением X×X. Пусть X — непустое множество. *Диагональю* произведения $X \times X$ называется множество

$$\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Для $\mathrm{w} \subset X \times X$, $\mathrm{v} \subset X \times X$ и $M \subset X$ обозначаются

$$\mathrm{w}^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \mathrm{w}\},$$

$$\mathrm{w}\circ\mathrm{v} = \{(x, z) : (x, y) \in \mathrm{v} \text{ и } (y, z) \in \mathrm{w} \text{ для некоторого } y \in X\},$$

$$\mathrm{w}[M]_1 = \{x \in X : (x, y) \in \mathrm{w} \text{ для некоторого } y \in M\},$$

$$\mathrm{w}[M]_2 = \{x \in X : (y, x) \in \mathrm{w} \text{ для некоторого } y \in M\},$$

$$\mathrm{w}[M] = \mathrm{w}[M]_1 \cap \mathrm{w}[M]_2,$$

а в случаях $M = \{y\}$ и $M = X$ используются обозначения

$$\mathrm{w}[\{y\}]_1 = \mathrm{w}[y]_1, \quad \mathrm{w}[\{y\}]_2 = \mathrm{w}[y]_2, \quad \mathrm{w}[\{y\}] = \mathrm{w}[y],$$

$$\mathrm{w}[X]_1 = pr_1(\mathrm{w}), \quad \mathrm{w}[X]_2 = pr_2(\mathrm{w}).$$

При этом для $\mathrm{u}\subset X\times X$ и $G\subset X$ имеют место равенства

$$(\mathrm{w}\circ\mathrm{v})^{-1}=\mathrm{v}^{-1}\circ\mathrm{w}^{-1},\qquad \mathrm{w}\circ(\mathrm{v}\circ\mathrm{u})=(\mathrm{w}\circ\mathrm{v})\circ\mathrm{u},$$

$$\mathrm{w}[M]_1=\mathrm{w}^{-1}[M]_2,\quad \mathrm{w}[M]_2=\mathrm{w}^{-1}[M]_1,\quad \mathrm{w}[M]=\mathrm{w}^{-1}[M],$$
$$(\mathrm{w}\circ\mathrm{v})[M]_1=\mathrm{v}[\mathrm{w}[M]_1]_1,\qquad (\mathrm{w}\circ\mathrm{v})[M]_2=\mathrm{w}[\mathrm{v}[M]_2]_2,$$
$$\mathrm{w}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}=\mathrm{v}[M]_1\times\mathrm{w}[G]_2.$$

Кроме того, равенства $\mathrm{v}[M]_1\cap\mathrm{w}[G]_2=\varnothing$ и $M\cap(\mathrm{v}\circ\mathrm{w})[G]_2=\varnothing$ могут выполняться лишь одновременно, а для $H\subset X\times X$ принадлежность $(x,\,y)\in\mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$ эквивалентна $(\mathrm{v}[x]_1\times\mathrm{w}[y]_2)\cap H\neq\varnothing$.

Для $\mathrm{w}\subset X\times X$ множества w^n, $n\in\mathbb{N}$, вводятся при помощи равенств $\mathrm{w}^1=\mathrm{w}$ и $\mathrm{w}^{n+1}=\mathrm{w}\circ\mathrm{w}^n$, а $\mathrm{w}^{-n}=(\mathrm{w}^{-1})^n=(\mathrm{w}^n)^{-1}$ (не следует путать w^n с аналогичным обозначением для декартова произведения). Множество w называется *симметричным*, если $\mathrm{w}=\mathrm{w}^{-1}$; *поглощающим по композиции*, если $X\times X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{w}^n$.

Бинарным отношением (короче — *отношением*) в множестве X называется всякое подмножество $R\subset X\times X$. Относительно R говорят также, что оно определяет отношение в X, а относительно элементов x и y из X при $(x,\,y)\in R$ говорят, что x находится в отношении R с y (или x и y находятся в отношении $(x,\,y)\in R$). Отношение R в X называется

- *рефлексивным*, если $\Delta(X)\subset R$;
- *транзитивным*, если $R\circ R\subset R$;
- *симметричным*, если $R=R^{-1}$;
- *антисимметричным*, если $R\cap R^{-1}\subset\Delta(X)$;
- *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично;
- *отношением частичного упорядочения*, если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично;
- *отношением частичного предупорядочения*, если оно рефлексивно и транзитивно.

Пусть R — отношение эквивалентности в множестве X. Элементы x и y из X при $(x,\,y)\in R$ называются *эквивалентными*. Множество всех элементов из X, эквивалентных x, называется *классом эквивалентности*, определенным элементом x. Два класса эквивалентности, определенные различными элементами, либо не пересекаются, либо совпадают. Система всех классов эквивалентности образует разбиение множества X, называемое разбиением, порожденным отношением эквивалентности R.

Если в множестве X определено отношение R частичного упорядочения (предупорядочения), то X называется *частично упорядоченным* (*предупорядоченным*) множеством. При $(x,\,y)\in\in R\cup R^{-1}$ элементы x и y из X называются *сравнимыми*, а при $(x,\,y)\in R$ говорят, что x *предшествует* y или y *следует за* x. Если отношение частичного упорядочения R в X такое, что $R\cup R^{-1}=X\times X$, то X называется *совершенно упорядоченным.*

Пусть X — множество, частично упорядоченное отношением R. Элемент $x\in X$ называется *максимальным* (*минимальным*), если $(\{x\}\times X)\cap R=\{(x,\,x)\}$ $((X\times\{x\})\cap R=\{(x,\,x)\})$. Для подмножества $M\subset X$ элемент $y\in M$ называется *наименьшим* (*наибольшим*), если $\{y\}\times M\subset R$ $(M\times\{y\}\subset R)$. Элемент $z\in X$ называется *нижней* (*верхней*) *границей* множества M, если $\{z\}\times M\subset R$ $(M\times\{z\}\subset R)$, причем наибольший (наименьший) элемент множества всех нижних (верхних) границ множества M называется *точной нижней* (*точной верхней*) *границей* множества M.

Частично упорядоченное множество называется *полной решеткой*, если любое его непустое подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю границы.

Совершенно упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным,* если каждое его непустое подмножество содержит наименьший элемент. Говорят, что элемент x вполне упорядоченного множества *непосредственно предшествует* элементу y или y непосредственно следует за x, если y следует за x, $x\neq y$ и нет отличного от x и y элемента, следующего за x и предшествующего y. С понятием вполне упорядоченного множества связаны понятие *порядкового числа* и метод *трансфинитной индукции* (см., например, [55], с. 348—366).

Отношение частичного предупорядочения часто обозначается символом $\leqslant$ (в некоторых специальных случаях используются также обозначения $\subset$ и $\prec$), причем то, что y следует за x, записывается в виде $x\leqslant y$ или $y\geqslant x$, а для указания, что $x\leqslant y$ и $x\neq y$, используется запись $x<y$ или $y>x$.

Лемма Цорна: если в частично упорядоченном множестве X каждое совершенно упорядоченное подмножество имеет верхнюю границу, то X обладает максимальным элементом, а каждое $x\in X$ предшествует некоторому максимальному элементу.

3. Топологии. Система τ подмножеств множества X называется *топологией* в X, если $X\in\tau$, $\varnothing\in\tau$, конечные пересечения и произвольные объединения множеств из τ принадлежат τ.

Пара (X, τ), где τ — топология в множестве X, называется *пространством с топологией* (в обшей топологии она называется топологическим пространством).

Система β множеств из топологии τ называется *базой* топологии τ, если любое непустое множество из τ является объединением некоторых множеств из β.

Система γ множеств из топологии τ называется *предбазой* топологии τ, если система β всевозможных пересечений конечного числа множеств из γ образует базу топологии τ.

Пространство (X, τ) и топология τ называются *хаусдорфовыми*, если для каждых $x \in X$ и $y \in X$ найдутся такие $u \in \tau$ и $v \in \tau$, что $x \in u$, $y \in v$ и $u \cap v = \varnothing$.

Пусть τ — топология в множестве X, а $X_1 \subset X$. Тогда система $\tau_1 = \{u \cap X_1 : u \in \tau\}$ подмножеств множества X_1 является топологией в X_1 и называется топологией, *индуцированой* в X_1 топологией τ. При этом пространство с топологией (X_1, τ_1) называется *подпространством* пространства (X, τ).

Пусть $((X_i, \tau_i) : i \in I)$ — семейство пространств с топологией, а β — система подмножеств декартова произведения $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$, представимых в виде $\prod\limits_{i \in I} A_i$, где $A_i \in \tau_i$, причем $A_i = X_i$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа значений. Тогда β является базой некоторой топологии τ в X, называемой *тихоновской топологией* или *тихоновским произведением* семейства топологий $(\tau_i : i \in I)$ и записываемой в виде $\tau = \prod\limits_{i \in I} \tau_i$ (это обозначение не следует путать с декартовым произведением множеств). Пространство с топологией (X, τ) называется *прямым произведением* семейства пространств $((X_i, \tau_i) : i \in I)$ и записывается в виде $(X, \tau) = \prod\limits_{i \in I} (X_i, \tau_i)$. Прямое произведение (X, τ) двух пространств с топологией (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) записывается в виде $(X, \tau) = (X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2)$, причем для топологии τ используется обозначение $\tau = \tau_1 \times \tau_2$.

4. Фильтры. Система $\mathfrak{F}$ подмножеств множества X называется *фильтром* в X, если $\varnothing \notin \mathfrak{F}$, пересечение конечного числа множеств из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$, всякое подмножество множества X, содержащее множество из $\mathfrak{F}$, принадлежит $\mathfrak{F}$.

Система β множеств из фильтра $\mathfrak{F}$ называется его *базой*, если каждое множество из $\mathfrak{F}$ содержит множество из β.

Система β подмножеств множества X является базой фильтра в X тогда и только тогда, когда $\varnothing \notin \beta$, а пересечение любых двух множеств из β содержит множество из β.

Система γ множеств из фильтра $\mathfrak{F}$ называется его *предбазой*, если система β всевозможных пересечений конечного числа множеств из γ образует базу фильтра $\mathfrak{F}$.

Система γ подмножеств множества X называется *центрированной*, если пересечение любого конечного числа множеств из γ не пусто.

Система γ подмножеств множества X является предбазой фильтра в X тогда и только тогда, когда она центрирована. Фильтр $\mathfrak{F}$ в X, имеющий предбазу γ, есть система тех подмножеств множества X, каждое из которых содержит пересечение конечного числа множеств из γ. Относительно фильтра $\mathfrak{F}$ говорят, что он *порожден системой* γ. Очевидно, $\mathfrak{F}$ есть слабейший фильтр в X, для которого $\gamma \subset \mathfrak{F}$. Фильтр в X, максимальный по отношению включения, называется *ультрафильтром.*

Для отображения $f : X \to Y$ и фильтра $\mathfrak{F}$ в некотором $X' \subset X$ система множеств $\{f(M) : M \in \mathfrak{F}\}$ является фильтром в $f(X')$ и обозначается через $f(\mathfrak{F})$.

Пусть V_x для каждого $x \in X$ есть некоторый фильтр подмножеств множества X, содержащих x, а τ — система подмножеств множества X, состоящая из пустого подмножества и таких $v \subset X$, что $v \in V_x$ для каждого $x \in v$. Тогда τ является топологией в X. Она называется *топологией, определенной семейством фильтров* $(V_x : x \in X)$.

Пусть $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$, $\mathfrak{F}_i$ для каждого $i \in I$ — фильтр в X_i, а β — система подмножеств в X, представимых в виде $\prod\limits_{i \in I} M_i$, где $M_i \in \mathfrak{F}_i$, причем $M_i = X_i$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа значений. Тогда β есть база некоторого фильтра $\mathfrak{F}$ в X, называемого *произведением* семейства фильтров $(\mathfrak{F}_i : i \in I)$ и записываемого в виде $\mathfrak{F} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ (это обозначение не следует путать с декартовым произведением множеств). Произведение двух фильтров $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ записывается в виде $\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$.

Пусть $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$; $V^{(i)}_{x_i}$ для каждых $i \in I$ и $x_i \in X_i$ — некоторый фильтр подмножеств множества X_i, содержащих x_i; V_x для каждого $x \in X$ — фильтр в X, являющийся произведением семейства фильтров $\big(V^{(i)}_{x_i} : i \in I\big)$, где $x_i = pr_i(x)$; τ_i для каждого $i \in I$ — топология в X_i, определенная семейством фильтров $\big(V^{(i)}_{x_i} : x_i \in X_i\big)$; τ — топология в X, определенная семейством фильтров $(V_x : x \in X)$. Тогда $\prod\limits_{i \in I} \tau_i \subset \tau$.

5. Направленности. Частично предупорядоченное множество I называется *направленным*, если для каждых двух элементов i_1 и i_2 из I существует такое $i \in I$, что $i_1 \leqslant i$ и $i_2 \leqslant i$. Отображение $f: I \to X$ направленного множества I называется *направленностью* в X.

Направленность $g: J \to X$ называется *поднаправленностью* направленности $f: I \to X$, если существует такое отображение $h: J \to I$, что $g = f \circ h = fh$ (т. е. $g(j) = f(h(j))$ при любом $j \in J$) и для каждого $i_0 \in I$ найдется такое $j_0 \in J$, что $h(j) \geqslant i_0$ при $j \geqslant j_0$.

Последовательность является направленностью и обладает поднаправленностями, не являющимися последовательностями.

Говорят, что направленность $f: I \to X$ *почти вся лежит* в $M \subset X$, если существует такое $i_0 \in I$, что $f(i) \in M$ для всех $i \geqslant i_0$. Если же для каждого $i \in I$ найдется такое $i' \geqslant i$, что $f(i') \in M$, то говорят, что направленность f *является частой* в M.

Для направленности $f: I \to X$ система $\{M_i : i \in I\}$ множеств $M_i = \{f(i') : i' \geqslant i\}$ является базой фильтра в X, называемого фильтром, *ассоциированным* с направленностью f.

Для каждого фильтра $\mathfrak{F}$ в X существует такая направленность $f: I \to X$, что ассоциированный с ней фильтр совпадает с $\mathfrak{F}$, а именно: в качестве I можно взять множество всевозможных пар (x, M), где $M \in \mathfrak{F}$ и $x \in M$, считая $(x_1, M_1) \leqslant (x_2, M_2)$, если $M_2 \subset M_1$, а в качестве f — отображение, определенное равенством $f(i) = x$ для $i = (x, M)$.

Пусть $\mathfrak{F}$ — фильтр, ассоциированный с направленностью $f: I \to X$, а $M \subset X$. Направленность f почти вся лежит (является частой) в M тогда и только тогда, когда $M \in \mathfrak{F}$ (существует в X такой фильтр $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$, что $M \in \mathfrak{F}'$).

Пусть $\mathcal{D}(X) \subset X \times 2^X$ — частично предупорядоченное подмножество таких пар $(x, M) \in X \times 2^X$, что $x \in M$, причем считается $(x_1, M_1) \leqslant (x_2, M_2)$, если $M_2 \subset M_1$. Тогда для каждой направленности $g: J \to X$ существует единственная направленность $f: I \to X$, такая, что $I \subset \mathcal{D}(X)$, $f(i) = x$ для $i = (x, M) \in I$, а g и f могут лишь вместе почти все лежать или являться частыми в одном и том же подмножестве множества X. В силу этого утверждения в § 1 главы IV при построении теории пространств с операцией предела направленности вместо класса всех направленностей в X можно рассматривать множество тех направленностей, области определения которых являются направленными подмножествами в $\mathcal{D}(X)$, причем для удобства даже можно не требовать, чтобы все эти направленности были сужениями проектирующего отображения $pr_1: X \times 2^X \to X$. Это позволяет обойтись без понятия класса (по поводу разницы между интуитивными понятиями множества и класса см. добавление).

С целью сохранения аналогии с принятыми выше обозначениями для последовательностей в дальнейшем удобно значение $f(i)$ направленности $f:I\to X$ на элементе $i\in I$ обозначить через x_i, саму направленность f представить в виде семейства $(x_i:i\in I)$ и переобозначить ее, например, через $\check{x}$, т. е. $\check{x}=(x_i:i\in I)$, а множество ее значений обозначить через $[\check{x}]$, т. е. $[\check{x}]=\{x_i:i\in I\}$, причем для указания, что $\check{x}'$ является поднаправленностью направленности $\check{x}$, использовать запись $\check{x}'\prec\check{x}$, а направленность, все члены которой являются одним и тем же элементом x, независимо от ее области определения обозначить через $\dot{x}$ и называть *стационарной* направленностью.

6. Векторные пространства. Пусть X — *векторное пространство* над полем вещественных или комплексных чисел, т. е. множество, в котором определены сумма $x+y\in X$ любых двух его элементов (*векторов*) x, y и произведение $\alpha x\in X$ любого элемента $x\in X$ на произвольное число α, причем эти операции удовлетворяют общеизвестным аксиомам. Символом 0 обозначается как нулевой вектор (*нуль*) пространства X, так и число нуль. Противоположный к $x\in X$ вектор обозначается через $-x$, т. е. $x+(-x)=x-x=0$.

Векторное пространство над полем вещественных (комплексных) чисел называется вещественным (комплексным) векторным пространством. Если в комплексном векторном пространстве X вместе с операцией сложения векторов рассматривать операцию умножения вектора лишь на вещественное число, то получится вещественное векторное пространство, которое обозначается через $X_{\mathbb{R}}$ и называется *ассоциированным* с X вещественным векторным пространством. Всякий раз, когда безразлично какое числовое поле рассматривать или это ясно из контекста, термин «векторное пространство» используется без указания числового поля.

Числовая мнимая единица обозначается через i, а для комплексного числа $c=a+\mathrm{i}b$, где a и b — вещественные числа, обозначаются $\overline{c}=a-\mathrm{i}b$, $\Re c=a$, $\Im c=b$ и $|c|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Для подмножеств M, G векторного пространства X и числового множества A через $M+G$, $M-G$ и AM обозначаются множества всевозможных векторов $x+y$, $x-y$ и αx соответственно, где $x\in M$, $y\in G$ и $\alpha\in A$. При этом вместо $\{x\}\pm G$, $M\pm\{y\}$ и $\{\alpha\}M$ пишутся $x\pm G$, $M\pm y$ и αM соответственно. Обозначается $-M=(-1)M=0-M$. Для последовательностей $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ в X и числовой последовательности $\hat{\alpha}=(\alpha_n:n\in\mathbb{N})$ через $\hat{x}+\hat{y}$, $\hat{x}-\hat{y}$ и $\hat{\alpha}\hat{x}$ обозначаются последовательности векторов $x_n + y_n$, $x_n - y_n$ и $\alpha_n x_n$ соответственно. При этом для числовой стационарной последовательности $\dot{\alpha}$ вместо $\dot{\alpha}\hat{x}$ пишется $\alpha\hat{x}$. Введением этих операций сложения последовательностей и умножения последовательности на число, множество $X^{\mathbb{N}}$ становится векторным пространством, в котором нулем служит $\dot{0}$, а противополжным к $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ вектором служит $-\hat{x} = (-1)\hat{x} = \dot{0} - \hat{x}$.

Всюду в дальнейшем, говоря о декартовом произведении Z произвольного семейства $(Z_i : i \in I)$ векторных пространств над одним и тем же полем чисел, предполагается, что Z наделено структурой векторного пространства следующим образом: сумма $\xi + \eta$ элементов $\xi = (\xi_i : i \in I)$ и $\eta = (\eta_i : i \in I)$ из Z, где $\xi_i \in Z_i$ и $\eta_i \in Z_i$, определяется равенством $\xi + \eta = (\xi_i + \eta_i : i \in I)$, а произведение αz элемента $z = (z_i : i \in I)$ из Z, где $z_i \in Z_i$, на число α определяется равенством $\alpha z = (\alpha z_i : i \in I)$. Нулем в Z служит $0 = (0_i : i \in I)$, где 0_i — нуль пространства Z_i, а противоположным к $z = (z_i : i \in I) \in Z$ вектором служит $-z = (-z_i : i \in I)$.

Пусть $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — конечное семейство векторов с некоторым $n \in \mathbb{N}$, а $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — семейство чисел. Сумма $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — *коэффициентами* линейной комбинации. При этом указанная сумма называется *вещественно линейной* (*выпуклой*) *комбинацией* векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если $\alpha_k \in \mathbb{R}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ (соответственно $\alpha_k \geqslant 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$). Конечное семейство векторов называется *линейно* (*вещественно линейно*) *независимым*, если линейная (вещественно линейная) комбинация ее членов может равняться нулю лишь тогда, когда равны нулю все коэффициенты этой комбинации. Произвольное семейство векторов называется линейно (вещественно линейно) независимым, если любое его конечное подсемейство линейно (вещественно линейно) независимо. Произвольная система векторов называется линейно (вещественно линейно) независимой, если в ней любое конечное семейство попарно различных векторов линейно (вещественно линейно) независимо. Семейство векторов, не являющееся линейно независимым, называется *линейно зависимым* (это относится и к системе векторов). Линейно зависимому семейству векторов может соответствовать линейно независимая система векторов. В вещественном векторном пространстве вещественно линейная комбинация векторов есть их линейная комбинация, а вещественно линейная независимость векторов есть их линейная независимость.

В комплексном векторном пространстве вещественно линейно независимая система векторов может быть линейно зависимой.

В векторном пространстве X множество M называется

• *поглощающим по сложению*, если для каждого $x \in X$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \in M + M + \ldots + M$, где число слагаемых равно n;

• *поглощающим* (или *радиально поглощающим*), если для каждого $x \in X$ существует такое $r > 0$, что $x \in rM$;

• *уравновешенным*, если $rM \subset M$ для любого числа r с $|r| \leqslant 1$;

• *вещественно уравновешенным*, если $rM \subset M$ для любого $r \in [-1;\, 1]$;

• *радиально уравновешенным*, если $rM \subset M$ для любого $r \in [0;\, 1]$;

• *выпуклым*, если $rM + (1-r)M \subset M$ для любого $r \in (0;\, 1)$;

• *векторным подпространством*, если $M \neq \varnothing$ и $\alpha M + \beta M \subset$ $\subset M$ для любых чисел α и β;

• *вещественным векторным подпространством*, если $M \neq$ $\neq \varnothing$ и $\alpha M + \beta M \subset M$ для любых вещественных чисел α и β;

• *уравновешением* множества H, если $M = \bigcup\{rH : |r| \leqslant 1\}$;

• *вещественным уравновешением* множества H, если $M =$ $= \bigcup\{rH : -1 \leqslant r \leqslant 1\}$;

• *радиальным уравновешением* множества H, если $M =$ $= \bigcup\{rH : 0 \leqslant r \leqslant 1\}$;

• *линейной оболочкой* множества H, если M — множество всех конечных линейных комбинаций векторов из H;

• *вещественно линейной оболочкой* множества H, если M — множество всех конечных вещественно линейных комбинаций векторов из H;

• *выпуклой оболочкой* множества H, если M — множество всех конечных выпуклых комбинаций векторов из H.

Будем говорить, что подмножество M векторного пространства X *поглощает* подмножество $G \subset X$, если $rG \subset M$ при некотором $r > 0$, а поглощает последовательность $\hat{x}$ векторов из X, если оно поглощает множество $[\hat{x}]$. Кроме того, выпуклую оболочку множества $[\hat{x}]$ будем называть также выпуклой оболочкой последовательности $\hat{x}$.

Поглощающее множество и непустое радиально уравновешенное множество содержат нуль. Поглощающее и радиально уравновешенное множество поглощающе по сложению. Если множество M уравновешено и $|\alpha| = 1$, то $\alpha M = M$. Выпуклое множество, содержащее нуль, радиально уравновешено. Так как $H \subset \alpha H + (1-\alpha)H$ для любых числа α и множества H векторов, то $rM + (1-r)M = M$ для любых $r \in [0;\, 1]$ и выпуклого множества M. В векторном пространстве выпуклая оболочка множества H является выпуклым множеством и совпадает с пересечением всех выпуклых множеств, содержаших H, а линейная (вещественно линейная) оболочка множества $H \neq \varnothing$ является векторным (вещественным векторным) подпространством и совпадает с пересечением всех векторных (вещественных векторных) подпространств, содержащих H. В вещественном векторном пространстве вещественное векторное подпространство есть векторное подпространство, а вещественно линейная оболочка множества есть его линейная оболочка.

В векторном пространстве для всякого выпуклого множества M выпуклая оболочка M' множества $M \cup (-M)$ вещественно уравновешена и справедливы равенства

$$M' = \bigcup\{tM - (1-t)M : t \in [0;\, 1]\} =$$
$$= \bigcup\{rtM - r(1-t)M : t \in [0;\, 1],\ r \in [-1;\, 1]\}.$$

Для подмножества M векторного пространства вектор $x \in M$ называется *крайней точкой*, если из условий $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, $t \in (0;\, 1)$ и $x = tx_1 + (1-t)x_2$ следует, что $x_1 = x_2 = x$.

В векторном (вещественном векторном) подпространстве $X' \neq \{0\}$ векторного пространства максимальная по отношению включения линейно (вещественно линейно) независимая система векторов существует и называется *базисом* (*вещественным базисом*) *Гамеля* в X', причем если эта система конечна, то она просто называется базисом (вещественным базисом) в X'. Любые два базиса (вещественных базиса) Гамеля в X' имеют одинаковую мощность, которая называется *размерностью* (*вещественной размерностью*) X' и обозначается через $\dim X'$ ($\dim_{\mathbb{R}} X'$). Если $\dim X' = n$ ($\dim_{\mathbb{R}} X' = n$) для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то X' называется *конечномерным*, а именно: *n-мерным* векторным (вещественным векторным) подпространством ($\{0\}$ считается 0-мерным подпространством). Вещественный базис Гамеля в векторном подпространстве X' вещественного векторного пространства есть базис Гамеля в X' и $\dim_{\mathbb{R}} X' = \dim X'$. Если H — базис Гамеля в векторном подпространстве X' комплексного векторного пространства, то $H \cup (\mathrm{i}H)$ есть вещественный базис Гамеля в X' и, значит, $\dim_{\mathbb{R}} X' = 2 \dim X'$ (в случае *бесконечномерного* X' $\dim_{\mathbb{R}} X' = \dim X'$). Если $X_{\mathbb{R}}$ — вещественное векторное пространство, ассоциированное с комплексным векторным пространством X, то $\dim_{\mathbb{R}} X = \dim X_{\mathbb{R}}$, причем вещественное векторное подпространство $X' \subset X$ есть векторное подпространство в $X_{\mathbb{R}}$, а $\dim X'$ в $X_{\mathbb{R}}$ равно $\dim_{\mathbb{R}} X'$ в X.

Пусть X и Y — векторные пространства, а $G \subset X$. Отображение $f : G \to Y$ называется

• *аддитивным*, если $G + G \subset G$ и $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ для всех x_1 и x_2 из G;

• *положительно однородным*, если $rG = G$ и $f(rx) = rf(x)$ для всех $r > 0$ и $x \in G$;

• *вещественно однородным*, если $rG \subset G$ и $f(rx) = rf(x)$ для всех $r \in \mathbb{R}$ и $x \in G$;

• *однородным*, если X и Y имеют одно и то же числовое поле $\mathbb{K}$, а $rG \subset G$ и $f(rx) = rf(x)$ для всех $r \in \mathbb{K}$ и $x \in G$;

• *вещественно линейным*, если G — вещественное векторное подпространство в X, а f аддитивно и вещественно однородно;

• *линейным*, если X и Y имеют одно и то же числовое поле, G — векторное подпространство в X, а f аддитивно и однородно.

Если отображение $f : G \to Y$ положительно однородно и $0 \in G$, то $f(0) = 0$, а если f аддитивно и $rG \subset G$ для любого рационального числа r, то $f(rx) = rf(x)$, $x \in G$. В случае вещественных векторных пространств X и Y вещественная однородность или вещественная линейность отображения f есть его однородность или линейность соответственно. *Ядром* линейного (вещественно линейного) отображения f называется множество $f^{-1}(0) = \{x \in G : f(x) = 0\}$ и является векторным (вещественным векторным) подпространством в G.

Функционал Минковского $\mu_u : X \to \mathbb{R}_+$ поглощающего подмножества u векторного пространства X определяется формулой $\mu_u(x) = \inf\{r > 0 : x \in ru\}$, $x \in X$, и положительно однороден. Множества $v = \{x : \mu_u(x) < 1\}$ и $w = \{x : \mu_u(x) \leqslant 1\}$ поглощающие и радиально уравновешены, причем $\mu_u = \mu_v = \mu_w$ и $u \subset w$, $v \subset w$, а если u радиально уравновешено, то $v \subset u \subset w$. Если поглощающее множество u уравновешено (вещественно уравновешено), то $\mu_u(\alpha x) = |\alpha|\mu_u(x)$ для любых $x \in X$ и числа (вещественного числа) α, причем множества v и w тоже уравновешены (вещественно уравновешены). Если поглощающее множество u выпукло, то $\mu_u(x+y) \leqslant \mu_u(x) + \mu_u(y)$ для любых x и y из X, причем множества v и w тоже выпуклы. Для любого положительно однородного функционала $f : X \to \mathbb{R}_+$ множество $u = \{x : f(x) < 1\}$ поглощающе и радиально уравновешено, причем $f = \mu_u$.

Говорят, что векторное пространство X *изоморфно* (*вещественно изоморфно*) векторному пространству Y, если существует линейное (вещественно линейное) биективное отображение $f : X \to Y$. При этом f называется *изоморфизмом* (*вещественным изоморфизмом*) X на Y.

Пусть X_0 — векторное (вещественное векторное) подпространство векторного пространства X. Определим в X отношение эквивалентности, считая два вектора x и y из X эквивалентными, если $x-y\in X_0$. Классами эквивалентности являются множества $x+X_0$, $x\in X$, называемые *классами смежности.* Если операции сложения $\varphi+\psi$ классов смежности $\varphi=x+X_0$, $\psi=y+X_0$ и умножения $\alpha\varphi$ класса смежности φ на число (вещественное число) α определить соответственно формулами $\varphi+\psi=x+y+X_0$ и $\alpha\varphi=\alpha x+X_0$, то множество всех классов смежности становится векторным пространством, которое обозначается через X/X_0 и называется *фактор-пространством* пространства X по X_0. Нулем фактор-пространства X/X_0 является X_0. Отображение $\pi : X\to X/X_0$, сопоставляющее каждому $x\in X$ класс смежности $\pi(x)=x+X_0$, линейно (вещественно линейно) и называется *фактор-отображением.*

Пусть X_1 и X_2 — векторные (вещественные векторные) подпространства векторного пространства X. Если отображение $(x_1,\, x_2)\mapsto x_1+x_2$ является изоморфизмом (вещественным изоморфизмом) $X_1\times X_2$ на X, то X называется *алгебраической прямой суммой* подпространств X_1, X_2 и записывается в виде $X=X_1\oplus X_2$. Очевидно, $X=X_1\oplus X_2$ тогда и только тогда, когда каждое $x\in X$ единственным образом представляется в виде $x=x_1+x_2$, где $x_1\in X_1$ и $x_2\in X_2$, т. е. когда $X=X_1+X_2$ и $X_1\cap X_2=\{0\}$. Если $X=X_1\oplus X_2$, то X_2 будем записывать в виде $X_2=X\ominus X_1$ и называть *алгебраическим дополнением* подпространства X_1, причем аналогичные запись и название будем использовать также для X_1. Если $X_1\neq X$ и $X_1\neq\{0\}$, то X_1 имеет бесконечное множество алгебраических дополнений, причем любые два алгебраических дополнения имеют одинаковую размерность (вещественную размерность). Пусть $X=X_1\oplus X_2$. Отображения $p_1 : X\to X_1$ и $p_2 : X\to X_2$, удовлетворяющие равенству $p_1(x)+p_2(x)=x$ для всех $x\in X$, линейные (вещественно линейные) и называются *проектирующими отображениями, аннулирующимися на* X_2 и X_1 соответственно. Пересечение множества X_2 с каждым классом смежности из X/X_1 является одноэлементным множеством, а сужение на X_2 фактор-отображения $\pi : X\to X/X_1$ является изоморфизмом X_2 на X/X_1.

Отображение $x\mapsto x^*$ комплексного векторного пространства X на себя называется *инволюцией* в X, если $(x+y)^*=x^*+y^*$, $(\alpha x)^*=\overline{\alpha}x^*$ и $(x^*)^*=x$ для любых x, y из X и числа α. Элемент $x\in X$ при $x^*=x$ называется *вещественным.* Подмножество $X_0\subset X$ всех вещественных элементов является вещественным векторным подпространством, причем $X=X_0\oplus \mathrm{i}X_0$.

Глава I

ОБЩИЕ ПРОСТРАНСТВА С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Операция предела последовательности. Полная система окрестностей точки

Пусть X — непустое множество. Его элементы назовем *точками*. Каждой точке $x \in X$ сопоставим некоторую систему V_x подмножеств множества X, содержащих x. Каждое множество $v \in V_x$ назовем *окрестностью* точки x, а V_x — системой (точнее — предварительной системой) окрестностей точки x. Этим мы намереваемся рассматривать способ приближения к точке, по которому нельзя приблизиться к x точками множества $X \setminus v$ при любом $v \in V_x$. Исходя из семейства систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, введем в X понятие *предела* последовательности и тем самым уточним смысл высказывания “приблизиться к точке последовательностью".

Определение 1.1. *Точка $x \in X$ называется пределом последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ по системе V_x окрестностей точки x, если $\hat{x}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_x$. Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, сопоставляющее каждой последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ множество ее пределов $\Lambda(\hat{x}) \in 2^X$, называется операцией предела последовательности в множестве X (короче — операцией предела в X), определенной семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Пара (X, Λ) называется пространством с операцией предела последовательности (короче — пространством с операцией предела), причем X называется носителем, а его элементы и подмножества — точками и подмножествами пространства. В (X, Λ) последовательность $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, имеющая предел, называется сходящейся, причем если $x \in \Lambda(\hat{x})$, то будем говорить, что $\hat{x}$ сходится к x. Последовательность $\hat{x}$, не имеющая предела, т. е. с $\Lambda(\hat{x}) = \varnothing$, называется расходящейся. Если каждая сходящаяся последовательность имеет лишь один предел, то Λ называется операцией однозначного предела.*

Предложение 1.1. *Пусть в множестве X операция предела Λ определена семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, а V'_x для каждого $x \in X$ — фильтр в X, имеющий предбазу V_x. Тогда семейство систем окрестностей $(V'_x : x \in X)$ тоже определяет в X операцию предела Λ.* ▶

Предложение 1.2. *Пусть в множестве X операция предела Λ определяется каждым из семейств систем окрестностей $\bigl(V_x^{(i)} : x \in X\bigr)$, $i \in I$. Тогда Λ определяется также семейством $(V_x : x \in X)$ систем окрестностей $V_x = \bigcup\limits_{i \in I} V_x^{(i)}$.* ►

Предложение 1.3. *В множестве X для всякой операции предела Λ существует семейство сильнейших систем окрестностей $(U_x : x \in X)$, определяющее эту операцию предела, причем U_x для каждого $x \in X$ является фильтром в X.*

◄ Пусть $\bigl\{\bigl(V_x^{(i)} : x \in X\bigr) : i \in I\bigr\}$ — множество всевозможных семейств $\bigl(V_x^{(i)} : x \in X\bigr)$ систем окрестностей в X, каждое из которых определяет операцию предела Λ. Для каждого $x \in X$ положим $U_x = \bigcup\limits_{i \in I} V_x^{(i)}$. С учетом предложения 1.2 $(U_x : x \in X)$ является семейством сильнейших систем окрестностей, определяющим операцию предела Λ. В силу предложения 1.1 U_x является фильтром в X. ►

Определение 1.2. *В множестве X семейство сильнейших систем окрестностей $(U_x : x \in X)$, определяющее операцию предела Λ, называется семейством полных систем окрестностей пространства (X, Λ). При этом в (X, Λ) окрестностью точки x называется любое множество из U_x, а U_x называется полной системой окрестностей точки x. Окрестностью множества M называется всякое множество в этом пространстве, являющееся окрестностью каждой точки из M (любое множество считается окрестностью для $\varnothing$). Подсистема $V_x \subset U_x$ называется фундаментальной системой окрестностей точки x, если для каждого $u \in U_x$ существует такое $v \in V_x$, что $v \subset u$ (т. е. если V_x является базой фильтра U_x).*

Замечание 1.1. Пусть в множестве X операция предела Λ определена семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$. Тогда полная система U_x окрестностей точки x пространства (X, Λ), вообще говоря, отличается от фильтра V'_x в X, имеющего предбазу V_x, причем $V'_x \subset U_x$. Возможность $V'_x \neq U_x$ означает, что не всякий фильтр подмножеств множества X, содержащих точку $x \in X$, может служить полной системой окрестностей точки x в некотором пространстве с операцией предела последовательности, имеющем носитель X.

Определение 1.3. *Множество S_x всех последовательностей в множестве X, сходящихся к точке $x \in X$ по системе V_x окрестностей этой точки, называется структурой сходимости последовательностей к x (короче — структурой* *сходимости к x), определенной системой V_x окрестностей точки x. Семейство $(S_x : x \in X)$ называется структурой сходимости последовательностей в X (короче — структурой сходимости в X), определенной семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$.*

Пусть V_x — некоторая система окрестностей точки x в множестве X, а V_x' — фильтр в X, имеющий предбазу V_x. Тогда V_x и V_x' определяют одну и ту же структуру S_x сходимости к x. Объединение U_x всех систем окрестностей точки x, определяющих структуру S_x сходимости к x, тоже определяет эту структуру сходимости к x и является сильнейшей системой окрестностей точки x, определяющей S_x. При этом U_x является фильтром в X и называется полной системой окрестностей точки x, соответствующей структуре S_x сходимости к x.

Предложение 1.4. *Пусть V_x — некоторая система окрестностей точки x в множестве X; S_x — структура сходимости к x, определенная системой V_x; U_x — полная система окрестностей точки x, соответствующая структуре S_x. Тогда*

а) $S_x \cap (X \setminus M)^{\mathbb{N}} \neq \varnothing$ для любого такого $M \subset X$, что $M \notin U_x$;

б) U_x совпадает с пересечением всех фильтров в X, имеющих конечную или счетную базу (или только ассоциированных с последовательностями) и содержащих систему V_x (фильтр U_x может не иметь конечной или счетной базы).

◀ (а) Очевидно, что если $x \notin M$, то $\dot{x} \in S_x \cap (X \setminus M)^{\mathbb{N}}$. В случае $x \in M$ рассмотрим систему $U_x' = U_x \cup \{M\}$ окрестностей точки x и определенную ею структуру S_x' сходимости к x. Так как $U_x \subset U_x'$ и $U_x \neq U_x'$, то $S_x' \subset S_x$ и $S_x' \neq S_x$. Поэтому $S_x \setminus S_x' \neq \varnothing$. Пусть $\hat{x} \in S_x \setminus S_x'$. Ясно, что вне M должны находиться все члены некоторой подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Однако $\hat{x}' \in (X \setminus M)^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}' \in S_x$. Следовательно, $S_x \cap (X \setminus M)^{\mathbb{N}} \neq \varnothing$.

(б) Пусть $u \in U_x$, а $\mathfrak{F}$ — фильтр в X, который сильнее системы V_x и имеет конечную или счетную базу $\{M_n' : n \in \mathbb{N}\}$. Положим $M_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_n'$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $M_{n+1} \subset M_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того, $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ является базой фильтра $\mathfrak{F}$. Предположим $u \notin \mathfrak{F}$. Тогда $M_n \setminus u \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем некоторое $x_n \in M_n \setminus u$ и рассмотрим последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, которая, очевидно, почти вся лежит в каждом M_n. Так как $V_x \subset \mathfrak{F}$, то $\hat{x}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_x$. Поэтому $\hat{x} \in S_x$ и, значит, $\hat{x}$ почти вся лежит в u. Однако это противоречит выбору $\hat{x}$. Следовательно, $u \in \mathfrak{F}$.

Пусть, обратно, подмножество $u \subset X$ принадлежит каждому фильтру в X, который сильнее V_x и имеет конечную или счетную базу. Докажем, что $u \in U_x$. Предположим противное. Тогда в силу а) существует последовательность $\hat{x} \in S_x \cap (X \setminus u)^{\mathbb{N}}$. Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество $M_n = \{x_i : i \geqslant n\}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ фильтр в X, имеющий базу $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$. Так как $\hat{x}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_x$, то $V_x \subset \mathfrak{F}$. Но тогда, по условию, $u \in \mathfrak{F}$ и, следовательно, $\hat{x}$ почти вся лежит в u. Однако это невозможно, поскольку $x_n \notin u$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает, что $u \in U_x$. ▶

Если в множестве X системы V'_x и V''_x окрестностей точки x определяют одну и ту же структуру S_x сходимости к x, то пересечение системы V'_x совпадает с пересечением системы V''_x.

Предложение 1.5. *Если в множестве X операция предела Λ и структура сходимости $(S_x : x \in X)$ определены одним и тем же семейством систем окрестностей, то*

$$\Lambda(\hat{x}) = \{x \in X : \hat{x} \in S_x\}, \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}},$$

$$S_x = \{\hat{x} \in X^{\mathbb{N}} : x \in \Lambda(\hat{x})\}, \quad x \in X.$$

Обратно, если выполняется одно из этих равенств, то выполняется и другое, а полная система U_x окрестностей произвольной точки $x \in X$, соответствующая структуре S_x сходимости к x, является также полной системой окрестностей точки x в пространстве (X, Λ). ▶

В силу предложений 1.4 и 1.5 справедлива

Теорема 1.1. *Система U_x подмножеств в X, содержащих точку $x \in X$, тогда и только тогда является полной системой окрестностей точки x в некотором пространстве с операцией предела (X, Λ), когда для каждого такого $M \subset X$, что $M \notin U_x$, существует последовательность в $X \setminus M$, почти вся лежащая в каждом множестве из U_x. Кроме того, U_x тогда и только тогда является полной системой окрестностей точки x в некотором пространстве (X, Λ), когда U_x совпадает с пересечением всех фильтров в X, имеющих конечную или счетную базу (или только ассоциированных с последовательностями) и содержащих систему U_x.* ▶

Понятия полной системы окрестностей точки и операции предела последовательности вводились выше совместно, без использования специальных аксиом, за исключением требования, что окрестность точки должна содержать эту точку. Примененный подход вкратце можно описать следующим образом: исходя из семейства $(V_x : x \in X)$ некоторых систем окрестностей, определяется операция предела последовательности Λ в множестве X, затем каждая система V_x расширяется с сохранением Λ и полученная сильнейшая система U_x принимается как система всех окрестностей точки x в пространстве (X, Λ). При этом U_x является системой всех таких подмножеств пространства (X, Λ), в дополнении каждого из которых нет сходящейся к точке x последовательности (т. е. из дополнения каждого из этих подмножеств нельзя приблизиться к точке x последовательностью).

Ясно, что указанное в теореме 1.1 свойство может быть принято в качестве аксиомы (хотя бы неэффективной) для введения понятия полной системы окрестностей точки.

Теорема 1.2. *Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ является операцией предела в множестве X (т. е. определяется семейством систем окрестностей) тогда и только тогда, когда*

1) $x \in \Lambda(\dot{x})$ для каждого $x \in X$;

2) $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}')$ для любых $\hat{x}' \prec \hat{x}$ из $X^{\mathbb{N}}$;

3) для каждых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X \setminus \Lambda(\hat{x})$ существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $x \notin \Lambda(\hat{\xi})$ для любого $\hat{\xi} \in [\hat{x}']^{\mathbb{N}}$.

В пространстве с операцией предела (X, Λ) полная система U_x окрестностей точки x есть множество таких $u \subset X$, что $x \notin \Lambda(\hat{\xi})$ для любого $\hat{\xi} \in (X \setminus u)^{\mathbb{N}}$. В (X, Λ) множество v является окрестностью множества M тогда и только тогда, когда $M \cap \Lambda(\hat{\xi}) = \varnothing$ для любого $\hat{\xi} \in (X \setminus v)^{\mathbb{N}}$.

◀ Необходимость указанных свойств очевидна. Докажем их достаточность. С этой целью для каждого $x \in X$ рассмотрим множество U_x таких $u \subset X$, что $x \notin \Lambda(\hat{\xi})$ для любого $\hat{\xi} \in (X \setminus u)^{\mathbb{N}}$. В частности, $X \in U_x$. Из свойства 1) отображения Λ следует, что $x \in u$ для любого $u \in U_x$. Множество U_x примем в качестве системы окрестностей точки x и при помощи семейства $(U_x : x \in X)$ систем окрестностей определим в X операцию предела Λ'. Докажем, что $\Lambda' = \Lambda$. Пусть $x \in X$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Если $x \in \Lambda(\hat{x})$, то $\hat{x}$ почти весь лежит в каждом $u \in U_x$. Действительно, в противном случае существуют такие $u \in U_x$ и $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $[\hat{x}'] \subset X \setminus u$. Однако из свойства 2) отображения Λ следует, что $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}')$. А это противоречит выбору U_x. Тем самым из $x \in \Lambda(\hat{x})$ следует, что $x \in \Lambda'(\hat{x})$ и, значит, $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$. Если же $x \notin \Lambda(\hat{x})$, то в силу свойства 3) отображения Λ существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $x \notin \Lambda(\hat{\xi})$ для любого $\hat{\xi} \in [\hat{x}']^{\mathbb{N}}$. Ясно, что множество $u = X \setminus [\hat{x}']$ принадлежит U_x. Однако вне u находится бесконечное число членов последовательности $\hat{x}$. Поэтому $x \notin \Lambda'(\hat{x})$ и, значит, $\Lambda'(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x})$.

Из доказанных включений получаем $\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x})$, т. е. $\Lambda' = \Lambda$. Следовательно, Λ является операцией предела в X и определяется построенным семейством $(U_x : x \in X)$ систем окрестностей. Остальные утверждения очевидны. ►

Если V_x для каждого $x \in X$ — система всех таких окрестностей v_x точки x в пространстве с операцией предела (X, Λ), что множество $X \setminus v_x$ конечно или счетно, то в силу теоремы 1.2 семейство систем окрестностей $(V_x : x \in X)$ определяет в X операцию предела Λ.

Следствие 1.1. *В пространстве (X, Λ) последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в каждой окрестности множества M тогда и только тогда, когда каждая ее подпоследовательность обладает подпоследовательностью $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$, для которой либо $M \cap \Lambda(\hat{y}) \neq \varnothing$, либо $M \cap \Lambda(\dot{y}_n) \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$.* ►

Укажем другие характеристические свойства операции предела последовательности.

Теорема 1.3. *Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ является операцией предела в множестве X тогда и только тогда, когда*

1) $x \in \Lambda(\dot{x})$ для каждого $x \in X$;

2) $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}')$ для любых $\hat{x}' \prec \hat{x}$ из $X^{\mathbb{N}}$;

3) если $x \in X$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ такие, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$, для которого $x \in \Lambda(\hat{x}'')$, то $x \in \Lambda(\hat{x})$;

4) если $x \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ такие, что $x \in \Lambda(\dot{x}_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $x \in \Lambda(\hat{x})$.

◄ Свойства 1) и 2) операции предела Λ очевидны. Из указанного в свойстве 3) условия вытекает, что в пространстве (X, Λ) любая подпоследовательность $\hat{x}' \prec \hat{x}$ является частой в каждой окрестности точки x. Следовательно, последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в каждой окрестности точки x. Поэтому $x \in \Lambda(\hat{x})$ и, значит, Λ обладает свойством 3). Если же выполняется указанное в свойстве 4) условие, то любая окрестность точки x содержит все члены последовательности $\hat{x}$ и, значит, $x \in \Lambda(\hat{x})$, т. е. Λ обладает свойством 4).

Теперь докажем, что если отображение Λ обладает свойствами 1)—4), то оно является операцией предела в X. Для этого достаточно доказать, что Λ обладает указанным в теореме 1.2 свойством 3). Пусть $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X \setminus \Lambda(\hat{x})$. Тогда в силу свойства 3) отображения Λ существует такое $\hat{y} \prec \hat{x}$, что $x \notin \Lambda(\hat{y}')$ для любого $\hat{y}' \prec \hat{y}$. Пусть $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. Принадлежность $x \in \Lambda(\dot{y}_n)$ может выполняться лишь для конечного числа значений $n \in \mathbb{N}$.

Действительно, если $x\in\Lambda(\dot{y}_{i_n})$ для всех $n\in\mathbb{N}$, где $(i_n:n\in\mathbb{N})$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то в силу свойства 4) отображения Λ имеет место $x\in\Lambda(\hat{y}')$ для $\hat{y}'=(y_{i_n}:n\in\mathbb{N})\prec\hat{y}$. А это противоречит выбору $\hat{y}$. Выберем $k\in\mathbb{N}$ так, чтобы $x\notin\Lambda(\dot{y}_n)$ для всех $n\geqslant k$. Обозначим $x'_n=y_{k+n}$, $n\in\mathbb{N}$, и рассмотрим $\hat{x}'=(x'_n:n\in\mathbb{N})\prec\hat{x}$. Убедимся в том, что $x\notin\Lambda(\hat{\xi})$ для любого $\hat{\xi}\in[\hat{x}']^{\mathbb{N}}$. Действительно, $\hat{\xi}$ обладает либо стационарной подпоследовательностью, либо подпоследовательностью, являющейся также подпоследовательностью для $\hat{x}'$. В обоих случаях из построения $\hat{x}'$ с учетом свойства 2) отображения Λ следует, что $x\notin\Lambda(\hat{\xi})$. Тем самым Λ обладает указанными в теореме 1.2 свойствами и, следовательно, является операцией предела в X. ▶

Указанные в теореме 1.3 свойства (они более эффективны, чем указанные в теореме 1.2 свойства) могут быть приняты в качестве системы аксиом для введения понятия операции предела последовательности. При таком аксиоматическом построении теории операция предела последовательности становится исходным понятием теории лишь формально, поскольку понятие окрестности точки было существенно использовано при выборе этих аксиом.

Из теоремы 1.3 вытекает

Теорема 1.4. *Отображение $\Lambda:X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ тогда и только тогда является операцией предела в X, по которой стационарная последовательность имеет один предел, когда*

1) $\Lambda(\dot{x})=\{x\}$ для каждого $x\in X$;

2) $\Lambda(\hat{x})\subset\Lambda(\hat{x}')$ для любых $\hat{x}'\prec\hat{x}$ из $X^{\mathbb{N}}$;

3) если $x\in X$ и $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ такие, что для каждого $\hat{x}'\prec\hat{x}$ существует $\hat{x}''\prec\hat{x}'$, для которого $x\in\Lambda(\hat{x}'')$, то $x\in\Lambda(\hat{x})$. ▶

Рассмотрим в множестве X операцию однозначного предела Λ. Обозначим через $\hat{X}$ множество таких $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda(\hat{x})\neq\varnothing$. Сужение на $\hat{X}$ отображения $\Lambda:X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ обозначим через λ и для каждого $\hat{x}\in\hat{X}$ в качестве $\lambda(\hat{x})$ примем точку вместо одноточечного множества. Полученное отображение $\lambda:\hat{X}\to X$ тоже называется операцией однозначного предела в X.

Из теоремы 1.4 легко получаются характеристические свойства операции однозначного предела.

Теорема 1.5. *Отображение $\lambda:\hat{X}\to X$, где $\hat{X}\subset X^{\mathbb{N}}$, является операцией однозначного предела в X тогда и только тогда, когда*

1) $\dot{x} \in \hat{X}$ *и* $\lambda(\dot{x}) = x$ *для каждого* $x \in X$;

2) если $\hat{x} \in \hat{X}$ *и* $\hat{x}' \prec \hat{x}$, *то* $\hat{x}' \in \hat{X}$ *и* $\lambda(\hat{x}') = \lambda(\hat{x})$;

3) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *такое, что для каждого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$ *существует* $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ *из* $\hat{X}$ *и* $\lambda(\hat{x}_1) = \lambda(\hat{x}_2)$ *для любых* $\hat{x}_1 \prec \hat{x}$ *и* $\hat{x}_2 \prec \hat{x}$ *из* $\hat{X}$, *то* $\hat{x} \in \hat{X}$. ►

Указанные свойства операции однозначного предела эквивалентны приведенным во введении трем аксиомам.

Характеристические свойства операции предела можно сформулировать в терминах структуры сходимости.

Теорема 1.6. *Для точки* $x \in X$ *подмножество* $S_x \subset X^{\mathbb{N}}$ *является структурой сходимости к* x *тогда и только тогда, когда*

1) $\dot{x} \in S_x$;

2) если $\hat{x} \in S_x$ *и* $\hat{x}' \prec \hat{x}$, *то* $\hat{x}' \in S_x$;

3) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *такое, что для каждого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$ *существует* $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ *из* S_x, *то* $\hat{x} \in S_x$;

4) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ *такое, что* $\dot{x}_n \in S_x$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то* $\hat{x} \in S_x$.

Полная система U_x *окрестностей точки* $x \in X$, *соответствующая структуре* S_x *сходимости к* x, *состоит из таких* $u \subset X$, *что* $S_x \cap (X \setminus u)^{\mathbb{N}} = \varnothing$. ►

Теорема 1.7. *Семейство* $(S_x : x \in X)$ *подмножеств* $S_x \subset X^{\mathbb{N}}$ *тогда и только тогда является структурой сходимости в множестве* X, *по которой стационарная последовательность имеет один предел, когда* S_x *для каждого* $x \in X$ *обладает свойствами*

1) $\dot{x} \in S_x$ *и* $\dot{y} \notin S_x$ *для любого* $y \neq x$ *из* X;

2) если $\hat{x} \in S_x$ *и* $\hat{x}' \prec \hat{x}$, *то* $\hat{x}' \in S_x$;

3) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *такое, что для каждого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$ *существует* $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ *из* S_x, *то* $\hat{x} \in S_x$. ►

Теорема 1.8. *Семейство* $(S_x : x \in X)$ *подмножеств* $S_x \subset X^{\mathbb{N}}$ *тогда и только тогда является структурой сходимости в множестве* X, *определяющей операцию однозначного предела, когда*

1) $\dot{x} \in S_x$ *для каждого* $x \in X$;

2) $S_x \cap S_y = \varnothing$ *для любых* $x \neq y$ *из* X;

3) если $\hat{x} \in S_x$ *и* $\hat{x}' \prec \hat{x}$, *то* $\hat{x}' \in S_x$;

4) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *такое, что для каждого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$ *существует* $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ *из* S_x, *то* $\hat{x} \in S_x$. ►

Предложение 1.6. *Пусть* $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ *и* $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ *— последовательности в пространстве* (X, Λ). *Если* $x_{n+m}=$ $=y_{n+k}$ *для некоторых целых* $m\geqslant 0$, $k\geqslant 0$ *и всех* $n\in\mathbb{N}$, *то* $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{y})$. ▶

Предложение 1.7. *Пусть* $\hat{x}$ *— последовательность в пространстве* (X, Λ), *а для некоторого* $m\in\mathbb{N}$ *подпоследовательности* $\hat{x}_i\prec\hat{x}$, $i=1, 2, \ldots, m$, *такие, что множество* $[\hat{x}]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{m}[\hat{x}_i]$ *конечно, а каждая стационарная подпоследовательность последовательности* $\hat{x}$ *является подпоследовательностью также для некоторой* $\hat{x}_i$. *Тогда*

$$\Lambda(\hat{x}) = \bigcap_{i=1}^{m}\Lambda(\hat{x}_i). \ ▶$$

Предложение 1.8. *В пространстве* (X, Λ) *для любой последовательности* $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ *имеют место включения*

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant k}\Lambda(\dot{x}_n)\subset\Lambda(\hat{x}),\qquad \bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant k}\Lambda(\dot{x}_n)\subset\bigcup_{\hat{x}'\prec\hat{x}}\Lambda(\hat{x}'). \ ▶$$

Предложение 1.9. *Отображение* $\Lambda : X^{\mathbb{N}}\to 2^X$, *определенное для всех* $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ *равенством*

$$\Lambda(\hat{x}) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant k}\Lambda(\dot{x}_n),$$

где $\Lambda(\dot{\xi})$ *для каждого* $\xi\in X$ *— некоторое подмножество в* X, *содержащее* ξ, *является операцией предела в* X, *причем полная система* U_x *окрестностей точки* x *пространства* (X, Λ) *есть система всех подмножеств в* X, *содержащих множество* $\{\xi\in X : x\in\Lambda(\dot{\xi})\}$. ▶

Указанная в предложении 1.9 операция предела возникает в связи с одним вопросом, рассмотренным в главе II, § 1.

Предложение 1.10. *Пусть* Λ *— операция предела в множестве* X, *а отображение* $\Lambda' : X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ *определено для* $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ *следующим образом:* $\Lambda'(\hat{x})=\varnothing$, *если* $\Lambda(\hat{x})=\varnothing$ *или* $\hat{x}$ *обладает двумя стационарными подпоследовательностями, составленными различными точками;* $\Lambda'(\hat{x})=\Lambda(\hat{x})$, *если* $\hat{x}$ *не обладает стационарной подпоследовательностью;* $\Lambda'(\hat{x})=\{x\}$ *для* $x\in X$, *если* $\Lambda(\hat{x})\neq\varnothing$ *и* $\dot{x}$ *является единственной стационарной подпоследовательностью для* $\hat{x}$. *Тогда* Λ' *является операцией предела в* X, *по которой стационарная последовательность имеет один предел, причем она может быть определена семей-*

ством $(V'_x : x \in X)$ *систем окрестностей* $V'_x = U_x \cup U^*_x$, *где* U_x — *полная система окрестностей точки* x *в* $(X,\, \Lambda)$, *а* U^*_x — *система подмножеств в* X, *содержащих* x *и имеющих конечные дополнения.* ▶

Предложение 1.11. *Пусть* $\{\Lambda_i : i \in I\}$ — *система операций предела в множестве* X, *а отображение* $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ *определено формулой*

$$\Lambda(\hat{x}) = \bigcap_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Тогда Λ *является операцией предела в* X *и определяется семейством* $(V_x : x \in X)$ *систем окрестностей* $V_x = \bigcup\limits_{i \in I} U^{(i)}_x$, *где* $U^{(i)}_x$ — *полная система окрестностей точки* x *в* $(X,\, \Lambda_i)$. ▶

В предложении 1.11 фильтр в X, имеющий предбазу V_x, может отличаться от полной системы окрестностей точки x пространства $(X,\, \Lambda)$.

Замечание 1.2. Для операций предела Λ_1 и Λ_2 в множестве X отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, определенное формулой $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda_1(\hat{x}) \cup \Lambda_2(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, может не быть операцией предела.

Предложение 1.12. *Пусть* f — *отображение множества* X *в множество* Y; $\widetilde{\Lambda}$ — *операция предела в* Y; $(\widetilde{U}_y : y \in Y)$ — *семейство полных систем окрестностей пространства* $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$; $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ — *отображение, определенное формулой*

$$\Lambda(\hat{x}) = f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y})), \tag{1}$$

где $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ *и* $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$. *Тогда* Λ *является операцией предела в* X. *Кроме того, в пространстве* $(X,\, \Lambda)$ *полная система* U_x *окрестностей точки* x *есть фильтр, имеющий базу*

$$V_x = \{f^{-1}(\widetilde{u}) : \widetilde{u} \in \widetilde{U}_y,\ y = f(x)\}, \tag{2}$$

причем каждая окрестность точки x *является также окрестностью множества* $f^{-1}(f(x))$.

◀ В силу (1) Λ обладает указанными в теореме 1.3 свойствами и, следовательно, является операцией предела в X.

Пусть u — окрестность точки x в пространстве $(X,\, \Lambda)$. Покажем, что u является окрестностью множества $f^{-1}(f(x))$. Рассмотрим произвольное $\hat{\xi} \in (X \setminus u)^{\mathbb{N}}$. С учетом теоремы 1.2 $x \notin \Lambda(\hat{\xi})$. В силу (1) предположение $\Lambda(\hat{\xi}) \cap f^{-1}(f(x)) \neq \varnothing$ влечет

$f^{-1}(f(x)) \subset \Lambda(\hat{\xi})$, что невозможно, поскольку $x \in f^{-1}(f(x))$. Поэтому $\Lambda(\hat{\xi}) \cap f^{-1}(f(x)) = \varnothing$. Отсюда с учетом теоремы 1.2 следует, что u является окрестностью множества $f^{-1}(f(x))$.

Обозначим через v множество таких $\xi \in u$, что $f^{-1}(f(\xi)) \subset u$. Ясно, что $x \in v$, и если $\xi \in v$, то $f^{-1}(f(\xi)) \subset v$. Покажем, что v является окрестностью точки x. Предположим противное. Тогда существует такое $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, что $x \in \Lambda(\hat{x})$. Так как u является окрестностью точки x, то $\hat{x}$ почти весь лежит в u. Из определения v и принадлежности $x_n \in v$, $n \in \mathbb{N}$, следует существование последовательности $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ точек $\xi_n \in f^{-1}(f(x_n)) \backslash u$. С другой стороны, в силу (1) $\Lambda(\hat{\xi}) = \Lambda(\hat{x})$ и, значит, $x \in \Lambda(\hat{\xi})$. Поэтому $\hat{\xi}$ почти вся лежит в u, а это противоречит выбору $\hat{\xi}$. Следовательно, v является окрестностью точки x. Теперь покажем, что $f(v) \in \widetilde{U}_y$, где $y = f(x)$. С этой целью рассмотрим произвольную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в $Y \backslash f(v)$. Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность некоторых точек $x_n \in f^{-1}(y_n)$. Тогда $x \notin \Lambda(\hat{x})$, поскольку $x_n \notin v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу (1) следует, что $y \notin \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Поэтому $f(v)$ является окрестностью точки y, т. е. $f(v) \in \widetilde{U}_y$.

Пусть $\widetilde{u}$ — окрестность точки y в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Покажем, что $f^{-1}(\widetilde{u})$ является окрестностью множества $f^{-1}(y)$ в (X, Λ). Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в $X \backslash f^{-1}(\widetilde{u})$, а также $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$. Так как $f(x_n) \notin \widetilde{u}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $y \notin \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Поэтому в силу (1) $\Lambda(\hat{x}) \cap f^{-1}(y) = \varnothing$. Значит, $f^{-1}(\widetilde{u})$ является окрестностью множества $f^{-1}(y)$. Из доказанных утверждений следует, что в (X, Λ) полная система U_x окрестностей точки x есть фильтр в X, имеющий базу (2). ▶

Предложение 1.13. *Пусть операция предела Λ определена в множестве X семейством $(V'_x : x \in X)$ систем окрестностей. Если $V'_\xi = \{v'_n : n \in \mathbb{N}\}$ для некоторого $\xi \in X$, то система $V_\xi = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $v_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} v'_i$, является фундаментальной системой окрестностей точки ξ пространства (X, Λ). При этом если система V'_ξ конечна, то ее пересечение является окрестностью точки ξ в (X, Λ) и содержится в любой окрестности точки ξ.*

◀ Пусть u — окрестность точки ξ в (X, Λ). Нужно доказать, что $v_n \subset u$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Предположим противное, т. е. $v_n \setminus u \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $x_n \in v_n \setminus u$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. В силу $v_{k+1} \subset v_k$, $k \in \mathbb{N}$, последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в каждом v'_n, $n \in \mathbb{N}$, и, значит, $\xi \in \Lambda(\hat{x})$. С другой стороны, u не содержит ни одного члена последовательности $\hat{x}$ и поэтому $\xi \notin \Lambda(\hat{x})$. Полученное противоречие доказывает первое утверждение предложения, а второе утверждение очевидно. ▶

Пусть $(V_x : x \in X)$ — семейство систем окрестностей в множестве X. Очевидно, это семейство определяет операцию однозначного предела тогда и только тогда, когда для любых $x \neq y$ из X и $\hat{z} \in X^{\mathbb{N}}$ существует $v \in V_x \cup V_y$, вне которого находится бесконечное число членов последовательности $\hat{z}$. Заметим еще, что в пространстве (X, Λ) с операцией предела Λ, определенной семейством $(V_x : x \in X)$, каждая стационарная последовательность имеет один предел тогда и только тогда, когда для каждой точки x пересечение всех ее окрестностей из V_x содержит лишь x. Это условие равносильно тому, что для каждых $x \neq y$ из X существуют такие $v_x \in V_x$ и $v_y \in V_y$, что $x \notin v_y$ и $y \notin v_x$.

Предложение 1.14. *Пусть $x \neq y$ — точки пространства с операцией однозначного предела (X, λ). Если каждая из точек x и y имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, то эти точки имеют непересекающиеся окрестности.*

◀ Пусть $V_x = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $V_y = \{v'_n : n \in \mathbb{N}\}$ — фундаментальные системы окрестностей точек x и y соответственно. В силу предложения 1.13 можно считать, что $v_k \subset v_n$ и $v'_k \subset v'_n$ для любых $k \geqslant n$. Предположим любые две окрестности точек x и y имеют непустое пересечение. Тогда, в частности, $v_n \cap v'_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $x_n \in v_n \cap v'_n$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в каждом из v_n и v'_n для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $x = \lambda(\hat{x})$, $y = \lambda(\hat{x})$ и, значит, $x = y$. Это противоречит условию $x \neq y$. ▶

§ 2. Подпространства. Прямое произведение пространств

1. Пусть X_1 — непустое подмножество пространства (X, Λ). Отображение $\Lambda_1 : X_1^{\mathbb{N}} \to 2^{X_1}$, определенное формулой $\Lambda_1(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x}) \cap X_1$, $\hat{x} \in X_1^{\mathbb{N}}$, обладает указанными в теореме 1.3 свойствами и, следовательно, является операцией предела в X_1. Пространство (X_1, Λ_1) называется *подпространством* пространства (X, Λ) и указывается записью $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$. Операция предела Λ_1 называется *ограничением* операции предела Λ на X_1. Ясно, что всякая операция предела в X_1 есть ограничение на X_1 некоторой операции предела в X.

Очевидно, что если $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$, $(X_2, \Lambda_2) \subset (X, \Lambda)$ и $X_2 \subset X_1$, то $(X_2, \Lambda_2) \subset (X_1, \Lambda_1)$, а если $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ и $(X_2, \Lambda_2) \subset (X_1, \Lambda_1)$, то $(X_2, \Lambda_2) \subset (X, \Lambda)$.

Пусть $(V_x : x \in X)$ — семейство систем окрестностей в множестве X, а $X_1 \subset X$. Для каждого $x \in X_1$ рассмотрим систему $V'_x = \{v \cap X_1 : v \in V_x\}$ окрестностей точки x в подмножестве X_1. Относительно системы V'_x и семейства $(V'_x : x \in X_1)$ будем говорить, что они *индуцированы* в X_1 системой V_x и семейством $(V_x : x \in X)$ соответственно.

Предложение 1.15. *Пусть $(V_x : x \in X)$ — семейство систем окрестностей в множестве X, определяющее операцию предела Λ, а Λ_1 — ограничение операции предела Λ на непустом $X_1 \subset X$. Тогда семейство $(V'_x : x \in X_1)$ систем окрестностей, индуцированное в X_1 семейством $(V_x : x \in X)$, определяет в X_1 операцию предела Λ_1.* ▶

Теорема 1.9. *Пусть $(U_x : x \in X)$ и $(U'_x : x \in X_1)$ — семейства полных систем окрестностей пространства (X, Λ) и его подпрострнства (X_1, Λ_1) соответственно. Тогда $(U'_x : x \in X_1)$ есть семейство систем окрестностей, индуцированное в X_1 семейством $(U_x : x \in X)$.*

◀ Пусть $u' \in U'_x$ для некоторой точки $x \in X_1$. Обозначим $u = u' \cup (X \setminus X_1)$ и докажем, что $u \in U_x$. Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{x}$ в множестве $X \setminus u = X_1 \setminus u'$. Так как $x \notin \Lambda_1(\hat{x})$, то $x \notin \Lambda(\hat{x})$ и, значит, $u \in U_x$. Однако $u' = u \cap X_1$. Поэтому $U'_x \subset V'_x$, где V'_x — система, индуцированная в X_1 системой U_x. Согласно предложению 1.15, семейство систем окрестностей $(V'_x : x \in X_1)$ определяет в X_1 операцию предела Λ_1. Но тогда $V'_x \subset U'_x$ и, следовательно, $U'_x = V'_x$. ▶

2. Пусть $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$ — семейство пространств с операцией предела, а $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. Для $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ обозначим $\hat{x}_i = pr_i(\hat{x})$, $i \in I$, и отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ определим формулой

$$\Lambda(\hat{x}) = \prod_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x}_i).$$

Легко проверяется, что Λ обладает указанными в теореме 1.3 свойствами и, следовательно, является операцией предела в X.

Операция предела Λ называется произведением семейства операций предела $(\Lambda_i : i \in I)$ и записывается в виде

$$\Lambda = \prod_{i\in I} \Lambda_i.$$

Пространство $(X,\, \Lambda)$ называется *прямым произведением* семейства пространств $((X_i,\, \Lambda_i) : i \in I)$ и записывается в виде

$$(X,\, \Lambda) = \prod_{i\in I} (X_i,\, \Lambda_i).$$

В прямом произведении $(X,\, \Lambda)$ операция предела Λ может быть определена семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, где V_x — система всех $v \subset X$, представимых в виде $v = \prod\limits_{i\in I} u_i$, а u_i — окрестность точки $x_i = pr_i(x)$ в $(X_i,\, \Lambda_i)$, причем $u_i = X_i$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа значений. Система V_x является базой фильтра в X, который может отличаться от полной системы окрестностей точки x в $(X,\, \Lambda)$.

В случае, когда $(X_i,\, \Lambda_i) = (X',\, \Lambda')$ для всех $i \in I$, прямое произведение $(X,\, \Lambda)$ записывается в виде $(X,\, \Lambda) = (X',\, \Lambda')^I$ или $(X,\, \Lambda) = (X',\, \Lambda')^\nu$, где ν — мощность множества I.

Прямое произведение двух пространств $(X_1,\, \Lambda_1)$ и $(X_2,\, \Lambda_2)$ записывается в виде $(X_1,\, \Lambda_1) \times (X_2,\, \Lambda_2)$, а для его операции предела используется обозначение $\Lambda_1 \times \Lambda_2$.

Предложение 1.16. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — прямое произведение конечного или счетного семейства пространств $((X_i,\, \Lambda_i) : i \in I)$, а $x \in X$ и $x_i = pr_i(x)$, $i \in I$. Если для каждого $i \in I$ точка x_i имеет в $(X_i,\, \Lambda_i)$ конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, то x имеет в $(X,\, \Lambda)$ конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, представимых в виде $\prod\limits_{i\in I} u_i$, где u_i — окрестность точки x_i в $(X_i,\, \Lambda_i)$, причем $u_i = X_i$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа значений.*

◀ Рассмотрим случай счетного I и для определенности положим $I = \mathbb{N}$ (в случае конечного I доказательство проводится аналогично). Пусть для каждого $i \in \mathbb{N}$ система $V_{x_i} = \left\{ v_i^{(n)} : n \in \mathbb{N} \right\}$ подмножеств $v_i^{(n)} \subset X_i$ является фундаментальной системой окрестностей точки x_i в $(X_i,\, \Lambda_i)$. С учетом предложения 1.13 можно считать, что $v_i^{(k)} \subset v_i^{(n)}$ при $k \geqslant n$. Рассмотрим систему $V_x = \{v^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ подмножеств $v^{(n)} \subset X$, представимых в виде

$v^{(n)}=\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} u_i^{(n)}$, где $u_i^{(n)}=v_i^{(n)}$ при $1\leqslant i\leqslant n$ и $u_i^{(n)}=X_i$ при $i>n$. Докажем, что V_x является фундаментальной системой окрестностей точки x в (X,Λ). Пусть u — окрестность точки x в (X,Λ). Нужно доказать, что $v^{(n)}\subset u$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$. Предположим противное, т. е. $v^{(n)}\backslash u\neq\varnothing$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Выберем некоторые $x^{(n)}\in v^{(n)}\backslash u$, $n\in\mathbb{N}$, и положим $\hat{x}=(x^{(n)}:n\in\mathbb{N})$. Так как $v^{(k)}\subset v^{(n)}$ при $k\geqslant n$, то $\hat{x}$ почти весь лежит в каждом $v^{(n)}$. Обозначим $x_i^{(n)}=pr_i(x^{(n)})$, $n\in\mathbb{N}$, и рассмотрим последовательность $\hat{x}_i=\bigl(x_i^{(n)}:n\in\mathbb{N}\bigr)\in X_i^{\mathbb{N}}$. Из построения $v^{(n)}$ следует, что $\hat{x}_i$ почти вся лежит в каждом $v_i^{(n)}$, $n\in\mathbb{N}$. Поэтому $x_i\in\Lambda_i(\hat{x}_i)$ для всех $i\in\mathbb{N}$ и, значит, $x\in\Lambda(\hat{x})$. С другой стороны, u не содержит ни одного члена последовательности $\hat{x}$ и, следовательно, $x\notin\Lambda(\hat{x})$, что приводит к противоречию. ►

§ 3. Открытые множества. Внутренность и квазивнутренность. Предельные точки и точки накопления. Замкнутые множества. Замыкание и квазизамыкание. Секвенциальная компактность. Отделимость и хаусдорфовость

Определение 1.4. *В пространстве (X,Λ) множество называется открытым, если оно является своей окрестностью.*

Предложение 1.17. *Система всех открытых подмножеств пространства (X,Λ) совпадает с топологией τ, определенной в X семейством фильтров $(U_x:x\in X)$, где U_x — полная система окрестностей точки x.* ►

Определение 1.5. *В пространстве (X,Λ) окрестность точки (множества), являющаяся открытым множеством, называется открытой окрестностью этой точки (этого множества). Система W_x всех открытых окрестностей точки $x\in X$ называется полной системой открытых окрестностей этой точки, а $V_x\subset W_x$ называется фундаментальной системой открытых окрестностей точки x, если для каждого $w\in W_x$ существует такое $v\in V_x$, что $v\subset w$.*

Замечание 1.3. Пусть W_x — полная система открытых окрестностей точки x пространства (X,Λ). Семейство $(W_x:x\in X)$ полных систем открытых окрестностей, т. е. топология τ всех открытых подмножеств пространства (X,Λ), определяет в X операцию предела Λ', которая может отличаться от Λ. При этом, очевидно, $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Кроме того, независимо от совпадения Λ и Λ', окрестность точки может не содержать открытой окрестности этой точки (см. примеры в начале § 5 и в § 10, n° 6).

Определение 1.6. *В пространстве (X, Λ) точка x называется внутренней (квазивнутренней) точкой множества M, если M содержит открытую окрестность (M является окрестностью) точки x. Множество всех внутренних (квазивнутренних) точек множества M называется его внутренностью (квазивнутренностью) и обозначается через M° (M^-).*

Очевидно, $M^\circ \subset M^- \subset M$ для любого множества M, причм M° открыто. Если M открыто, то $M = M^\circ = M^-$. Обратно, если $M = M^\circ$ или $M = M^-$, то M открыто. Множество M является окрестностью множества G тогда и только тогда, когда $G \subset M^-$.

Определение 1.7. *В пространстве (X, Λ) точка x называется предельной точкой множества M, если $x \in \Lambda(\hat{x})$ для некоторого $\hat{x} \in (M \backslash \{x\})^{\mathbb{N}}$.*

Теорема 1.10. *В пространстве (X, Λ) точка x является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда каждая окрестность этой точки имеет непустое пересечение с $M \backslash \{x\}$.*

◀ Пусть x — предельная точка для M, а $\hat{x}$ — сходящаяся к x последовательность в $M \backslash \{x\}$. Поскольку $\hat{x}$ почти вся лежит в каждой окрестности точки x, каждая окрестность этой точки имеет непустое пересечение с $M \backslash \{x\}$. Обратно, пусть каждая окрестность точки x пересекается с $M \backslash \{x\}$. Так как множество $X \backslash (M \backslash \{x\})$ содержит x и не пересекается с $M \backslash \{x\}$, то оно не является окрестностью точки x. Поэтому, согласно теореме 1.1 или 1.2, $x \in \Lambda(\hat{x})$ для некоторого $\hat{x} \in (M \backslash \{x\})^{\mathbb{N}}$. ▶

Определение 1.8. *В пространстве (X, Λ) точка x называется точкой накопления множества M, если каждая открытая окрестность этой точки имеет непустое пересечение с $M \backslash \{x\}$.*

Предельная точка множества является его точкой накопления, но обратное утверждение не верно (см. примеры в начале § 5 и в § 10, n° 6).

Определение 1.9. *В пространстве (X, Λ) множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки.*

Пересечение любой системы и объединение конечной системы замкнутых множеств замкнуты.

Теорема 1.11. *В пространстве* (X, Λ) *для множества* M *следующие условия попарно эквивалентны:*

1) M *замкнуто;*

2) $X \backslash M$ *открыто;*

3) M *содержит все свои точки накопления.*

◀ Если M замкнуто, то в силу теоремы 1.2 $X \backslash M$ является своей окрестностью и, значит, открыто. Если $X \backslash M$ открыто, то M содержит все свои точки накопления. Если же M содержит все свои точки накопления, то оно содержит также все свои предельные точки и, значит, замкнуто. ▶

Определение 1.10. *В пространстве* (X, Λ) *пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество* M, *называется замыканием, а объединение* M *с множеством его предельных точек называется квазизамыканием множества* M *и обозначаются соответственно через* $\overline{M}$ *и* M^+.

Так как носитель пространства замкнут, то замыкание множества существует и замкнуто. Однако квазизамыкание множетсва может не быть замкнутым. Очевидно, $M^+ \subset \overline{M}$, причем если M замкнуто, то $M = M^+ = \overline{M}$. Обратно, если $M = M^+$ или $M = \overline{M}$, то M замкнуто.

Теорема 1.12. *В пространстве* (X, Λ) *замыкание множества* M *совпадает с объединением* M *и множества его точек накопления. Кроме того, имеют место равенства*

$$(X \backslash M)^\circ = X \backslash \overline{M}, \qquad \overline{X \backslash M} = X \backslash M^\circ,$$

$$(X \backslash M)^- = X \backslash M^+, \qquad (X \backslash M)^+ = X \backslash M^-.$$

◀ Пусть H — объединение множества M с множеством его точек накопления. Докажем, что $H = \overline{M}$. С этой целью сначала докажем, что H замкнуто. Пусть $x \notin M$ — предельная точка множества H, а v — открытая окрестность точки x. Тогда $v \cap H \neq \varnothing$. Рассмотрим некоторое $y \in v \cap H$. Очевидно, что либо $y \in v \cap M$, либо $y \in v \cap H \backslash M$. Во втором случае y является точкой накопления множества M, а v — открытой окрестностью точки y. Поэтому $v \cap M \neq \varnothing$. Тем самым в обоих случаях v имеет непустое пересечение с M и, значит, x является точкой накопления множества M. Тогда $x \in H$, согласно определению H. Тем самым H содержит все свои предельные точки и, следовательно, замкнуто. Отсюда получаем, что $\overline{M} \subset H$. Однако, очевидно, $\overline{M}$ содержит M и все его точки накопления, т. е. $H \subset \overline{M}$. В силу полученных включений имеет место равенство $H=\overline{M}$. Остальные утверждения очевидны. ▶

Замечание 1.4. В силу теоремы 1.2, если в пространстве (X, Λ) точка x_0 и последовательность $\hat{x}$ такие, что $x_0 \notin \Lambda(\hat{x})$, то $x_0 \notin [\hat{x}']^+$ для некоторого $\hat{x}' \prec \hat{x}$. В (X, Λ) топология τ всех открытых множеств есть система $\tau = \{X \setminus \overline{M} : M \subset X\}$, а множество u является окрестностью точки x тогда и только тогда, когда $x \notin (X \setminus u)^+$.

Замечание 1.5. В пространстве (X, Λ) замыкание множества M может быть получено также последовательным применением операции квазизамыкания. Это делается следующим образом (в связи с этим см. [55], с. 367—384). Обозначим $M_0 = M$, $M_1 = M_0^+$ и $M_{n+1} = M_n^+$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть ω — первое порядковое число (см. [55], с. 348—366), следующее за всеми натуральными числами (т. е. за всеми порядковыми числами из первого числового класса), а Ω — первое порядковое число, следующее за всеми порядковыми числами из второго числового класса. Положим $M_\omega = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n$, $M_{\omega+1} = M_\omega^+$ и продолжим дальше применение операции квазизамыкания. Пусть s $(\omega < s \leqslant \Omega)$ — некоторое порядковое число. Предположим для любого $\alpha < s$ множество M_α определено. Если для s не существует непосредственно предшествующего порядкового числа, то полагаем $M_s = \bigcup\limits_{\alpha < s} M_\alpha$, а если $s = \nu + 1$, то полагаем $M_s = M_\nu^+$. Указанным способом множество M_s определяется для любого $s \leqslant \Omega$. Поскольку для Ω не существует непосредственно предшествующего порядкового числа, $M_\Omega = \bigcup\limits_{s < \Omega} M_s$. Имеет место равенство $M_\Omega = \overline{M}$. Действительно, с использованием трансфинитной индукции доказывается, что $M_\alpha \subset M_\nu$ и $M_\nu \subset \overline{M}$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu \leqslant \Omega$. В частности, $M_\Omega \subset \overline{M}$. Пусть $x \in X$ — предельная точка множества M_Ω, а $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность в M_Ω, для которой $x \in \Lambda(\hat{x})$. Имеем, что $x_n \in M_{s_n}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $s_n < \Omega$. Кроме того, если s — первое порядковое число, следующее за всеми s_n, $n \in \mathbb{N}$, то $s < \Omega$. Однако $x_n \in M_s$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $x \in M_s^+ = M_{s+1} \subset M_\Omega$. А это означает, что множество M_Ω замкнуто и поэтому $M_\Omega = \overline{M}$.

Это замечание с учетом трансфинитной индукции может быть использовано для доказательства некоторых утверждений относительно замыкания множества, если аналогичные утверждения верны для квазизамыкания.

В пространстве (X, Λ) для любой точки x и любой последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, не обладающей сходящейся подпоследовательностью, имеют место равенства $\{x\}^+ = \Lambda(\dot{x})$ и $[\hat{x}]^+ = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Lambda(\dot{x}_n)$.

Предложение 1.18. *Для пространства (X, Λ) следующие условия попарно эквивалентны:*

1) стационарная последовательность имеет один предел;

2) одноточечное множество замкнуто;

3) каждые две точки $x \neq y$ имеют такие окрестности u_x и u_y, что $x \notin u_y$ и $y \notin u_x$;

4) каждые две точки $x \neq y$ имеют такие открытые окрестности v_x и v_y, что $x \notin v_y$ и $y \notin v_x$;

5) пересечение всех окрестностей точки содержит только эту точку;

6) пересечение всех открытых окрестностей точки содержит только эту точку. ▶

Предложение 1.19. *Пусть в пространстве (X, Λ) стационарная последовательность имеет один предел. Тогда в нем*

а) конечное множество замкнуто и не имеет точек накопления;

б) если последовательность $\hat{x}$ не обладает сходящейся подпоследовательностью, то $[\hat{x}]$ замкнуто и не имеет точек накопления;

в) если последовательность $\hat{x}$ такая, что $[\hat{x}]$ имеет предельную точку, то $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к этой предельной точке;

г) если последовательность $\hat{x}$ такая, что $[\hat{x}]$ имеет точку накопления, то $\hat{x}$ обладает сходящейся подпоследовательностью (она может не сходиться к этой точке накопления);

д) окрестность предельной точки множества содержит бесконечное число точек этого множества;

е) открытая окрестность точки накопления множества содержит бесконечное число точек этого множества. ▶

Предложение 1.20. *В пространстве с операцией однозначного предела (X, λ)*

а) если последовательность $\hat{x}$ сходится к x, то $[\hat{x}] \cup \{x\}$ замкнуто, причем если $[\hat{x}]$ бесконечно, то x является его единственной точкой накопления;

б) если каждое счетное подмножество множества M, обладающее предельной точкой в X, имеет точку накопления в M, то M замкнуто. ▶

Теорема 1.13. *Если в пространстве* (X, Λ) *последовательность* $\hat{x}$ *является частой в каждой окрестности точки* x, *то* $\hat{x}$ *обладает подпоследовательностью, сходящейся к* x.

◀ Пусть $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$. Очевидно, что если $x \in \Lambda(\dot{x}_{i_n})$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и некоторой последовательности натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, то подпоследовательность $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{x}$ сходится к x. Поэтому рассмотрим случай, когда $x \notin \Lambda(\dot{x}_n)$ для всех $n \geqslant k$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\hat{y} \prec \hat{x}$ — подпоследовательность, получаемая из $\hat{x}$ удалением первых k членов. Ясно, что $\hat{y}$ является частой в каждой окрестности точки x и, кроме того, $x \notin [\hat{y}]$. Согласно теореме 1.10, x является предельной точкой для $[\hat{y}]$. Следовательно, существует последовательность $\hat{\xi}$ в $[\hat{y}]$, сходящаяся к x. Так как $\hat{\xi}$ не обладает стационарной подпоследовательностью, то обладает подпоследовательностью $\hat{x}'$, которая является также подпоследовательностью для $\hat{y}$, а следовательно, и для $\hat{x}$. Ясно, что $\hat{x}'$ сходится к x. ▶

Теорема 1.14. *Пусть* M *— множество в пространстве* (X, Λ), *а* E_M *— система всех конечных или счетных подмножеств множества* M. *Тогда*

$$M^+ = \bigcup\{K^+ : K \in E_M\}, \quad \overline{M} = \bigcup\{\overline{K} : K \in E_M\}.$$

◀ Первое равенство очевидно. Докажем второе равенство. Ясно, что

$$M = \bigcup\{K : K \in E_M\} \subset \bigcup\{\overline{K} : K \in E_M\} = H \subset \overline{M}.$$

Предположим $\overline{M} \neq H$. Тогда в силу $M \subset H \subset \overline{M}$ множество H не замкнуто и обладает некоторой предельной точкой $x_0 \in \overline{M} \setminus H$. Пусть $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность в H, сходящаяся к x_0. Так как $x_n \in \overline{K}_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и некоторого $K_n \in E_M$, то $x_0 \in \overline{M}_0$ для $M_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{K}_n$. Обозначим $K_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Очевидно, $K_0 \in E_M$. Из $K_0 \subset M_0$ следует, что $\overline{K}_0 \subset \overline{M}_0$. Однако $\overline{K}_n \subset \overline{K}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $M_0 \subset \overline{K}_0$. Отсюда получаем $\overline{M}_0 \subset \overline{K}_0$ и, значит, $\overline{M}_0 = \overline{K}_0$. Из $x_0 \in \overline{M}_0$ вытекает $x_0 \in \overline{K}_0 \subset H$. А это противоречит условию $x_0 \notin H$. Следовательно, $\overline{M} = H$. ▶

Следствие 1.2. *Пусть* M *— множество в пространстве* (X, Λ), *а* $x \in \overline{M}$. *Тогда существует такое конечное или счетное* $K \subset M$, *что* $x \in \overline{K}$. ▶

Укажем характеристические свойства операций замыкания и квазизамыкания в пространстве с операцией предела последовательности.

Теорема 1.15. *Отображение $M \mapsto M^+$ множества 2^X в себя является операцией квазизамыкания в некотором (притом единственном) пространстве $(X,\,\Lambda)$ тогда и только тогда, когда оно обладает свойствами*

1) $\varnothing^+ = \varnothing$;   2) $M \subset M^+$;   3) $(M \cup G)^+ = M^+ \cup G^+$;

4) для каждого $x \in M^+ \backslash M$ существует такое $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$, что $x \in [\hat{x}']^+$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

◀ Свойства 1)—4) операции квазизамыкания очевидны. Докажем обратное утверждение. Пусть отображение $M \mapsto M^+$ множества 2^X в себя обладает свойствами 1)—4). Для каждого $x \in X$ обозначим через U_x множество таких $u \subset X$, что $x \notin (X \backslash u)^+$. Из свойства 1) указанного отображения следует, что $X \in U_x$, а в силу 2) $x \in u$ для любого $u \in U_x$. Из свойства 3) вытекает, что если $u \in U_x$ и $u \subset v$, то $v \in U_x$ и, кроме того, пересечение конечного числа множеств из U_x принадлежит U_x. Тем самым U_x является фильтром в X. Рассматривая U_x как систему окрестностей точки x, при помощи семейства $(U_x : x \in X)$ систем окрестностей определим в X операцию предела Λ. В пространстве $(X,\,\Lambda)$ квазизамыкние множества M обозначим через H и покажем, что $H = M^+$. Если $M = M^+$, то, согласно построению семейства $(U_x : x \in X)$, множество $X \backslash M$ является своей окрестностью и, следовательно, M замкнуто в $(X,\,\Lambda)$. А это означает, что $M = H$ и поэтому $H = M^+$. Рассмотрим теперь случай $M \neq M^+$. Пусть $x \in M^+$. Если $x \in M$, то $x \in H$. Если же $x \in M^+ \backslash M$, то в силу свойства 4) существует такое $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$, что $x \in [\hat{x}']^+$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Отсюда с учетом способа построения U_x следует, что $X \backslash [\hat{x}'] \notin U_x$. Поскольку U_x является фильтром, каждое $u \in U_x$ имеет непустое пересечение с $[\hat{x}']$. Поэтому $\hat{x}$ почти весь лежит в u и, следовательно, $x \in \Lambda(\hat{x})$. Тем самым $x \in H$ и, значит, $M^+ \subset H$. Пусть $y \in X \backslash M^+$. Очевидно, $X \backslash M \in U_y$. Поэтому $y \notin H$ и, следовательно, $H \subset M^+$. Из доказанных включений получаем равенство $H = M^+$. Таким образом, рассматриваемое отображение является операцией квазизамыкания в $(X,\,\Lambda)$, причем U_x является полной системой окрестностей точки x этого пространства. Поскольку с учетом замечания 1.4 полная система окрестностей произвольной точки определяется однозначно по операции квазизамыкания, рассматриваемое отображение может служить операцией квазизамыкания лишь в построенном пространстве $(X,\,\Lambda)$. ▶

Теорема 1.16. *В пространстве с операцией предела последовательности операция замыкания обладает свойствами*

1) $\overline{\varnothing} = \varnothing$; *2)* $M \subset \overline{M}$; *3)* $\overline{M \cup G} = \overline{M} \cup \overline{G}$; *4)* $\overline{(\overline{M})} = \overline{M}$;

5) при $M \neq \overline{M}$ *существуют такие* $x \in \overline{M} \setminus M$ *и* $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$, *что* $x \in \overline{[\hat{x}']}$ *для любого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Обратно, если отображение $M \mapsto \overline{M}$ *множества* 2^X *в себя обладает свойствами 1)—5), то оно является операцией замыкания в некотором (притом единственном) пространстве* (X, Λ), *таком, что операция предела* Λ *определяется топологией всех открытых подмножеств этого пространства.*

◀ Свойства 1)—5) операции замыкания очевидны. Докажем обратное утверждение. Пусть отображение $M \mapsto \overline{M}$ множества 2^X в себя обладает свойствами 1)—5). Рассмотрим систему $\tau = \{X \setminus \overline{M} : M \subset X\}$ подмножеств множества X, которая в силу свойств 1)—4) указанного отображения является топологией в X. Каждое множество из τ примем как открытое множество и при помощи топологии τ открытых множеств определим в X операцию предела Λ. В пространстве (X, Λ) замыкание множества M обозначим через H и покажем, что $H = \overline{M}$. Очевидно, $\overline{M}$ замкнуто в (X, Λ). Поэтому $M \subset H \subset \overline{M}$. Отсюда с учетом свойств 3) и 4) рассматриваемого отображения вытекает, что $\overline{H} = \overline{M}$. Предположим $H \neq \overline{M}$. Тогда в силу свойства 5) существуют такие $x \in \overline{M} \setminus H$ и $\hat{x} \in H^{\mathbb{N}}$, что $x \in \overline{[\hat{x}']}$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Из способа построения τ следует, что каждое $v \in \tau$, содержащее x, имеет непустое пересечение с $[\hat{x}']$. Поэтому $\hat{x}$ почти весь лежит в v и, следовательно, $x \in \Lambda(\hat{x})$. Но тогда $x \in H$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает равенство $H = \overline{M}$. Таким образом, рассматриваемое отображение является операцией замыкания в (X, Λ), причем τ является топологией всех открытых подмножеств этого пространства. ▶

Понятие предельной точки множества инвариантно относительно подпространств. Однако понятие точки накопления множества не инвариантно относительно подпространств (см. пример в § 10, n° 6).

Предложение 1.21. *В пространстве* (X, Λ) *точка* x *является предельной точкой множества* M *тогда и только тогда, когда в подпространстве с носителем* $X_1 = M \cup \{x\}$ *она является точкой накопления для* M.

◀ Если x не является предельной точкой для M, то в подпространстве с носителем X_1 одноточечное множество $\{x\}$ открыто и не пересекается с $M\backslash\{x\}$. А это означает, что x не является точкой накопления для M в указанном подпространстве. ▶

Предложение 1.22. *Пусть подпространство* $(X_1, \Lambda_1)\subset\subset(X, \Lambda)$ *открыто (замкнуто) в* (X, Λ). *Если подмножество* $M\subset X_1$ *открыто (замкнуто) в* (X_1, Λ_1), *то оно открыто (замкнуто) в* (X, Λ).

◀ Пусть X_1 открыто в (X, Λ), а M открыто в (X_1, Λ_1). Докажем, что $M\cap\Lambda(\hat{x})=\varnothing$ для любого $\hat{x}\in(X\backslash M)^{\mathbb{N}}$. Если $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{x}'$ в $X\backslash X_1$, то в силу замкнутости $X\backslash X_1$ в (X, Λ) имеем $\Lambda(\hat{x})\subset\Lambda(\hat{x}')\subset X\backslash X_1$. Отсюда с учетом $M\subset X_1$ следует, что $M\cap\Lambda(\hat{x})=\varnothing$. Если же последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в $X_1\backslash M$, то удалением из $\hat{x}$ конечного числа членов получаем подпоследовательность $\hat{y}$ в $X_1\backslash M$. Однако в силу предложения 1.6 $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{y})$. Поэтому $\Lambda_1(\hat{y})=\Lambda(\hat{x})\cap X_1$. Так как M открыто в (X_1, Λ_1), то $M\cap\Lambda_1(\hat{y})=\varnothing$. Но тогда $M\cap\Lambda(\hat{x})=\varnothing$. Следовательно, M открыто в (X, Λ).

Если же X_1 замкнуто в (X, Λ), а M замкнуто в (X_1, Λ_1), то для любого $\hat{x}\in M^{\mathbb{N}}$ в силу $\Lambda(\hat{x})\subset X_1$, $\Lambda_1(\hat{x})\subset M$ и $\Lambda_1(\hat{x})=\Lambda(\hat{x})\cap X_1=\Lambda(\hat{x})$ получаем $\Lambda(\hat{x})\subset M$, т. е. замкнутость множества M в (X, Λ). ▶

Теорема 1.17. *Пусть* τ *и* τ_1 *— топологии всех открытых множеств в пространстве* (X, Λ) *и в его подпространстве* (X_1, Λ_1) *соответственно, а* τ' *— топология, индуцированная в* X_1 *топологией* τ. *Если подмножество* $G\subset X$ *открыто (замкнуто) в* (X, Λ), *то* $G\cap X_1$ *открыто (замкнуто) в* (X_1, Λ_1) *и, значит,* $\tau'\subset\tau_1$. *Кроме того, если в* (X, Λ) *замыкание и квазизамыкание подмножества* $M\subset X_1$ *обозначить через* $\overline{M}$ *и* M^+, *а в* (X_1, Λ_1) *— через* $\overline{(M)}_1$ *и* $(M)_1^+$, *то* $(M)_1^+=M^+\cap X_1$ *и* $\overline{(M)}_1\subset\overline{M}\cap X_1$. *При этом если* X_1 *открыто или замкнуто в* (X, Λ), *то* $\tau'=\tau_1$ *и* $\overline{(M)}_1=\overline{M}\cap X_1$.

◀ В случае замкнутого в (X, Λ) множества G замкнутость $G\cap X_1$ в (X_1, Λ_1) очевидна. А в случае открытого в (X, Λ) множества G из равенства $X_1\backslash(G\cap X_1)=(X\backslash G)\cap X_1$ и замкнутости его правой части в (X_1, Λ_1) следует, что $G\cap X_1$ открыто в (X_1, Λ_1) (это следует также непосредственно из теоремы 1.9).

Для подмножества $M\subset X_1$ равенство $(M)_1^+=M^+\cap X_1$ очевидно, а $\overline{(M)}_1\subset\overline{M}\cap X_1$ следует из включения $M\subset\overline{M}\cap X_1$ и замкнутости его правой части в (X_1, Λ_1).

Далее воспользуемся предложением 1.22. Если X_1 открыто в (X, Λ) и $v \in \tau_1$, то v открыто в (X, Λ). Следовательно, $\tau' = \tau_1$. Если же X_1 замкнуто в (X, Λ) и $v \in \tau_1$, то $X_1 \setminus v$ замкнуто в (X, Λ). Но тогда множество $w = X \setminus (X_1 \setminus v) = (X \setminus X_1) \cup v$ открыто в (X, Λ) и $w \cap X_1 = v$. Поэтому $\tau' = \tau_1$.

Пусть $M \subset X_1$. Если X_1 открыто в (X, Λ), то открытое в (X_1, Λ_1) множество $X_1 \setminus \overline{(M)}_1$ открыто в (X, Λ). Поэтому множество $H = X \setminus (X_1 \setminus \overline{(M)}_1) = (X \setminus X_1) \cup \overline{(M)}_1$ замкнуто в (X, Λ), причем $H \cap X_1 = \overline{(M)}_1$. Но тогда из $M \subset H$ следует, что $\overline{M} \subset H$ и $\overline{M} \cap X_1 \subset \overline{(M)}_1$. Так как $\overline{(M)}_1 \subset \overline{M}$, то $\overline{(M)}_1 = \overline{M} \cap X_1$. Если же X_1 замкнуто в (X, Λ), то $\overline{(M)}_1$ замкнуто в (X, Λ). Поэтому $\overline{(M)}_1 = \overline{M} = \overline{M} \cap X_1$. ▶

Теорема 1.18. *Пусть (X, Λ) — прямое произведение семейства пространств $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$, а τ и τ_i — топологии всех открытых подмножеств пространств (X, Λ) и (X_i, Λ_i) соответственно. Тогда*

$$\prod_{i \in I} \tau_i \subset \tau, \tag{1}$$

$$\tau_i = \{pr_i(v) : v \in \tau\} = \{v_i \subset X_i : pr_i^{-1}(v_i) \in \tau\}, \tag{2}$$

а если $(U_x : x \in X)$ и $\big(U_{x_i}^{(i)} : x_i \in X_i\big)$ — семейства полных систем окрестностей пространств (X, Λ) и (X_i, Λ_i) соответственно, то

$$U_{x_i}^{(i)} = \{pr_i(u) : u \in U_x\} = \{u_i \subset X_i : pr_i^{-1}(u_i) \in U_x\}, \tag{3}$$

где $x \in X$ — произвольная точка, для которой $pr_i(x) = x_i$.

◀ Для каждого $x \in X$ обозначим через V_x произведение семейства фильтров $\big(U_{x_i}^{(i)} : i \in I\big)$, где $x_i = pr_i(x)$. Так как семейство фильтров $(V_x : x \in X)$ определяет в X операцию предела Λ, то $V_x \subset U_x$ для всех $x \in X$. Отсюда следует, что топология τ' в X, определенная семейством фильтров $(V_x : x \in X)$, содержится в τ, поскольку топология τ определяется семейством фильтров $(U_x : x \in X)$. Однако $\prod\limits_{i \in I} \tau_i \subset \tau'$, так как для каждого $i \in I$ топология τ_i определяется семейством фильтров $\big(U_{x_i}^{(i)} : x_i \in X_i\big)$. Поэтому имеет место (1).

Докажем (2). Пусть $v \in \tau$ и $v_i = pr_i(v)$, $i \in I$. Допустим $v_i \notin \tau_i$ для некоторого $i \in I$. Тогда найдутся такие $x_i \in v_i$ и $\hat{x}_i \in (X_i \setminus v_i)^{\mathbb{N}}$, что $x_i \in \Lambda_i(\hat{x}_i)$. Рассмотрим $x \in v$ и $\hat{x} \in (X \setminus v)^{\mathbb{N}}$, для которых $pr_i(x) = x_i$, $pr_i(\hat{x}) = \hat{x}_i$ и $pr_{i'}(\hat{x}) = \dot{x}_{i'}$ при всех $i' \in I$, $i' \neq i$, где $x_{i'} = pr_{i'}(x)$. Очевидно, $x \in \Lambda(\hat{x})$ и, значит, $v \notin \tau$. Полученное противоречие доказывает, что $v_i \in \tau_i$ для всех $i \in I$. Отсюда и из (1) следует (2). Равенства (3) доказываются аналогично. ▶

Теорема 1.19. *Пусть (X, Λ) — прямое произведение семейства пространств $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$, а G_i для каждого $i \in I$ — замкнутое множество в (X_i, Λ_i). Тогда произведение $G = \prod\limits_{i \in I} G_i$ замкнуто в (X, Λ). Кроме того, для семейства произвольных подмножеств $M_i \subset X_i$, $i \in I$, имеют место*

$$\Big(\prod_{i \in I} M_i\Big)^+ = \prod_{i \in I} M_i^+, \tag{4}$$

$$\overline{\prod_{i \in I} M_i} \subset \prod_{i \in I} \overline{M}_i, \tag{5}$$

причем если I конечно или счетно, то

$$\overline{\prod_{i \in I} M_i} = \prod_{i \in I} \overline{M}_i. \tag{6}$$

◀ Пусть x — предельная точка множества G, а $\hat{x}$ — последовательность в G, для которой $x \in \Lambda(\hat{x})$. Для каждого $i \in I$ обозначим $x_i = pr_i(x)$ и $\hat{x}_i = pr_i(\hat{x})$. Очевидно, $\hat{x}_i \in G_i^{\mathbb{N}}$, причем $x_i \in \Lambda_i(\hat{x}_i)$. В силу замкнутости G_i в (X_i, Λ_i) имеем $x_i \in G_i$. Поэтому $x \in G$ и, следовательно, G замкнуто в (X, Λ).

Равенство (4) доказывается при помощи аналогичных рассуждений, а из очевидного включения $\prod\limits_{i \in I} M_i \subset \prod\limits_{i \in I} \overline{M}_i$ и замкнутости его правой части в (X, Λ) следует (5).

Докажем (6) в предположении, что I конечно или счетно. Воспользуемся замечанием 1.5. Пусть Ω — первое порядковое число, следующее за всеми порядковыми числами из второго числового класса. Для каждого $i \in I$ и произвольного $s \leqslant \Omega$ подмножество $M_{is} \subset X_i$ определим следующим образом. Положим $M_{i0} = M_i$ и рассмотрим некоторое порядковое число s $(1 \leqslant s \leqslant \Omega)$. Предположим для всех $\alpha < s$ множества $M_{i\alpha}$ определены. Тогда если $s = \nu + 1$, то полагаем $M_{is} = M_{i\nu}^+$, а если для s не существует непосредственно предшествующего порядкового числа, то полагаем $M_{is} = \bigcup\limits_{\alpha<s} M_{i\alpha}$. Обозначим

$$H = \prod_{i\in I} M_i. \tag{7}$$

Положим $H_0 = H$ и для произвольного $s \leqslant \Omega$ множество H_s определим по аналогии с M_{is}. Очевидно, при $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu \leqslant \Omega$ имеют место включения

$$M_{i\alpha} \subset M_{i\nu}, \quad H_\alpha \subset H_\nu, \tag{8}$$

причем с учетом замечания 1.5

$$M_{i\Omega} = \overline{M}_i, \quad H_\Omega = \overline{H}. \tag{9}$$

Включение (5) и равенство (7) запишем соответственно в виде

$$H_\Omega \subset \prod_{i\in I} M_{i\Omega}, \tag{10}$$

$$H_0 = \prod_{i\in I} M_{i0}. \tag{11}$$

Требуемое равенство (6) эквивалентно равенству

$$H_\Omega = \prod_{i\in I} M_{i\Omega}. \tag{12}$$

Равенство (12) докажем сначала для конечного I. С использованием трансфинитной индукции докажем, что если для некоторого порядкового числа s $(1 \leqslant s \leqslant \Omega)$ равенство

$$H_\alpha = \prod_{i\in I} M_{i\alpha} \tag{13}$$

верно при всех $\alpha < s$, то оно верно и при $\alpha = s$. Если $s = \nu + 1$, то из (13) при $\alpha = \nu$ с учетом (4) имеем

$$H_s = H_{\nu+1} = H_\nu^+ = \Big(\prod_{i\in I} M_{i\nu}\Big)^+ = \prod_{i\in I} M_{i\nu}^+ = \prod_{i\in I} M_{i,\nu+1} = \prod_{i\in I} M_{is}.$$

Если же для s не существует непосредственно предшествующего порядкового числа, то в силу первого из включений (8) и конечности I имеет место $\bigcup\limits_{\alpha<s} \prod\limits_{i\in I} M_{i\alpha} = \prod\limits_{i\in I} \bigcup\limits_{\alpha<s} M_{i\alpha}$. Учитывая это, из (13) получим

$$H_s = \bigcup_{\alpha<s} H_\alpha = \bigcup_{\alpha<s} \prod_{i\in I} M_{i\alpha} = \prod_{i\in I} \bigcup_{\alpha<s} M_{i\alpha} = \prod_{i\in I} M_{is}.$$

Тем самым (13) верно также для $\alpha = s$. Отсюда с учетом (11) следует справедливость (13) для всех $\alpha \leqslant \Omega$. В частности, имеет место (12).

Докажем равенство (12) в случае счетного I. Для определенности положим $I = \mathbb{N}$. Сначала докажем, что для произвольного s $(1 \leqslant s \leqslant \Omega)$ справедливо включение

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{\alpha<s} M_{i\alpha} \subset \Big(\bigcup_{\alpha<s} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha}\Big)^{+}. \tag{14}$$

Пусть последовательность $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ есть элемент произведения $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{\alpha<s} M_{i\alpha}$, т. е. $x_i \in \bigcup\limits_{\alpha<s} M_{i\alpha}$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $x_i \in M_{i\alpha_i}$ для некоторого $\alpha_i < s$, причем в силу первого из включений (8) можно считать, что $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ выберем некоторое $x_{i0} \in M_{i0}$ и положим $\hat{x}_n = (x_{in} : i \in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, где

$$x_{in} = \begin{cases} x_i, & i \leqslant n, \\ x_{i0}, & i > n. \end{cases} \tag{15}$$

Очевидно, что $\hat{x}_n \in \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha_n} \subset \bigcup\limits_{\alpha<s} \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Непосредственно из (15) следует, что $(\hat{x}_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к $\hat{x}$ в (X, Λ), т. е. $\hat{x} \in \Big(\bigcup\limits_{\alpha<s} \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha}\Big)^{+}$. Тем самым (14) доказано.

В случае, когда для s не существует непосредственно предшествующего порядкового числа, (14) запишем в виде

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} M_{is} \subset \Big(\bigcup_{\alpha<s} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha}\Big)^{+}. \tag{16}$$

С использованием трансфинитной индукции докажем, что если для некоторого порядкового числа s $(1 \leqslant s \leqslant \Omega)$ включение

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha} \subset H_\alpha^{+} \tag{17}$$

имеет место при всех $\alpha < s$, то оно верно и при $\alpha = s$. Если $s = \nu + 1$, то из (17) при $\alpha = \nu$ с учетом (4) получаем

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} M_{is} = \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i,\nu+1} = \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i\nu}^{+} =$$

$$= \Big(\prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i\nu}\Big)^{+} \subset (H_\nu^{+})^{+} = H_{\nu+1}^{+} = H_s^{+}.$$

Если же для s не существует непосредственно предшествующего порядкового числа, то в силу (16) и (17) имеем

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} M_{is} \subset (\bigcup_{\alpha<s} \prod_{i\in\mathbb{N}} M_{i\alpha})^+ \subset (\bigcup_{\alpha<s} H_\alpha^+)^+ =$$
$$= (\bigcup_{\alpha<s} H_{\alpha+1})^+ = (\bigcup_{\alpha<s} H_\alpha)^+ = H_s^+.$$

Тем самым (17) имеет место также для $\alpha = s$. Однако из (11) следует $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} M_{i0} \subset H_0^+$. Поэтому (17) имеет место для всех $\alpha \leqslant \Omega$. В частности, $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} M_{i\Omega} \subset H_\Omega^+ = H_\Omega$. Отсюда в силу (10) и $I = \mathbb{N}$ получаем (12). ▶

Определение 1.11. *В пространстве $(X,\, \Lambda)$ множество M называется секвенциально компактным (секвенциально квазикомпактным), если для каждого $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $M \cap \Lambda(\hat{x}') \neq \varnothing$ $(\Lambda(\hat{x}') \neq \varnothing)$; секвенциально относительно компактным, если $\overline{M}$ секвенциально компактно. Пространство $(X,\, \Lambda)$ называется секвенциально компактным, если X секвенциально компактно.*

Конечное множество секвенциально компактно.

В пространстве $(X,\, \Lambda)$ множество M секвенциально компактно тогда и только тогда, когда подпространство с носителем M секвенциально компактно. Следовательно, понятие секвенциально компактного множества инвариантно относительно подпространств, т. е. если M секвенциально компактно в пространстве $(X,\, \Lambda)$, то оно секвенциально компактно в любом подпространстве, содержащем M.

Секвенциально компактное или секвенциально относительно компактное множество секвенциально квазикомпактно. Однако секвенциально компактное множество может не быть секвенциально относительно компактным (см. пример в § 10, n°13).

Если множество M секвенциально компактно, то секвенциально компактно также любое его подмножество, которое замкнуто в подпространстве с носителем M. Если же множество секвенциально квазикомпактно или секвенциально относительно компактно, то соответствующим свойством обладает любое его подмножество.

Предложение 1.23. *В пространстве с операцией однозначного предела секвенциально компактное множество замкнуто.* ▶

Теорема 1.20. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — прямое произведение семейства пространств $((X_i,\, \Lambda_i) : i \in I)$. Если в $(X,\, \Lambda)$ множество M секвенциально компактно, секвенциально квазикомпактно* *или секвенциально относительно компактно, то для каждого $i \in I$ соответствующим свойством обладает и проекция $pr_i(M)$ в (X_i, Λ_i), причем если M секвенциально квазикомпактно, то $pr_i(M^+) = (pr_i(M))^+$, а если M секвенциально относительно компактно, то $pr_i(\overline{M}) = \overline{pr_i(M)}$. Обратно, если I конечно или счетно, а для каждого $i \in I$ проекция $pr_i(M)$ секвенциально компактна, секвенциально квазикомпактна или секвенциально относительно компактна в (X_i, Λ_i), то соответствующим свойством обладает также M в (X, Λ).*

◀ Пусть $M \subset X$. Из теоремы 1.19 следует, что

$$pr_i(M^+) \subset (pr_i(M))^+, \quad pr_i(\overline{M}) \subset \overline{pr_i(M)}, \quad i \in I. \tag{18}$$

Предположим множество M секвенциально квазикомпактно в (X, Λ). Для некоторого $i \in I$ рассмотрим проекцию $pr_i(M)$ и в ней последовательность $\hat{x}_i$. Выберем $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ так, чтобы $pr_i(\hat{x}) = \hat{x}_i$. В силу секвенциальной квазикомпактности M существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $\Lambda(\hat{x}') \neq \varnothing$. Тогда для последовательности $\hat{x}'_i = pr_i(\hat{x}')$ имеем $\hat{x}'_i \prec \hat{x}_i$ и $\Lambda_i(\hat{x}'_i) = pr_i(\Lambda(\hat{x}')) \neq \varnothing$. Следовательно, $pr_i(M)$ секвенциально квазикомпактно. Однако если $\Lambda(\hat{x}') \cap M \neq \varnothing$, то $\Lambda_i(\hat{x}'_i) \cap pr_i(M) \neq \varnothing$. Поэтому из секвенциальной компактности M следует секвенциальная компактность проекции $pr_i(M)$. Поскольку $\Lambda_i(\hat{x}_i) \subset pr_i(\Lambda(\hat{x}'))$, имеет место включение $(pr_i(M))^+ \subset pr_i(M^+)$, которое вместе с первым из включений (18) влечет $pr_i(M^+) = (pr_i(M))^+$. Из этого равенства следует, что если M замкнуто в (X, Λ), то $pr_i(M)$ замкнуто в (X_i, Λ_i).

Предположим теперь, что M секвенциально относительно компактно в (X, Λ). Тогда $\overline{M}$ замкнуто и секвенциально компактно. Поэтому для каждого $i \in I$ проекция $pr_i(\overline{M})$ замкнута в (X_i, Λ_i). Отсюда и из $pr_i(M) \subset pr_i(\overline{M})$ следует включение $\overline{pr_i(M)} \subset pr_i(\overline{M})$, которое вместе со вторым из включений (18) влечет $pr_i(\overline{M}) = \overline{pr_i(M)}$. Из этого равенства и секвенциальной компактности $pr_i(\overline{M})$ следует секвенциально относительная компактность $pr_i(M)$ в (X_i, Λ_i).

Докажем обратное утверждение теоремы. Рассмотрим случай счетного I и для определенности положим $I = \mathbb{N}$ (в случае конечного I доказательство проводится аналогично). Пусть $M \subset X$ такое, что каждая его проекция $pr_i(M)$, $i \in \mathbb{N}$, секвенциально квазикомпактна в (X_i, Λ_i). Докажем, что M секвенциально квазикомпактно в (X, Λ). Рассмотрим некоторое $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$. В силу секвенциальной квазикомпактности каждого $pr_i(M)$, $i \in \mathbb{N}$, существует счетное семейство таких подпоследовательностей $\hat{y}^{(\nu)} \prec \hat{x}$, $\nu \in \mathbb{N}$, что $\hat{y}^{(\nu+1)} \prec \hat{y}^{(\nu)}$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$, а для каждого $i \in \mathbb{N}$ последовательность $\hat{y}_i^{(\nu)} = pr_i(\hat{y}^{(\nu)})$ сходится в (X_i, Λ_i) при любом $\nu \geqslant i$. Пусть $\hat{y}^{(\nu)} = (y^{(\nu n)} : n \in \mathbb{N})$, $\nu \in \mathbb{N}$, где $y^{(\nu n)} = \big(y_i^{(\nu n)} : i \in \mathbb{N}\big)$, т. е. $y_i^{(\nu n)} = pr_i(y^{(\nu n)})$. Тогда $\hat{y}_i^{(\nu)} = \big(y_i^{(\nu n)} : n \in \mathbb{N}\big)$. Рассмотрим последовательность $\hat{y} = (y^{(nn)} : n \in \mathbb{N}) \in M^{\mathbb{N}}$. Очевидно, $\hat{y} \prec \hat{x}$ и $(y^{(nn)} : n \geqslant \nu) \prec \hat{y}^{(\nu)}$ для каждого $\nu \in \mathbb{N}$. Обозначим $\hat{y}_i = pr_i(\hat{y})$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда $\hat{y}_i = \big(y_i^{(nn)} : n \in \mathbb{N}\big)$. Так как $\big(y_i^{(nn)} : n \geqslant i\big) \prec \prec \hat{y}_i^{(i)}$, а $\hat{y}_i^{(i)}$ сходится в (X_i, Λ_i), то $\hat{y}_i$ тоже сходится в (X_i, Λ_i). Поэтому $\hat{y}$ сходится в (X, Λ) и, значит, M секвенциально квазикомпактно в (X, Λ). Однако если M такое, что каждое $pr_i(M)$, $i \in \mathbb{N}$, секвенциально компактно в (X_i, Λ_i), то указанная выше последовательность $\hat{y}_i^{(i)}$, а следовательно, и $\hat{y}_i$ имеют предел в $pr_i(M)$. Но тогда $\hat{y}$ имеет предел в M и, следовательно, M секвенциально компактно в (X, Λ). Если же каждое $pr_i(M)$ секвенциально относительно компактно в (X_i, Λ_i), то $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{pr_i(M)}$ замкнуто и секвенциально компактно, а его подмножество M секвенциально относительно компактно в (X, Λ). ▶

Определение 1.12. *Пространство (X, Λ) называется локально секвенциально компактным, если для каждой точки и каждой ее открытой окрестности v существует такая секвенциально относительно компактная открытая окрестность w этой точки, что $\overline{w} \subset v$.*

Из теоремы 1.17 вытекает

Предложение 1.24. *Если пространство (X, Λ) локально секвенциально компактно, а подмножество $X_1 \subset X$ открыто или замкнуто, то подпространство $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ тоже локально секвенциально компактно.* ▶

Определение 1.13. *Пространство (X, Λ) называется отделимым (хаусдорфовым), если в нем любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности (открытые окрестности).*

Хаусдорфово пространство отделимо, а отделимое пространство имеет операцию однозначного предела. Однако отделимое пространство может не быть хаусдорфовым, а пространство с операцией однозначного предела может не быть отделимым (см.

примеры в § 10, n° 7 и n° 8). Любое подпространство отделимого (хаусдорфова) пространства отделимо (хаусдорфово). Прямое произведение любого семейства отделимых (хаусдорфовых) пространств отделимо (хаусдорфово).

Предложение 1.25. *Пространство* (X, Λ) *отделимо (хаусдорфово) тогда и только тогда, когда пересечение квазизамыканий (замыканий) всех окрестностей (открытых окрестностей) точки содержит лишь эту точку.*

◀ Пусть пространство (X, Λ) отделимо, а $x \in X$. Рассмотрим произвольное $y \neq x$ из X. По условию, существуют такие окрестности u_x и u_y точек x и y, что $u_x \cap u_y = \varnothing$. Но тогда в силу теоремы 1.10 $y \notin u_x^+$. Поэтому пересечение квазизамыканий всех окрестностей точки x содержит лишь x.

Пусть, обратно, в (X, Λ) пересечение квазизамыканий всех окрестностей точки содержит лишь эту точку. Рассмотрим произвольные $x \neq y$ из X. По условию, существует такая окрестность u_x точки x, что $y \notin u_x^+$. Отсюда в силу теоремы 1.10 множество $u_y = X \setminus u_x$ является окрестностью точки y, причем $u_x \cap u_y = \varnothing$. Следовательно, (X, Λ) отделимо. Утверждение о хаусдорфовости пространства очевидно. ▶

Определение 1.14. *В пространстве* (X, Λ) *подмножество* $M \subset X$ *называется плотным (секвенциально плотным) в подмножестве* $G \subset X$, *если* $G \subset \overline{M}$ $(G \subset M^+)$. *Если же* $\overline{M} = X$ $(M^+ = X)$, *то* M *называется всюду (секвенциально всюду) плотным. Подножество* $K \subset X$ *называется нигде (секвенциально нигде) не плотным, если* $(\overline{K})^\circ = \varnothing$ $((K^+)^- = \varnothing)$.

Определение 1.15. *В пространстве* (X, Λ) *подмножество называется множеством первой (секвенциально первой) категории, если оно является объединением конечной или счетной системы нигде (секвенциально нигде) не плотных подмножеств. Подножество, не являющееся множеством первой (секвенциально первой) категории, называется множеством второй (секвенциально второй) категории.*

Определение 1.16. *В пространстве* (X, Λ) *подмножество* G *называется сепарабельным (секвенциально сепарабельным), если существует конечное или счетное подмножество* $M \subset G$, *плотное (секвенциально плотное) в* G. *Пространство называется сепарабельным (секвенциально сепарабельным), если оно содержит всюду (секвенциально всюду) плотное конечное или счетное подмножество.*

Секвенциально плотное в G множество плотно в G, а обратное утверждение, вообще говоря, не верно. В общем случае нет определенной связи между понятиями нигде не плотного множества и секвенциально нигде не плотного множества, а свойство сепарабельности или секвенциальной сепарабельности множества не переходит на его подмножество. Однако подпространство полуметризуемого сепарабельного пространства сепарабельно (определение этого пространства дано в § 8 главы II). В рассматриваемых в § 6 пространствах Фреше–Урысона (они общие, чем полуметризуемые пространства) понятия, введенные в каждом из определений 1.14—1.16, эквивалентны.

Докажем следующий вариант *теоремы Бэра* (в связи с этим см. [58], с. 53).

Теорема 1.21. *В пространстве* (X, Λ) *пересечение конечной системы всюду плотных открытых множеств всюду плотно. Если же в* (X, Λ) *для каждой точки и каждой ее открытой окрестности* v *существует такая секвенциально квазикомпактная открытая окрестность* w *этой точки, что* $w^+ \subset v$, *то пересечение счетной системы всюду плотных открытых подмножеств этого пространства всюду плотно и, следовательно,* X *является множеством второй категории.*

◀ Первое утверждение теоремы очевидно, так как в (X, Λ) всюду плотное открытое множество имеет непустое пересечение с любым непустым открытым множеством.

Рассмотрим счетную систему $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ всюду плотных открытых подмножеств $G_n \subset X$, точку $x_0 \in X$ и ее открытую окрестность M_0. Докажем, что $M_0 \bigcap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \varnothing$. Так как G_1 всюду плотно, то существует $x_1 \in G_1 \cap M_0$. По условию, существует такая секвенциально квазикомпактная открытая окрестность M_1 точки x_1, что $M_1^+ \subset G_1 \cap M_0$. Продолжая это рассуждение, при каждом $n \in \mathbb{N}$ получим существование некоторой точки $x_n \in X$ и ее секвенциально квазикомпактной открытой окрестности M_n, для которой $M_n^+ \subset G_n \cap M_{n-1}$. Так как $x_n \in M_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{y}_1 = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\Lambda(\hat{y}_1) \subset M_1^+$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ последовательность $\hat{y}_k = (x_{i_n} : n \geqslant k)$ сходится и $\Lambda(\hat{y}_k) = \Lambda(\hat{y}_1)$. Однако $x_{i_n} \in M_k$ для всех $n \geqslant k$. Поэтому $\Lambda(\hat{y}_1) \subset M_k^+$. Отсюда вытекает, что $\varnothing \neq \Lambda(\hat{y}_1) \subset M_0 \bigcap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$. Значит, x_0 является точкой накопления множества $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n$ и, следовательно, это множество всюду плотно. ▶

§ 4. Секвенциальные топологии

Исследуем свойства топологии всех открытых подмножеств пространства с операцией предела последовательности.

Рассмотрим некоторую систему γ подмножеств множества $X \neq \emptyset$, покрывающую X. Для каждого $x \in X$ обозначим через V_x систему всех множеств из γ, содержащих x. При помощи семейства $(V_x : x \in X)$ систем окрестностей определим в X операцию предела Λ. Другими словами, рассматривая γ как систему открытых множеств, определим операцию предела Λ. Очевидно, топология τ' в X, имеющая предбазу γ и рассматриваемая как система открытых множеств, тоже определяет операцию предела Λ. Кроме того, сильнейшая система τ открытых множеств, определяющая операцию предела Λ, существует и является объединением всех систем открытых множеств, определяющих Λ. Ясно, что τ является топологией в X, причем $\tau' \subset \tau$.

Предложение 1.26. *Пусть γ — система подмножеств множества X, покрывающая X, а Λ — операция предела в X, определенная системой γ, рассматриваемой как система открытых множеств. Тогда топология τ всех открытых подмножеств пространства (X, Λ) тоже определяет операцию предела Λ и является сильнейшей системой открытых множеств, определяющей Λ.*

◀ Пусть Λ' — операция предела в X, определенная топологией τ. С учетом замечания 1.3 $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Однако $\gamma \subset \tau$ и поэтому $\Lambda'(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x})$. Следовательно, $\Lambda' = \Lambda$. ▶

Определение 1.17. *Топология τ подмножеств множества X называется секвенциальной топологией в X, если она, рассматриваемая как система открытых множеств, не допускает расширения с сохранением определенной ею операции предела последовательности. Будем говорить, что топология τ_1 подмножеств множества X_1 допускает секвенциальное продолжение, если существуют надмножество $X \supset X_1$ и в нем секвенциальная топология τ, которая индуцирует в X_1 топологию τ_1.*

Не всякая операция предела может быть определена системой открытых множеств и не всякая топология может допускать секвенциальное продолжение (см. примеры в начале § 5 и в § 10, n° 4). Однако, очевидно, всякая топология является подсистемой некоторой секвенциальной топологии (т. е. допускает секвенциальное расширение).

Теорема 1.22. *Система τ подмножеств множества X является секвенциальной топологией в X тогда и только тогда,* *когда для каждого $M \subset X$, не принадлежащего τ, существуют такие $x \in M$ и $\hat{x} \in (X \backslash M)^{\mathbb{N}}$, что $\hat{x}$ почти весь лежит в каждом множестве из τ, содержащем x.*

◀ Пусть τ — секвенциальная топология в X, а Λ — операция предела в X, определенная топологией τ. Согласно предложению 1.26, τ является топологией всех открытых подмножеств пространства $(X,\,\Lambda)$. Рассмотрим такое $M \subset X$, что $M \notin \tau$. Поскольку M не открыто в $(X,\,\Lambda)$, оно не является окрестностью некоторого $x \in M$. Поэтому существует последовательность $\hat{x}$ в $X \backslash M$, сходящаяся к x в $(X,\,\Lambda)$. А это означает, что $\hat{x}$ почти вся лежит в каждой открытой окрестности точки x, т. е. в каждом множестве из τ, содержащем x.

Пусть, обратно, система τ подмножеств множества X такая, что для каждого $M \subset X$, не принадлежащего τ, существуют такие $x \in M$ и $\hat{x} \in (X \backslash M)^{\mathbb{N}}$, что $\hat{x}$ почти весь лежит в каждом множестве из τ, содержащем x. Из этого условия следует, что $\varnothing \in \tau$ и $X \in \tau$. Рассмотрим некоторую систему τ' подмножеств в X, такую, что $\tau \subset \tau'$ и $\tau \neq \tau'$. Обозначим через Λ и Λ' операции предела в X, определенные системами открытых множеств τ и τ' соответственно. Пусть $M \in \tau' \backslash \tau$. Тогда существуют такие $x \in M$ и $\hat{x} \in (X \backslash M)^{\mathbb{N}}$, что $x \in \Lambda(\hat{x})$. Однако $x \notin \Lambda'(\hat{x})$. Поэтому $\Lambda' \neq \Lambda$. Следовательно, τ является сильнейшей системой открытых множеств, определяющей в X операцию предела Λ. Значит, τ — секвенциальная топология в X. ▶

Теорема 1.23. *Система всех открытых подмножеств пространства с операцией предела последовательности является секвенциальной топологией (она называется секвенциальной топологией этого пространства).*

◀ Пусть τ — топология всех открытых подмножеств пространства $(X,\,\Lambda)$, а Λ' — операция предела в X, определенная топологией τ. Согласно предложению 1.26, топология τ' всех открытых подмножеств пространства $(X,\,\Lambda')$ определяет операцию предела Λ' и является секвенциальной топологией, причем $\tau \subset \tau'$. Пусть $(U_x : x \in X)$ и $(U'_x : x \in X)$ — семейства полных систем окрестностей пространств $(X,\,\Lambda)$ и $(X,\,\Lambda')$ соответственно. Так как $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, то $U'_x \subset U_x$ для всех $x \in X$. Поэтому $\tau' \subset \tau$ и, значит, $\tau' = \tau$. ▶

В силу теоремы 1.23 секвенциальная топология τ пространства $(X,\,\Lambda)$ есть также секвенциальная топология пространства $(X,\,\Lambda')$ с операцией предела Λ', определенной топологией τ. Следовательно, в пространствах $(X,\,\Lambda)$ и $(X,\,\Lambda')$ операции замыкания совпадают.

Замечание 1.6. Может существовать система более двух пространств (X, Λ_i), $i \in I$, имеющих одну и ту же секвенциальную топологию τ. Если операцию предела Λ в X определить формулой $\Lambda(\hat{x}) = \bigcap\limits_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, то секвенциальная топология τ' пространства (X, Λ) может отличаться от τ. Однако $\tau \subset \tau'$, причем $\tau' \neq \tau$ возможно даже в случае, когда I — двухэлементное множество (см. пример в § 10, n° 14). Это означает, что среди семейств полных систем окрестностей в X может не существовать семейства сильнейших полных систем окрестностей, определяющего заданную секвенциальную топологию τ открытых множеств. Однако семейство слабейших полных систем окрестностей, определяющее топологию τ, существует. Это — семейство полных систем окрестностей пространства (X, Λ') с операцией предела Λ', определенной топологией τ.

Замечание 1.7. Пусть τ — секвенциальная топология пространства (X, Λ); Λ' — операция предела в X, определенная топологией τ; $X_1 \subset X$ — непустое подмножество; τ_1 и τ_1' — секвенциальные топологии подпространств $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ и $(X_1, \Lambda_1') \subset (X, \Lambda')$ соответственно; τ' — топология, индуцированная в X_1 топологией τ. Тогда $\tau' \subset \tau_1' \subset \tau_1$, причем $\tau' \neq \tau_1$ может иметь место даже в случае $\Lambda = \Lambda'$. А это означает, что топология, индуцированная секвенциальной топологией, может не быть секвенциальной (см. пример в § 10, n° 6). Каждая из топологий τ' и τ_1' определяет в X_1 операцию предела Λ_1'. Если $\widetilde{\Lambda}_1$ — операция предела в X_1, определенная топологией τ_1, то $\Lambda_1(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}_1(\hat{x}) \subset \Lambda_1'(\hat{x})$, $\hat{x} \in X_1^{\mathbb{N}}$, причем возможен случай, когда все эти операции предела отличны друг от друга.

В теореме 1.17 указаны случаи, когда секвенциальная топология индуцирует секвенциальную топологию (в связи с этим см. [76], с. 122), а именно: одно из утверждений теоремы 1.17 можно сформулировать следующим образом.

Предложение 1.27. *Если $X_1 \neq \varnothing$ — открытое или замкнутое множество в пространстве (X, Λ), то секвенциальная топология этого пространства индуцирует в X_1 топологию, совпадающую с секвенциальной топологией подпространства $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$.* ►

Предложение 1.28. *Пусть Λ' — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией пространства (X, Λ). Если для некоторого $x \in X$ множество $\Lambda(\dot{x})$ замкнуто, то $\Lambda'(\dot{x}) = \Lambda(\dot{x})$. В частности, это равенство имеет место при $\Lambda(\dot{x}) = \{x\}$.* ►

Теорема 1.24. *Пусть Λ' — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией пространства $(X,\,\Lambda)$. Тогда для любого $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ справедливы равенства*

$$\Lambda(\hat{x}) = \bigcap_{\hat{x}'\prec\hat{x}} [\hat{x}']^{+}, \quad \Lambda'(\hat{x}) = \bigcap_{\hat{x}'\prec\hat{x}} \overline{[\hat{x}']},$$

где квазизамыкание и замыкание взяты в $(X,\,\Lambda)$. ▶

Теорема 1.25. *Пусть Λ' — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией пространства $(X,\,\Lambda)$, а $E(\hat{\eta})$ для каждого $\hat{\eta}=(\eta_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ есть множество таких $\hat{\xi}=(\xi_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda(\hat{\xi})\neq\varnothing$ и $\xi_n\in\overline{\{\eta_{k_n}\}}$ в $(X,\,\Lambda)$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и некоторой последовательности натуральных чисел $k_1<k_2<\ldots$ (своей для каждого $\hat{\xi}$). Тогда для любого $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ справедливо равенство*

$$\Lambda'(\hat{x}) = \bigcap_{\hat{x}'\prec\hat{x}} \overline{\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi}\in E(\hat{x}')\}}, \tag{1}$$

где замыкание берется в $(X,\,\Lambda)$ (в случае $E(\hat{x}')=\varnothing$ считается, что $\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi}\in E(\hat{x}')\} = \varnothing$).

◀ Пусть $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$. Докажем, что если $E(\hat{x})=\varnothing$, то $\Lambda'(\hat{x})=\varnothing$. Для произвольного $\hat{x}'=(x_{s_n} : n\in\mathbb{N})\prec\hat{x}$ имеем $E(\hat{x}')\subset E(\hat{x})=\varnothing$. Поэтому

$$\overline{[\hat{x}']} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_{s_n}\}}. \tag{2}$$

Предположим $\Lambda'(\hat{x})\neq\varnothing$. Пусть $x\in\Lambda'(\hat{x})$. В силу теоремы 1.24 $x\in\overline{[\hat{x}']}$. Отсюда с учетом (2) вытекает существование такого $m\in\mathbb{N}$, что $x\in\overline{\{x_n\}}$ для всех $n\geqslant m$. Поэтому $\dot{x}\in E(\hat{x})$ и, значит, $E(\hat{x})\neq\varnothing$. Полученное противоречие доказывает, что $\Lambda'(\hat{x})=\varnothing$. Если $E(\hat{x}')=\varnothing$ для некоторого $\hat{x}'\prec\hat{x}$, то в силу доказанного утверждения $\Lambda'(\hat{x})\subset\Lambda'(\hat{x}')=\varnothing$ и, следовательно, имеет место (1).

Докажем (1) в случае, когда $E(\hat{x}')\neq\varnothing$ для любого $\hat{x}'\prec\hat{x}$. Легко убедиться, что для произвольного $\hat{x}'=(x_{s_n} : n\in\mathbb{N})\prec\hat{x}$

$$\overline{[\hat{x}']} = \overline{\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi}\in E(\hat{x}')\}} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{\{x_{s_n}\}}.$$

Отсюда с учетом теоремы 1.24 получаем

$$\bigcap_{\hat{x}'\prec\hat{x}} \overline{\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x}')\}} \subset \bigcap_{\hat{x}'\prec\hat{x}} \overline{[\hat{x}']} = \Lambda'(\hat{x}). \tag{3}$$

Поэтому если $\Lambda'(\hat{x}) = \varnothing$, то имеет место (1). Пусть $\Lambda'(\hat{x}) \neq \varnothing$ и $x \in \Lambda'(\hat{x})$. Покажем, что

$$x \in \overline{\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x}')\}}. \tag{4}$$

Если $x \in \overline{\{x_{s_n}\}}$ для бесконечного числа значений $n \in \mathbb{N}$, то $\dot{x} \in$ $\in E(\hat{x}')$ и, значит, $x \in \bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x}')\}$. Если же $x \in \overline{\{x_{s_n}\}}$ лишь для конечного числа значений $n \in \mathbb{N}$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что

$$x \notin \bigcup_{n \geqslant m} \overline{\{x_{s_n}\}}. \tag{5}$$

Обозначим через $\hat{x}''$ последовательность, получаемая из $\hat{x}'$ удалением первых $m-1$ членов. Очевидно,

$$\overline{[\hat{x}'']} = \overline{\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x}')\}} \cup \bigcup_{n \geqslant m} \overline{\{x_{s_n}\}}. \tag{6}$$

Однако в силу (3) $x \in \overline{[\hat{x}'']}$. Поэтому из (5) и (6) следует (4). Значит,

$$\Lambda'(\hat{x}) \subset \overline{\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x}')\}}.$$

Отсюда и из (3) получаем (1). ►

Теорема 1.26. *Пусть (X, Λ) — прямое произведение семейства пространств $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$; Λ' — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией τ пространства (X, Λ); Λ'_i для каждого $i \in I$ — операция предела в X_i, определенная секвенциальной топологией τ_i пространства (X_i, Λ_i); $(X, \widetilde{\Lambda})$ — прямое произведение семейства пространств $((X_i, \Lambda'_i) : i \in I)$. Тогда $\Lambda'(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, причем если I конечно или счетно, то $\Lambda' = \widetilde{\Lambda}$.*

◄ Легко убедиться, что операция предела $\widetilde{\Lambda}$ может быть определена топологией $\tau^* = \prod\limits_{i \in I} \tau_i$. Однако $\tau^* \subset \tau$. Поэтому $\Lambda'(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$.

Докажем, что если множество I конечно или счетно, то $\Lambda' =$ $= \widetilde{\Lambda}$. Рассмотрим случай счетного I и для определенности положим $I = \mathbb{N}$ (в случае конечного I доказательство проводится аналогично).

Пусть $\hat{x} = \big(x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big) \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) \neq \varnothing$, причем $x^{(n)}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ есть семейство $x^{(n)} = \big(x_i^{(n)} : i \in \mathbb{N}\big)$, где $x_i^{(n)} \in X_i$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $\hat{x}_i = pr_i(\hat{x})$, т. е. $\hat{x}_i = \big(x_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big) \in X_i^{\mathbb{N}}$. Очевидно, что $\Lambda_i'(\hat{x}_i) \neq \varnothing$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозначим через $E_i(\hat{x}_i)$ множество таких $\hat{\xi}_i = \big(\xi_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big) \in X_i^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda_i(\hat{\xi}_i) \neq \varnothing$ и $\xi_i^{(n)} \in \overline{\big\{x_i^{(k_{in})}\big\}}$ в (X_i, Λ_i) при каждом $n \in \mathbb{N}$ с некоторым $k_{in} \in \mathbb{N}$ (своим для каждого $\hat{\xi}_i$), таким, что $k_{i1} < k_{i2} < \ldots$. В силу теоремы 1.25 $E_i(\hat{x}_i) \neq \varnothing$. Обозначим через $E(\hat{x})$ множество таких $\hat{\xi} = \big(\xi^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big) \in X^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda(\hat{\xi}) \neq \varnothing$ и $\xi^{(n)} \in \overline{\big\{x^{(k_n)}\big\}}$ в (X, Λ) при каждом $n \in \mathbb{N}$ с некоторым $k_n \in \mathbb{N}$ (своим для каждого $\hat{\xi}$), таким, что $k_1 < k_2 < \ldots$.

Покажем, что $E(\hat{x}) \neq \varnothing$. Выберем некоторую последовательность $\hat{\eta}_1 = \big(\eta_1^{(k_{1n})} : n \in \mathbb{N}\big) \in E_1(\hat{x}_1)$, где $\eta_1^{(k_{1n})} \in \overline{\big\{x_1^{(k_{1n})}\big\}}$ в (X_1, Λ_1), а $\hat{k}_1 = (k_{1n} : n \in \mathbb{N})$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим $\hat{x}_2' = \big(x_2^{(k_{1n})} : n \in \mathbb{N}\big)$. Так как $\hat{x}_2' \prec \hat{x}_2$, то $\Lambda_2'(\hat{x}_2) \subset \Lambda_2'(\hat{x}_2') \neq \varnothing$. Следовательно, $E_2(\hat{x}_2') \neq \varnothing$. Выберем некоторое $\hat{\eta}_2 = \big(\eta_2^{(k_{2n})} : n \in \mathbb{N}\big) \in E_2(\hat{x}_2')$, где $\eta_2^{(k_{2n})} \in \overline{\big\{x_2^{(k_{2n})}\big\}}$ в (X_2, Λ_2), а $\hat{k}_2 = (k_{2n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{k}_1$. Продолжая этот выбор, для каждого $i \in \mathbb{N}$ получим строго возрастающую последовательность $\hat{k}_i = (k_{in} : n \in \mathbb{N})$ натуральных чисел и последовательность $\hat{\eta}_i = \big(\eta_i^{(k_{in})} : n \in \mathbb{N}\big)$ точек $\eta_i^{(k_{in})} \in \overline{\big\{x_i^{(k_{in})}\big\}}$ пространства (X_i, Λ_i), такие, что $\Lambda_i(\hat{\eta}_i) \neq \varnothing$ и $\hat{k}_{i+1} \prec \hat{k}_i$. Рассмотрим в (X_i, Λ_i) последовательность $\hat{\xi}_i = \big(\xi_i^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big)$ точек $\xi_i^{(n)} \in \overline{\big\{x_i^{(k_{nn})}\big\}}$, которые произвольны при $n < i$ и равны $\eta_i^{(k_{nn})}$ при $n \geqslant i$. Очевидно, что $\big(\eta_i^{(k_{nn})} : n \geqslant i\big) \prec \hat{\eta}_i$. Поэтому $\Lambda_i(\hat{\xi}_i) \neq \varnothing$. Пусть $\hat{\xi}$ — такая последовательность в (X, Λ), что $pr_i(\hat{\xi}) = \hat{\xi}_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$, т. е. $\hat{\xi} = \big(\xi^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big)$, где $\xi^{(n)} = \big(\xi_i^{(n)} : i \in \mathbb{N}\big)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\Lambda(\hat{\xi}) \neq \varnothing$. В силу теоремы 1.19 имеем $\overline{\{x^{(n)}\}} = \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{\big\{x_i^{(n)}\big\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $\xi^{(n)} \in \overline{\big\{x^{(k_{nn})}\big\}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда $\hat{\xi} \in E(\hat{x})$ и $E(\hat{x}) \neq \varnothing$.

Теперь докажем, что $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) \subset \overline{[\hat{x}]}$. Пусть $y \in \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$, причем $y = (y_i : i \in \mathbb{N})$, где $y_i \in \Lambda'_i(\hat{x}_i)$, а η — точка из множества

$$\bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x})\}, \tag{7}$$

причем $\eta = (\eta_i : i \in \mathbb{N})$, где $\eta_i \in X_i$. Для данной точки η и каждого $n \in \mathbb{N}$ определим точку $z^{(n)} = \big(z_i^{(n)} : i \in \mathbb{N}\big)$ пространства (X, Λ), положив

$$z_i^{(n)} = \begin{cases} y_i, & 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \eta_i, & i > n. \end{cases} \tag{8}$$

Докажем, что $z^{(n)} \in \overline{[\hat{x}]}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. С этой целью для η выберем такое $\hat{\eta} \in E(\hat{x})$, что $\eta \in \Lambda(\hat{\eta})$. Пусть $\hat{\eta} = \big(\eta^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big)$, где $\eta^{(n)} \in \overline{\big\{x^{(k_n)}\big\}}$. Обозначим $\hat{x}' = \big(x^{(k_n)} : n \in \mathbb{N}\big)$ и $\hat{x}'_i = pr_i(\hat{x}')$, $i \in \mathbb{N}$, т. е. $\hat{x}'_i = \big(x_i^{(k_n)} : n \in \mathbb{N}\big)$. Для точки η и соответствующей ей подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$ при каждом $s \in \mathbb{N}$ определим подмножества $M_{is} \subset X_i$, $i \in \mathbb{N}$, положив $M_{ss} = \bigcup\{\Lambda_s(\hat{\xi}_s) : \hat{\xi}_s \in E_s(\hat{x}'_s)\}$, $M_{is} = \{\eta_i\}$ при $i > s$, $M_{is} = \{y_i\}$ при $s > 1$ и $i < s$. В силу теоремы 1.25 $y_s \in \overline{M}_{ss}$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Очевидно,

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} M_{i1} \subset \bigcup\{\Lambda(\hat{\xi}) : \hat{\xi} \in E(\hat{x}')\} \subset \overline{[\hat{x}']} \subset \overline{[\hat{x}]}. \tag{9}$$

Кроме того, в силу теоремы 1.19 $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{M}_{i1} = \overline{\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} M_{i1}}$. Отсюда и из (9) с учетом $y_1 \in \overline{M}_{11}$ получаем $z^{(1)} \in \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{M}_{i1} \subset \overline{[\hat{x}]}$. Предположим, что для некоторого натурального $s > 1$ и произвольной точки η из множества (7) точки $z^{(n)} = (z_i^{(n)} : i \in \mathbb{N})$, $n \in \mathbb{N}$, определенные равенством (8), удовлетворяют условию $z^{(s-1)} \in \overline{[\hat{x}]}$. Докажем, что $z^{(s)} \in \overline{[\hat{x}]}$. Так как $y_s \in \overline{M}_{ss}$, то $z^{(s)} \in \prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{M}_{is}$. Из сделанного предположения следует, что $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} M_{is} \subset \overline{[\hat{x}]}$. Отсюда в силу теоремы 1.19 $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} \overline{M}_{is} = \overline{\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} M_{is}} \subset \overline{[\hat{x}]}$. Поэтому $z^{(s)} \in \overline{[\hat{x}]}$. Тем самым $z^{(n)} \in \overline{[\hat{x}]}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что последовательность $\hat{z} = (z^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ сходится к y в (X, Λ). Поэтому $y \in \overline{[\hat{x}]}$ и, значит, $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) \subset \overline{[\hat{x}]}$.

В силу доказанного включения для любых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}' \prec \hat{x}$ имеем также $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{x}') \subset \overline{[\hat{x}']}$. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) \subset \bigcap\limits_{\hat{x}' \prec \hat{x}} \overline{[\hat{x}']}$. Отсюда и из $\Lambda'(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ с учетом равенства $\Lambda'(\hat{x}) = \bigcap\limits_{\hat{x}' \prec \hat{x}} \overline{[\hat{x}']}$, вытекающего из теоремы 1.24, получаем $\Lambda'(\hat{x}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$. ►

Произведение двух секвенциальных топологий может не быть секвенциальной топологией (см. пример в § 10, n° 5). Укажем случай, когда произведение двух секвенциальных топологий является секвенциальной топологией (в связи с этим см. [12] и [76], с. 320).

Теорема 1.27. *Пусть (X_1, Λ_1) — локально секвенциально компактное пространство, (X_2, Λ_2) — произвольное пространство, а τ_1 и τ_2 — секвенциальные топологии этих пространств соответственно. Тогда топология $\tau = \tau_1 \times \tau_2$ является секвенциальной топологией пространства $(X, \Lambda) = (X_1, \Lambda_1) \times (X_2, \Lambda_2)$.*

◄ Пусть M — замкнутое множество в (X, Λ), а $x_0 \in X \setminus M$, причем $x_0 = (x_0', x_0'')$, где $x_0' \in X_1$ и $x_0'' \in X_2$. Докажем, что в (X_1, Λ_1) и (X_2, Λ_2) существуют открытые окрестности u_1 и u_2 точек x_0' и x_0'' соответственно, произведение $u = u_1 \times u_2$ которых не пересекается с M. Обозначим через M_1 множество таких $x' \in X_1$, что $(x', x_0'') \in M$. Очевидно, M_1 замкнуто в (X_1, Λ_1) и не содержит x_0'. Поэтому в силу локально секвенциальной компактности пространства (X_1, Λ_1) существует открытая окрестность u_1 точки x_0', замыкание $\overline{u}_1$ которой секвенциально компактно и не пересекается с M_1. Обозначим через M' множество таких $(x', x'') \in M$, что $x' \in \overline{u}_1$. Рассмотрим проекции $pr_1(M')$ и $pr_2(M')$ множества M' на сомножители X_1 и X_2 соответственно. Очевидно, $pr_1(M') \subset \overline{u}_1$. Покажем, что $pr_2(M')$ замкнуто в (X_2, Λ_2). Пусть $x'' \in X_2$ — предельная точка множества $pr_2(M')$, а $\hat{x}'' = (x_n'' : n \in \mathbb{N})$ — последовательность в $pr_2(M')$, сходящаяся к x'', т. е. $x'' \in \Lambda_2(\hat{x}'')$. Выберем в $pr_1(M')$ последовательность $\hat{x}' = (x_n' : n \in \mathbb{N})$ так, чтобы $(x_n', x_n'') \in M'$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу секвенциальной компактности $\overline{u}_1$ последовательность $\hat{x}'$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{y}' = (x_{k_n}' : n \in \mathbb{N})$. Имеем, что $\Lambda_1(\hat{y}') \subset \overline{u}_1$. Пусть $x' \in \Lambda_1(\hat{y}')$ и $x = (x', x'')$. Очевидно, что последовательность $\hat{x} = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ точек $x_{k_n} = (x_{k_n}', x_{k_n}'') \in M'$ сходится к x в (X, Λ). Однако M замкнуто и поэтому $x \in M$. Более того, $x \in M'$, поскольку $x' \in \overline{u}_1$. Следовательно, $x'' \in pr_2(M')$.

Тем самым замкнутость $pr_2(M')$ доказана. В силу выбора $\overline{u}_1$ имеем $x_0'' \notin pr_2(M')$. Поэтому множество $u_2 = X_2 \backslash pr_2(M')$ является открытой окрестностью точки x_0''. Очевидно, открытая окрестность $u = u_1 \times u_2$ точки x_0 не пересекается с M. ▶

§ 5. Топологические пространства с операцией предела последовательности

Определение 1.18. *Если секвенциальная топология пространства* (X, Λ) *определяет в* X *операцию предела* Λ, *то* (X, Λ) *называется топологическим пространством с операцией предела последовательности (короче — топологическим пространством), а* Λ *— топологической операцией предела.*

В силу предложения 1.26 пространство (X, Λ) топологическое тогда и только тогда, когда операция предела Λ может быть определена некоторой системой открытых множеств, покрывающей X.

Легко проверить, что любое пространство, состоящее из одной или двух точек, топологическое. Однако есть нетопологическое пространство, состоящее из трех точек. Примером может служить пространство (X, Λ), где $X = \{x, y, z\}$, а полные системы окрестностей точек в этом пространстве следующие:

$$U_x = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\}, \quad U_y = \{\{x, y\}, X\},$$

$$U_z = \{\{y, z\}, X\},$$

Секвенциальная топология этого пространства есть система

$$\tau = \{\varnothing, \{x\}, \{x, y\}, X\},$$

которая определяет операцию предела $\Lambda' \neq \Lambda$, так как $\Lambda(\dot{x}) = \{x, y\}$ и $\Lambda'(\dot{x}) = X$. В топологическом пространстве (X, Λ') полные системы окрестностей точек следующие: $U'_x = U_x$, $U'_y = U_y$, $U'_z = \{X\}$.

Предложение 1.29. *Любое подпространство* (X_1, Λ_1) *топологического пространства* (X, Λ) *топологическое. Для секвенциальной топологии* τ_1 *подпространства* (X_1, Λ_1) *и топологии* τ', *индуцированной в* X_1 *секвенциальной топологией* τ *пространства* (X, Λ), *имеет место включение* $\tau' \subset \tau_1$. *При этом* τ' *определяет в* X_1 *операцию предела* Λ_1.

◀ Поскольку τ определяет в X операцию предела Λ, в силу предложения 1.15 индуцированная топология τ' определяет в

X_1 операцию предела Λ_1. Но тогда в силу предложения 1.26 пространство (X_1, Λ_1) топологическое, а $\tau' \subset \tau_1$. ▶

Предложение 1.30. *Прямое произведение (X, Λ) любого семейства топологических пространств $((X_i, \Lambda_i): i \in I)$ является топологическим пространством. Кроме того, операция предела Λ может быть определена топологией $\tau^* = \prod\limits_{i \in I} \tau_i$, где τ_i для каждого $i \in I$ — секвенциальная топология пространства (X_i, Λ_i). При этом $\tau^* \subset \tau$, где τ — секвенциальная топология пространства (X, Λ).* ▶

Очевидно, всякая топологическая операция предела в $X_1 \subset \subset X$ есть ограничение на X_1 некоторой топологической операции предела в X.

По аналогии с предложением 1.16 доказывается

Предложение 1.31. *Пусть (X, Λ) — прямое произведение конечного или счетного семейства топологических пространств $((X_i, \Lambda_i): i \in I)$, а $x \in X$ и $x_i = pr_i(x)$, $i \in I$. Если для каждого $i \in I$ точка x_i имеет в (X_i, Λ_i) конечную или счетную фундаментальную систему открытых окрестностей, то x имеет в (X, Λ) конечную или счетную фундаментальную систему открытых окрестностей, представимых в виде $\prod\limits_{i \in I} u_i$, где u_i для каждого $i \in I$ — открытая окрестность точки x_i в (X_i, Λ_i), причем $u_i = X_i$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа значений.* ▶

Теорема 1.28. *Пространство (X, Λ) топологическое тогда и только тогда, когда для каждых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X \setminus \Lambda(\hat{x})$ существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $x \notin \overline{[\hat{x}']}$.*

◀ Пусть пространство (X, Λ) топологическое. Тогда из условия $x \notin \Lambda(\hat{x})$ следует существование открытой окрестности v точки x, не содержащей члены некоторой подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Так как $X \setminus v$ замкнуто и $[\hat{x}'] \subset X \setminus v$, то $\overline{[\hat{x}']} \subset X \setminus v$ и, значит, $x \notin \overline{[\hat{x}']}$.

Пусть, обратно, для каждых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X \setminus \Lambda(\hat{x})$ существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $x \notin \overline{[\hat{x}']}$, а Λ' — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией пространства (X, Λ). Тогда $x \notin \Lambda'(\hat{x})$, поскольку множество $u = X \setminus \overline{[\hat{x}']}$ является открытой окрестностью точки x и не содержит ни одного члена подпоследовательности $\hat{x}'$. Поэтому $\Lambda'(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x})$. Отсюда с учетом очевидного включения $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ получаем $\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x})$. Тем самым $\Lambda' = \Lambda$ и, значит, (X, Λ) топологическое. ▶

Из теорем 1.2 и 1.28 вытекает

Следствие 1.3. *Отображение* $\Lambda: X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ *является топологической операцией предела в* X *тогда и только тогда, когда*

1) $x \in \Lambda(\dot{x})$ *для каждого* $x \in X$*;*

2) $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}')$ *для любых* $\hat{x}' \prec \hat{x}$ *из* $X^{\mathbb{N}}$*;*

3) для каждых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *и* $x \in X \setminus \Lambda(\hat{x})$ *существует такое* $M \subset X \setminus \{x\}$, *что* $\hat{x}$ *является частым в* M *и* $\Lambda(\hat{\xi}) \subset M$ *для любого* $\hat{\xi} \in M^{\mathbb{N}}$. ►

Теорема 1.29. *В топологическом пространстве* (X, Λ) *для каждой последовательности* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *множество* $\Lambda(\hat{x})$ *замкнуто, причем* $\Lambda(\hat{\xi}) \subset \Lambda(\hat{x})$ *для любой последовательности* $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ *точек* $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_n)$.

◄ Пусть x — предельная точка множества $\Lambda(\hat{x})$, а v — открытая окрестность точки x. Тогда $v \cap \Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$, а v является открытой окрестностью множества $v \cap \Lambda(\hat{x})$. Поэтому $\hat{x}$ почти вся лежит в v. Отсюда, поскольку пространство (X, Λ) топологическое, получаем $x \in \Lambda(\hat{x})$. Следовательно, $\Lambda(\hat{x})$ замкнуто.

Пусть $\hat{\xi}$ — указанная в теореме последовательность, $\xi \in \Lambda(\hat{\xi})$, а u — открытая окрестность точки ξ. Тогда существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\xi_n \in u$ для всех $n \geqslant m$. Так как u является открытой окрестностью каждой точки ξ_n, $n \geqslant m$, а $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_n)$, то $x_n \in u$ для всех $n \geqslant m$. Тем самым $\hat{x}$ почти вся лежит в каждой открытой окрестности точки ξ и, поскольку пространство (X, Λ) топологическое, $\xi \in \Lambda(\hat{x})$. Следовательно, $\Lambda(\hat{\xi}) \subset \Lambda(\hat{x})$. ►

Указанные в теореме 1.29 свойства не достаточны, чтобы операция предела была топологической (см. § 10, n° 9).

Предложение 1.13 можно дополнить следующим утверждением.

Следствие 1.4. *Пусть топологическая операция предела* Λ *в* X *определена семейством систем окрестностей* $(V_x : x \in X)$. *Если система* V_ξ *для некоторого* $\xi \in X$ *конечна, то ее пересечение является открытой окрестностью точки* ξ *в пространстве* (X, Λ). ►

Следствие 1.5. *В топологическом пространстве* (X, Λ) *для любой точки* x *и любой последовательности* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, *не обладающей сходящейся подпоследовательностью, имеют место равенства* $\overline{\{x\}} = \{x\}^+ = \Lambda(\dot{x})$ *и* $\overline{[\hat{x}]} = [\hat{x}]^+ = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Lambda(\dot{x}_n)$. ►

В топологическом пространстве с операцией неоднозначного предела для сходящейся последовательности $\hat{x}$ квазизамыкание $[\hat{x}]^+$ может не быть замкнутым (см. пример в § 10, n° 10).

Замечание 1.8. Если для нетопологического пространства $(X,\,\Lambda)$ отображения $\Lambda_i : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ $(i=1,\,2)$ определить формулами $\Lambda_1(\hat{x}) = (\Lambda(\hat{x}))^+$ и $\Lambda_2(\hat{x}) = \overline{\Lambda(\hat{x})}$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, то Λ_1 и Λ_2 могут не быть операциями предела. Примером может служить указанное выше пространство, состоящее из трех точек.

Можно построить топологическое пространство $(X,\,\Lambda)$ и в нем сходящуюся последовательность $\hat{x}$ попарно различных точек так, чтобы $\Lambda(\hat{y}) \neq \Lambda(\hat{z})$ для любых подпоследовательностей $\hat{y} \prec \hat{x}$ и $\hat{z} \prec \hat{x}$, при которых множество $([\hat{y}] \setminus [\hat{z}]) \cup ([\hat{z}] \setminus [\hat{y}])$ бесконечно (см. пример в § 10, n° 9).

Теорема 1.30. *Если в топологическом пространстве* $(X,\,\Lambda)$ *последовательность* $\hat{x} = (x_1,\,x_2,\,\ldots)$ *является частой в каждой открытой окрестности точки* x, *то* $\hat{x}$ *обладает сходящейся подпоследовательностью (она может не сходиться к* x*).*

◀ Очевидно,что если $x \in \Lambda(\dot{x}_{k_n})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $k_n \in \mathbb{N}$ и $k_1 < k_2 < \ldots$, то подпоследовательность $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{x}$ сходится к x. Пусть $x \notin \Lambda(\dot{x}_n)$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\hat{x}'$, получаемую из $\hat{x}$ удалением первых $m-1$ членов. Предположим $\hat{x}'$ не обладает сходящейся подпоследовательностью. Тогда в силу следствия 1.5 $\overline{[\hat{x}']} = \bigcup\limits_{n \geqslant m} \Lambda(\dot{x}_n)$. Так как $\hat{x}'$ является частой в каждой открытой окрестности точки x, то $x \in \overline{[\hat{x}']}$. Отсюда в силу указанного равенства $x \in \Lambda(\dot{x}_n)$ для некоторого $n \geqslant m$. Однако это противоречит выбору m. Поэтому $\hat{x}$ обладает сходящейся подпоследовательностью. ▶

Предложение 1.32. *В топологическом пространстве точка накопления множества, имеющая конечную или счетную фундаментальную систему открытых окрестностей, является предельной точкой этого множества.* ▶

Для нетопологических пространств теорема 1.30 и предложение 1.32 не верны (см. пример в § 10, n° 11).

Теорема 1.31. *Если в пространстве* $(X,\,\Lambda)$ *каждая последовательность* $\hat{x}$ *обладает подпоследовательностью* $\hat{y}$, *для которой* $\overline{[\hat{y}]} \subset [\hat{x}]^+$, *то это пространство топологическое.*

◀ Пусть $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X \setminus \Lambda(\hat{x})$. В силу указанного в теореме 1.2 свойства 3) операций предела существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $x \notin [\hat{x}']^+$. По условию, существует такое $\hat{y} \prec \hat{x}'$, что $\overline{[\hat{y}]} \subset [\hat{x}']^+$.

Поэтому $\hat{y} \prec \hat{x}$ и $x \notin \overline{[\hat{y}]}$. Отсюда в силу теоремы 1.28 следует, что пространство $(X,\, \Lambda)$ топологическое. ►

Следствие 1.6. *Операция однозначного предела последовательности топологическая.*

◄ В пространстве с операцией однозначного предела $(X,\, \lambda)$ каждая последовательность $\hat{x}$ либо не обладает сходящейся подпоследовательностью и в этом случае $\overline{[\hat{x}]} = [\hat{x}]^{+} = [\hat{x}]$, либо обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{y}$ и тогда $\overline{[\hat{y}]} = [\hat{y}]^{+} = [\hat{y}] \cup \{\lambda(\hat{y})\}$. Поэтому условие теоремы 1.31 выполняется и, следовательно, пространство $(X,\, \lambda)$ топологическое. ►

Замечание 1.9. Указанное во введении понятие L^*-пространства эквивалентно понятию пространства с операцией однозначного предела последовательности. В связи с этим и следствием 1.6 отметим, что в [46], с. 198—199, квазизамыкание множества принимается в качестве его замыкания и делается неверное утверждение, что L^*-пространство может не быть топологическим (см. также [38]; [41]; [76], с. 108—109).

Предложение 1.33. *Пусть* $\{\Lambda_i : i \in I\}$ *— система топологических операций предела в множестве* X*. Тогда операция предела* Λ *в* X*, заданная формулой* $\Lambda(\hat{x}) = \bigcap\limits_{i\in I} \Lambda_i(\hat{x}),\ \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$*, топологическая и может быть определена системой открытых множеств* $\gamma = \bigcup\limits_{i\in I} \tau_i$*, где* τ_i *— секвенциальная топология пространства* $(X,\, \Lambda_i)$*.* ►

В предложении 1.33 топология τ' в X, имеющая предбазу γ, может отличаться от секвенциальной топологии τ пространства $(X,\, \Lambda)$, причем $\tau' \subset \tau$ (см. пример в § 10, n° 14).

Предложение 1.34. *Пусть* f *— отображение множества* X *в множество* Y*;* $\widetilde{\Lambda}$ *— операция предела в* Y*;* $\widetilde{\tau}$ *— секвенциальная топология пространства* $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$*;* Λ *— операция предела в* X*, заданная формулой*

$$\Lambda(\hat{x}) = f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y})), \tag{1}$$

где $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ *и* $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$*. Тогда секвенциальная топология* τ *пространства* $(X,\, \Lambda)$ *есть система*

$$\tau = \{f^{-1}(\widetilde{v}) : \widetilde{v} \in \widetilde{\tau}\}, \tag{2}$$

причем если операция предела $\widetilde{\Lambda}$ *топологическая, то* Λ *тоже топологическая.*

◀ Пусть v — открытое множество в (X, Λ). Так как v является окрестностью каждой своей точки, то, согласно предложению 1.12, $f^{-1}(f(x)) \subset v$ для любого $x \in v$. Поэтому $v = f^{-1}(f(v))$, причем $f(v)$ является окрестностью каждой своей точки в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и, значит, $f(v) \in \widetilde{\tau}$. Кроме того, для любого $\widetilde{v} \in \widetilde{\tau}$ множество $f^{-1}(\widetilde{v})$ открыто в (X, Λ). Следовательно, система (2) есть секвенциальная топология пространства (X, Λ).

Предположим операция предела $\widetilde{\Lambda}$ топологическая, а последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ точек пространства (X, Λ) почти вся лежит в каждой открытой окрестности точки $x \in X$. Поскольку секвенциальная топология пространства (X, Λ) есть система (2), последовательность $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ почти вся лежит в каждой открытой окрестности точки $y = f(x)$. Поэтому $y \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$, так как $\widetilde{\Lambda}$ — топологическая операция предела. Но тогда в силу (1) $x \in \Lambda(\hat{x})$. А это означает, что операция предела Λ определяется секвенциальной топологией пространства (X, Λ) и, следовательно, топологическая. ▶

§ 6. Пространства Фреше–Урысона

Определение 1.19. *Пространство (X, Λ) называется пространством Фреше–Урысона, а Λ — операцией предела Фреше–Урысона, если $M^+ = \overline{M}$ для любого $M \subset X$.*

Теорема 1.32. *Для пространства (X, Λ) следующие условия попарно эквивалентны:*

1) (X, Λ) — пространство Фреше–Урысона;

2) $M^- = M^\circ$ для любого $M \subset X$;

3) окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки;

4) секвенциальная топология пространства (X, Λ) индуцирует в любом $X_1 \subset X$ топологию, совпадающую с секвенциальной топологией подпространства, имеющего носитель X_1;

5) пространство (X, Λ) топологическое и его секвенциальная топология индуцирует в любом подмножестве секвенциальную топологию.

◀ Эквивалентность условий 1) и 2) непосредственно вытекает из теоремы 1.12.

Пусть выполняется условие 1). Если u — окрестность точки $x \in X$, то в силу $x \in u^- = u^\circ$ подмножество $u^\circ \subset u$ является открытой окрестностью точки x. Отсюда следует, что пространство (X, Λ) топологическое. Докажем, что его секвенциальная топология индуцирует в любом подмножестве $X_1 \subset X$ топологию, совпадающую с секвенциальной топологией подпространства $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$. Пусть $w \subset X_1$ — открытое подмножество в (X_1, Λ_1). Согласно теореме 1.9, для каждого $x \in w$ существует в (X, Λ) такая окрестность v_x точки x, что $w = X_1 \cap v_x$. Положим $v = \bigcup\limits_{x \in w} v_x$. Тогда, очевидно, $w = X_1 \cap v$, $w \subset v^- = v^\circ$ и, значит, $w = X_1 \cap v^\circ$. Тем самым выполняются условия 3)—5).

Теперь докажем, что каждое из условий 3)—5) влечет 1). Пусть выполняется условие 3), а $M \subset X$. Так как M является окрестностью каждой точки из M^-, то в силу условия 3) для каждой точки из M^- множество M содержит открытую окрестность этой точки. Поэтому $M^- \subset M^\circ$. Отсюда в силу $M^\circ \subset M^-$ получаем $M^- = M^\circ$, из которого следует, что (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона.

Пусть выполняется условие 4) или 5). Допустим $M^+ \neq \overline{M}$ для некоторого $M \subset X$. Тогда $M^+ \backslash M$ имеет предельную точку $x_0 \notin M^+$. Для множества $X_1 = M \cup \{x_0\}$ рассмотрим подпространство $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ и его секвенциальную топологию τ_1. Очевидно, $\{x_0\} \in \tau_1$, так как x_0 не является предельной точкой для X_1. С другой стороны, x_0 является точкой накопления множества X_1 в (X, Λ) и, значит, любая открытая в (X, Λ) окрестность точки x_0 имеет непустое пересечение с M. Поэтому открытое подмножество $\{x_0\}$ подпространства (X_1, Λ_1) не принадлежит топологии τ', индуцированной в X_1 секвенциальной топологией τ пространства (X, Λ), т. е. $\tau' \subset \tau_1$ и $\tau' \neq \tau_1$. Однако это противоречит условию 4). Оно противоречит также условию 5). Действительно, так как при условии 5) секвенциальная топология τ определяет в X операцию предела Λ, то индуцированная топология τ', а следовательно, и секвенциальная топология τ_1 определяют в X_1 операцию предела Λ_1. Но тогда из $\tau' \subset \tau_1$ и $\tau' \neq \tau_1$ вытекает, что τ' не является секвенциальной топологией. Таким образом, при выполнении условия 4) или 5) имеет место равенство $M^+ = \overline{M}$. Значит, (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона. ▶

Следствие 1.7. *Подпространство пространства Фреше–Урысона является пространством Фреше–Урысона.* ▶

Утверждение теоремы 1.32 о том, что пространство Фреше–Урысона топологическое, вытекает также из теоремы 1.31.

Очевидно, всякое пространство Фреше–Урысона с носителем $X_1 \subset X$ является подпространством некоторого пространства Фреше–Урысона с носителем X.

В связи с теоремой 1.32 отметим, что секвенциальная топология пространства, построенного в начале § 5, индуцирует в любом подмножестве секвенциальную топологию, хотя это пространство не является топологическим.

Из теоремы 1.32 и предложений 1.13, 1.14 вытекает

Предложение 1.35. *Если в топологическом пространстве* $(X,\,\Lambda)$ *каждая точка имеет конечную или счетную фундаментальную систему открытых окрестностей, то* $(X,\,\Lambda)$ *является пространством Фреше–Урысона. При этом если* Λ *— операция однозначного предела, то* $(X,\,\Lambda)$ *хаусдорфово.* ▶

В связи с предложением 1.35 заметим, что в примере нетопологического пространства $(X,\,\Lambda)$, приведенном в начале § 5, каждая точка имеет конечную фундаментальную систему открытых окрестностей, хотя $(X,\,\Lambda)$ не есть пространство Фреше–Урысона. Кроме того, можно построить пример пространства с операцией однозначного предела $(X,\,\lambda)$ (см. § 10, n° 6), каждая точка которого имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, но $(X,\,\lambda)$ не является пространством Фреше–Урысона (в этом пространстве есть точка, которая не имеет конечной или счетной фундаментальной системы открытых окрестностей).

Из предложения 1.35 следует, что конечное топологическое пространство является пространством Фреше–Урысона.

Теорема 1.33. *Операция предела* Λ *в множестве* X *является операцией предела Фреше–Урысона тогда и только тогда, когда для каждой точки* $x\in X$ *и каждого счетного семейства таких сходящихся последовательностей* $\hat{x}_j=(x_{ij}:i\in\mathbb{N})$, $j\in\mathbb{N}$, *в* X, *что* $x\in\Lambda(\hat{\xi})$ *для последовательности* $\hat{\xi}=(\xi_j:j\in\mathbb{N})$ *некоторых точек* $\xi_j\in\Lambda(\hat{x}_j)$, *существуют такие последовательности натуральных чисел* $i_1<i_2<\ldots$ *и* $j_1\leqslant j_2\leqslant\ldots$, *что* $x\in\Lambda(\hat{x})$ *для* $\hat{x}=(x_{i_nj_n}:n\in\mathbb{N})$.

◀ Пусть $(X,\,\Lambda)$ — пространство Фреше–Урысона, а точка $x\in X$ и счетное семейство сходящихся последовательностей $\hat{x}_j=(x_{ij}:i\in\mathbb{N})$, $j\in\mathbb{N}$, в X такие, что $x\in\Lambda(\hat{\xi})$ для последовательности $\hat{\xi}=(\xi_j:j\in\mathbb{N})$ некоторых точек $\xi_j\in\Lambda(\hat{x}_j)$. Для произвольного $m\in\mathbb{N}$ и некоторой последовательности натуральных чисел $k_1<k_2<\ldots$ рассмотрим множество $A_m=\{x_{ij}:i\geqslant k_j,\ j\geqslant m\}$. Очевидно, $x\in(A_m^+)^+=(\overline{A}_m)^+=\overline{A}_m=A_m^+$. В силу $x\in A_m^+$ существует сходящаяся к x последовательность $(x_{s_{mn}\nu_{mn}}:n\in\mathbb{N})$ в A_m, где $(s_{mn}:n\in\mathbb{N})$ и $(\nu_{mn}:n\in\mathbb{N})$ — некоторые последовательности натуральных чисел, причем $\nu_{mn}\geqslant m$ и $s_{mn}\geqslant k_{\nu_{mn}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Если для некоторого $m\in\mathbb{N}$ множество $\{s_{mn}:n\in\mathbb{N}\}$

бесконечно, то существует сходящаяся к x последовательность $(x_{i_n j_n} : n \in \mathbb{N})$, где $i_1 < i_2 < \ldots$ и $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots$. При этом, очевидно, что если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ множество $\{\nu_{mn} : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно, то множество $\{s_{mn} : n \in \mathbb{N}\}$ тоже бесконечно. Учитывая это, рассмотрим случай, когда для любого $m \in \mathbb{N}$ оба указанных множества натуральных чисел конечны. В этом случае для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует такая точка $x_{s_m \nu_m} \in A_m$, где $\nu_m \geqslant m$ и $s_m \geqslant k_{\nu_m}$, что стационарная последовательность $\dot{x}_{s_m \nu_m}$ сходится к x. Но тогда последовательность $(x_{s_m \nu_m} : m \in \mathbb{N})$ тоже сходится к x. Однако множество натуральных чисел $\{\nu_m : m \in \mathbb{N}\}$, а следовательно, и $\{s_m : m \in \mathbb{N}\}$ бесконечны. Поэтому в рассматриваемом случае тоже существует сходящаяся к x последовательность $(x_{i_n j_n} : n \in \mathbb{N})$, где $i_1 < i_2 < \ldots$ и $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots$.

Докажем теперь обратное утверждение. Рассмотрим в пространстве (X, Λ) множество M и точку $x \in (M^+)^+$. Выберем последовательность $(\xi_j : j \in \mathbb{N})$ в M^+, сходящуюся к x, а для каждого $j \in \mathbb{N}$ выберем последовательность $(x_{ij} : i \in \mathbb{N})$ в M, сходящуюся к ξ_j. По условию, существует сходящаяся к x последовательность $(x_{i_n j_n} : n \in \mathbb{N})$ (монотонность последовательностей натуральных чисел i_n и j_n не используется). Поэтому $x \in M^+$. Значит, $(M^+)^+ = M^+$, т. е. $M^+ = \overline{M}$. Следовательно, (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона. ▶

Теорема 1.34. *Операция однозначного предела λ в множестве X является операцией предела Фреше–Урысона тогда и только тогда, когда для всякого счетного семейства таких сходящихся последовательностей $\hat{x}_j = (x_{ij} : i \in \mathbb{N})$, $j \in \mathbb{N}$, в X, что последовательность $\hat{\xi} = (\xi_j : j \in \mathbb{N})$ точек $\xi_j = \lambda(\hat{x}_j)$ сходится, существуют такие последовательности натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ и $j_1 \leqslant j_2 \leqslant \ldots$, что последовательность $\hat{x} = (x_{i_n j_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится и $\lambda(\hat{x}) = \lambda(\hat{\xi})$.* ▶

Для пространства Фреше–Урысона (X, λ) с операцией однозначного предела, имеющего секвенциальную топологию τ, произведение $(X, \lambda) \times (X, \lambda)$ может не быть пространством Фреше–Урысона, а топология $\tau \times \tau$ может не быть секвенциальной (см. пример в § 10, n° 5). В связи с этим и некоторыми доказанными выше утверждениями, относящимися к пространствам Фреше–Урысона, см. также [67], [68] и [76], с. 108, 122, 146.

Предложение 1.36. *Если прямое произведение (X, Λ) семейства пространств $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$ является пространством Фреше–Урысона, то каждое (X_i, Λ_i), $i \in I$, тоже является пространством Фреше–Урысона, причем для семейства* *произвольных подмножеств* $M_i \subset X_i$, $i \in I$, *справедливо равенство* $\overline{\prod_{i\in I} M_i} = \prod_{i\in I} \overline{M}_i$. ▶

Из теоремы 1.32 и предложений 1.31, 1.35 вытекает

Предложение 1.37. *Пусть* (X, Λ) — *прямое произведение конечного или счетного семейства пространств Фреше–Урысона* $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$. *Если в каждом* (X_i, Λ_i) *любая точка имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, то* (X, Λ) *является пространством Фреше–Урысона, имеющим секвенциальную топологию* $\prod_{i\in I} \tau_i$, *где* τ_i — *секвенциальная топология пространства* (X_i, Λ_i). ▶

§ 7. Полная решетка операций предела последовательности

Пусть X — непустое множество, а $\Psi(X)$ — множество всех отображений $\psi : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$. Введем в $\Psi(X)$ отношение частичного упорядочения, положив $\psi_1 \leqslant \psi_2$ для элементов ψ_1 и ψ_2 из $\Psi(X)$, если $\psi_1(\hat{x}) \subset \psi_2(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Если $\psi_1 \leqslant \psi_2$, то будем говорить, что ψ_1 *сильнее* ψ_2 (или ψ_2 *слабее* ψ_1).

Частично упорядоченное множество $\Psi(X)$ является полной решеткой, причем точной нижней и точной верхней границами непустого подмножества $E \subset \Psi(X)$ являются соответственно элементы ψ' и ψ'' из $\Psi(X)$, определенные равенствами

$$\psi'(\hat{x}) = \bigcap_{\psi\in E} \psi(\hat{x}), \quad \psi''(\hat{x}) = \bigcup_{\psi\in E} \psi(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Рассмотрим следующие частично упорядоченные подмножества в $\Psi(X)$. Всюду в дальнейшем

- $\mathcal{L}(X)$ — множество всех операций предела в X;
- $\mathcal{L}_0(X)$ — множество топологических операций предела в X;
- $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ — множество операций предела Фреше–Урысона в X;
- $\mathcal{L}'(X)$ — множество операций предела в X, по которым стационарная последовательность имеет один предел;
- $\mathcal{L}'_0(X)$ — множество топологических операций предела в X, по которым стационарная последовательность имеет один предел;
- $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)$ — множество операций предела Фреше–Урысона в X, по которым стационарная последовательность имеет один предел;
- $\mathcal{L}_1(X)$ — множество операций однозначного предела в X.

Очевидно, $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)\subset\widetilde{\mathcal{L}}(X)\subset\mathcal{L}_0(X)\subset\mathcal{L}(X)$, $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)\subset\mathcal{L}'_0(X)\subset\subset\mathcal{L}'(X)\subset\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}_1(X)\subset\mathcal{L}'_0(X)\subset\mathcal{L}_0(X)$.

Теорема 1.35. *Для частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}_0(X)$, $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$, $\mathcal{L}'(X)$, $\mathcal{L}'_0(X)$, $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)$, $\mathcal{L}_1(X)$ справедливы следующие утверждения.*

а) Каждое из этих множеств содержит наименьший элемент, являющийся операцией однозначного предела λ_*, по которой сходятся лишь почти стационарные последовательности (секвенциальная топология в $(X,\,\lambda_*)$ есть 2^X).

б) В каждом из $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}_0(X)$, $\mathcal{L}'(X)$, $\mathcal{L}'_0(X)$, $\mathcal{L}_1(X)$ любое непустое подмножество E имеет точную нижнюю границу Λ_1, определенную формулой $\Lambda_1(\hat{x})=\bigcap\limits_{\Lambda\in E}\Lambda(\hat{x})$, $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$.

в) Каждое из $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}_0(X)$, $\widetilde{\mathcal{L}}(X)$ содержит наибольший элемент, который есть операция предела Λ_*, определенная формулой $\Lambda_*(\hat{x})=X$, $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ (секвенциальная топология в $(X,\,\Lambda_*)$ есть $\{\varnothing,\,X\}$).

г) При конечном X каждое из $\mathcal{L}'(X)$, $\mathcal{L}'_0(X)$, $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)$, $\mathcal{L}_1(X)$ состоит из единственного элемента, который есть указанная выше операция однозначного предела λ_*.

д) При бесконечном X каждое из $\mathcal{L}'(X)$, $\mathcal{L}'_0(X)$, $\widetilde{\mathcal{L}}'(X)$ содержит наибольший элемент, который есть операция предела Λ'_*, определенная для $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ следующим образом: $\Lambda'_*(\hat{x})=X$, если $\hat{x}$ не обладает стационарной подпоследовательностью; $\Lambda'_*(\hat{x})=\{x\}$ для $x\in X$, если $\dot{x}$ является единственной стационарной подпоследовательностью для $\hat{x}$; $\Lambda'_*(\hat{x})=\varnothing$, если $\hat{x}$ обладает двумя стационарными подпоследовательностями, составленными различными точками. Секвенциальная топология пространства $(X,\,\Lambda'_*)$ состоит из $\varnothing$ и всех подмножеств множества X, имеющих конечные дополнения (она называется топологией Зарисского).

е) В каждом из $\mathcal{L}(X)$, $\mathcal{L}_0(X)$, $\mathcal{L}'(X)$, $\mathcal{L}'_0(X)$ всякое подмножество имеет точную верхнюю границу и, значит, каждое из этих множеств является полной решеткой. При этом если A обозначает одно из этих множеств, то точная верхняя граница Λ_A в A непустого подмножества $E=\{\Lambda_i : i\in I\}\subset A$ есть сильнейшая среди операций предела $\Lambda\in A$, удовлетворяющих включению $\bigcup\limits_{i\in I}\Lambda_i(\hat{x})\subset\Lambda(\hat{x})$, $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$, и определяется равенством $\Lambda_A(\hat{x})=\bigcap\limits_{\Lambda\in H}\Lambda(\hat{x})$, где H — множество всех верхних *границ в A подмножества E ($H \neq \varnothing$, поскольку в A существует наибольший элемент). Кроме того, точная верхняя граница в $\mathcal{L}(X)$ подмножества $E \subset \mathcal{L}(X)$ есть операция предела Λ' в X, определенная семейством $(U'_x : x \in X)$ систем окрестностей $U'_x = \bigcap_{i \in I} U_x^{(i)}$, где $\big(U_x^{(i)} : x \in X\big)$ — семейство полных систем окрестностей пространства (X, Λ_i), причем $(U'_x : x \in X)$ является семейством полных систем окрестностей пространства (X, Λ'), а секвенциальная топология τ' пространства (X, Λ') определяется равенством $\tau' = \bigcap_{i \in I} \tau_i$, где τ_i — секвенциальная топология пространства (X, Λ_i). Точная верхняя граница в $\mathcal{L}_0(X)$ подмножества $E \subset \mathcal{L}_0(X)$ есть операция предела, определенная топологией τ'. Если E — подмножество в $\mathcal{L}'(X)$ или $\mathcal{L}'_0(X)$, то его точная верхняя граница соответственно в $\mathcal{L}(X)$ или $\mathcal{L}_0(X)$ принадлежит соответственно $\mathcal{L}'(X)$ или $\mathcal{L}'_0(X)$.*

ж) При бесконечном X множество $\mathcal{L}_1(X)$ не является полной решеткой, однако любое его совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу и, значит, в $\mathcal{L}_1(X)$ существуют максимальные элементы.

◀ В доказательстве нуждается только утверждение ж). Каждое $\lambda \in \mathcal{L}_1(X)$ есть отображение $\lambda : \hat{X} \to X$, где $\hat{X} \subset X^{\mathbb{N}}$. Нахождение операций однозначного предела $\lambda_1 : \hat{X}_1 \to X$ и $\lambda_2 : \hat{X}_2 \to X$ в отношении $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ означает $\hat{X}_1 \subset \hat{X}_2$ и $\lambda_1(\hat{x}) = \lambda_2(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in \hat{X}_1$. Если λ_1 и λ_2 такие, что $\lambda_1(\hat{x}) \neq \lambda_2(\hat{x})$ для некоторого $\hat{x} \in \hat{X}_1 \cap \hat{X}_2$, то, очевидно, множество $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ не имеет верхней границы в $\mathcal{L}_1(X)$. В случае бесконечного X легко построить операции однозначного предела λ_1 и λ_2 в X, для которых множество $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ не имеет верхней границы в $\mathcal{L}_1(X)$. Поэтому $\mathcal{L}_1(X)$ не является полной решеткой. Рассмотрим совершенно упорядоченную систему $E = \{\lambda_i : i \in I\}$ операций однозначного предела λ_i в X. Докажем, что E имеет точную верхнюю границу в $\mathcal{L}_1(X)$. Пусть λ_i для каждого $i \in I$ есть отображение $\lambda_i : \hat{X}_i \to X$. Обозначим $\hat{X} = \bigcup_{i \in I} \hat{X}_i$ и отображение $\lambda : \hat{X} \to X$ определим при помощи равенства $\lambda(\hat{x}) = \lambda_i(\hat{x})$ для $\hat{x} \in \hat{X}_i$. В силу совершенной упорядоченности E определение λ корректно, так как если $\hat{x} \in \hat{X}_{i'}$ и $\hat{x} \in \hat{X}_{i''}$, то $\lambda_{i'}(\hat{x}) = \lambda_{i''}(\hat{x})$. Рассмотрим множество

$\hat{X}'$ таких $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{X}$ и $\lambda(\hat{x}_1) = \lambda(\hat{x}_2)$ для любых $\hat{x}_1 \prec \hat{x}$ и $\hat{x}_2 \prec \hat{x}$ из $\hat{X}$. Очевидно, $\hat{X} \subset \hat{X}'$. Отображение $\lambda' : \hat{X}' \to X$ определим при помощи равенства $\lambda'(\hat{x}) = \lambda(\hat{x}')$, где $\hat{x} \in \hat{X}'$, $\hat{x}' \prec \hat{x}$ и $\hat{x}' \in \hat{X}$. Из определения $\hat{X}'$ следует, что λ' определено корректно. С использованием теоремы 1.5 легко проверяется, что λ' является операцией однозначного предела в X. Из построения λ' ясно, что оно является точной верхней границей подмножества E в $\mathcal{L}_1(X)$. Отсюда в силу леммы Цорна следует, что в $\mathcal{L}_1(X)$ существуют максимальные элементы. ►

Теорема 1.36. *Операция однозначного предела λ в X является максимальным элементом частично упорядоченного множества $\mathcal{L}_1(X)$ тогда и только тогда, когда пространство (X, λ) секвенциально компактно.*

◄ Пусть отображение $\lambda : \hat{X} \to X$, где $\hat{X} \subset X^{\mathbb{N}}$, является операцией однозначного предела в X и максимальным элементом в $\mathcal{L}_1(X)$. Докажем, что (X, λ) секвенциально компактно. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\hat{x}_0$ в (X, λ), не обладающая сходящейся подпоследовательностью. Пусть $x_0 \in X$. Обозначим через $\hat{X}_0$ множество таких $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует такое $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$, что либо $\hat{x}'' \prec \hat{x}_0$, либо $\hat{x}'' \in \hat{X}$ и $\lambda(\hat{x}'') = x_0$. Очевидно, $\hat{x}_0 \in \hat{X}_0$ и, следовательно, $\hat{X}_0 \backslash \hat{X} \neq \emptyset$. Положим $\hat{X}_1 = \hat{X} \cup \hat{X}_0$ и отображение $\lambda_1 : \hat{X}_1 \to X$ определим для $\hat{x} \in \hat{X}_1$ следующим образом: $\lambda_1(\hat{x}) = \lambda(\hat{x})$ при $\hat{x} \in \hat{X}$ и $\lambda_1(\hat{x}) = x_0$ при $\hat{x} \in \hat{X}_0$. Легко проверить, что λ_1 обладает указанными в теореме 1.5 свойствами и, следовательно, является операцией однозначного предела в X. Однако $\lambda < \lambda_1$. Поэтому λ не является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1(X)$. Полученное противоречие доказывает, что (X, λ) секвенциально компактно.

Пусть, обратно, (X, λ) секвенциально компактно, а λ_1 — операция однозначного предела в X, удовлетворяющая условию $\lambda \leqslant \lambda_1$. Докажем, что $\lambda_1 = \lambda$. Рассмотрим в (X, λ_1) сходящуюся последовательность $\hat{x}$. Пусть $\hat{x}' \prec \hat{x}$. В силу секвенциальной компактности (X, λ), существует подпоследовательность $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$, сходящаяся в (X, λ). Из условия $\lambda \leqslant \lambda_1$ следует, что $\lambda(\hat{x}'') = \lambda_1(\hat{x}'') = \lambda_1(\hat{x})$. Таким образом, любая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся в (X, λ), причем для любых двух подпоследовательностей $\hat{x}_1 \prec \hat{x}$ и $\hat{x}_2 \prec \hat{x}$, сходящихся в (X, λ), имеет место $\lambda(\hat{x}_1) = \lambda(\hat{x}_2) = \lambda_1(\hat{x})$. Отсюда в силу теоремы 1.5 следует, что $\hat{x}$ сходится в (X, λ) и $\lambda(\hat{x}) = \lambda_1(\hat{x})$. Поэтому $\lambda_1 = \lambda$ и, значит, λ является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1(X)$. ▶

Предложение 1.38. *Пусть $E = \{\Lambda_i : i \in I\}$ — система операций предела в множестве X, $X' \subset X$, а $E' = \{\Lambda'_i : i \in I\}$ — система операций предела в X', где Λ'_i для каждого $i \in I$ есть ограничение операции предела Λ_i на X'. Если Λ_1 и Λ_2 — соответственно точная нижняя и точная верхняя границы системы E в $\mathcal{L}(X)$, а Λ'_1 и Λ'_2 — соответственно ограничения операций предела Λ_1 и Λ_2 на X', то Λ'_1 и Λ'_2 являются соответственно точной нижней и точной верхней границами системы E' в $\mathcal{L}(X')$.*

◀ Утверждение, относящееся к Λ'_1, следует из равенств

$$\Lambda'_1(\hat{x}) = X' \cap \Lambda_1(\hat{x}) = X' \bigcap \bigcap_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x}) = \bigcap_{i \in I} (X' \cap \Lambda_i(\hat{x})) = \bigcap_{i \in I} \Lambda'_i(\hat{x})$$

для всех $\hat{x} \in X'^{\mathbb{N}}$, а утверждение, относящееся к Λ'_2, следует из теоремы 1.9 и утверждения е) теоремы 1.35. ▶

Рассмотрим в X также частично упорядоченные множества

- операций предела отделимых пространств;
- операций предела хаусдорфовых пространств;
- операций однозначного предела Фреше–Урысона;
- операций предела отделимых пространств Фреше–Урысона (такие пространства хаусдорфовы).

Утверждения а) и г) теоремы 1.35 справедливы также для этих частично упорядоченных множеств, причем утверждение б) теоремы 1.35 справедливо для первых двух из них. Однако в каждом из этих четырех множеств непустое подмножество может не иметь верхней границы, даже если оно совершенно упорядочено (см. примеры в § 10, n° 15 и n° 16).

Предложение 1.39. *Операция предела Λ' в X, определенная секвенциальной топологией пространства (X, Λ), является сильнейшей топологической операцией предела в X, удовлетворяющей условию $\Lambda \leqslant \Lambda'$.* ▶

Предложение 1.40. *Пусть $\{\Lambda_i : i \in I\}$ — система операций предела в множестве X; Λ'_i для каждого $i \in I$ — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией пространства (X, Λ_i); Λ — сильнейшая операция предела в X, удовлетворяющая условиям $\Lambda_i \leqslant \Lambda$, $i \in I$; Λ' — сильнейшая топологическая операция предела в X, удовлетворяющая условиям*

$\Lambda_i \leqslant \Lambda'$, $i \in I$. Тогда Λ' является сильнейшей топологической операцией предела в X, удовлетворяющей условиям $\Lambda'_i \leqslant \Lambda'$, $i \in I$, и может быть определена секвенциальной топологией пространства (X, Λ). ▶

Замечание 1.10. Пусть $\widetilde{\Psi}(X)$ — множество всех отображений $\psi : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, каждое из которых определяется с помощью некоторой системы $\{\Lambda_j : j \in J\}$ операций предела Λ_j в множестве X по формуле

$$\psi(\hat{x}) = \bigcup_{j \in J} \Lambda_j(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Как было отмечено в замечании 1.2, отображение ψ может не быть операцией предела в принятом здесь смысле (оно обладает указанными в теореме 1.3 свойствами 1) и 2)). Однако так определенные отображения могут быть использованы для расширения понятия сходимости последовательностей. Примером может служить сходимость почти всюду (см. § 10, n° 1 и главу II, § 10, n° 2). Отображение $\psi \in \widetilde{\Psi}(X)$, обладающее всеми указанными в теореме 1.3 свойствами, кроме, быть может, свойства 3), называется *операцией псевдопредела* в X, а каждая точка $x \in \psi(\hat{x})$ называется *ψ-псевдопределом* последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Частично упорядоченное множество $\widetilde{\Psi}(X)$ является полной решеткой, причем точной нижней и точной верхней границами его непустого подмножества $E = \{\psi_i : i \in I\}$ являются соответственно отображения ψ' и ψ'', определенные равенствами

$$\psi'(\hat{x}) = \bigcap_{i \in I} \psi_i(\hat{x}), \quad \psi''(\hat{x}) = \bigcup_{i \in I} \psi_i(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Действительно, для каждого $i \in I$ существует такая система $\{\Lambda_k^{(i)} : k \in J_i\}$ операций предела $\Lambda_k^{(i)}$ в X, что $\psi_i(\hat{x}) = \bigcup\limits_{k \in J_i} \Lambda_k^{(i)}(\hat{x})$. Поэтому если обозначить $J = \prod\limits_{i \in I} J_i$, $S = \bigcup\limits_{i \in I} (\{i\} \times J_i)$ и $j_i = pr_i(j)$ для $j \in J$, $i \in I$, то

$$\psi'(\hat{x}) = \bigcup_{j \in J} \bigcap_{i \in I} \Lambda_{j_i}^{(i)}(\hat{x}), \quad \psi''(\hat{x}) = \bigcup_{(i,k) \in S} \Lambda_k^{(i)}(\hat{x}).$$

Отсюда с учетом того, что для каждого $j \in J$ отображение $\widetilde{\Lambda}_j : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, определенное равенством $\widetilde{\Lambda}_j(\hat{x}) = \bigcap\limits_{i \in I} \Lambda_{j_i}^{(i)}(\hat{x})$, является операцией предела в X, получаем $\psi' \in \widetilde{\Psi}(X)$ и $\psi'' \in \widetilde{\Psi}(X)$.

§ 8. Компактности

В § 3 было введено понятие секвенциально компактного множества. Введем еще несколько понятий компактности.

В пространстве (X, Λ) покрытие E множества M, состоящее из открытых множеств, называется открытым покрытием множества M.

Определение 1.20. *В пространстве (X, Λ) покрытие E множества M называется окрестностным покрытием для M, если система $\{A^- : A \in E\}$ покрывает M.*

Очевидно, что открытое покрытие является окрестностным покрытием.

Определение 1.21. *В пространстве (X, Λ) множество M называется окрестностно (окрестностно счетно) компактным, если из любого его окрестностного (окрестностного счетного) покрытия можно выделить конечное подпокрытие, не обязательно окрестностное; окрестностно относительно компактным, если $\overline{M}$ окрестностно компактно.*

Если K — замкнутое множество в подпространстве пространства (X, Λ) с носителем M, то $X \backslash K$ является окрестностью множества $M \backslash K$ в (X, Λ). Поэтому если множество M окрестностно компактно, то окрестностно компактно любое его подмножество, которое замкнуто в подпространстве с носителем M. Если же множество окрестностно относительно компактно, то этим свойством обладает любое его подмножество. Окрестностно компактное множество может не быть окрестностно относительно компактным (см. пример в § 10, n° 13).

В силу теоремы 1.9 в пространстве (X, Λ) множество M окрестностно (окрестностно счетно) компактно тогда и только тогда, когда оно обладает этим свойством в подпространстве с носителем M.

Теорема 1.37. *В пространстве (X, Λ) множество окрестностно счетно компактно тогда и только тогда, когда оно секвенциально компактно.*

◀ Пусть подмножество $M \subset X$ окрестностно счетно компактно, а $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots) \in M^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим $K_i = \{x_n : n \geqslant i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Докажем, что $M \bigcap \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} K_i^+ = K \neq \varnothing$. Предположим противное. Обозначим $A_i = X \backslash K_i$, $i \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 1.12 и сделанного предположения имеем $A_i^- = X \backslash K_i^+$, $i \in \mathbb{N}$, и $M \subset \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i^-$. Значит, система $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ является окрестностным покрытием для M.

Однако $K_n \subset M$, $K_n \neq \varnothing$ и $K_n \bigcap \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому из этого счетного покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. А это противоречит условию окрестностно счетной компактности M. Следовательно, $K \neq \varnothing$. Пусть $x \in K$. Тогда любая окрестность точки x имеет непустое пересечение с каждым K_i, $i \in \mathbb{N}$, и, значит, последовательность $\hat{x}$ является частой в любой окрестности точки x. Поэтому в силу теоремы 1.13 $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к $x \in M$.

Пусть, обратно, подмножество $M \subset X$ секвенциально компактно, а $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — окрестностное счетное покрытие для M. Предположим из этого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда $M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. В силу секвенциальной компактности M существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $M \cap \Lambda(\hat{x}') \neq \varnothing$. Пусть $x \in M \cap \Lambda(\hat{x}')$. Согласно выбору $\hat{x}$, множество $[\hat{x}']$ нельзя покрыть конечным числом множеств A_n. С другой стороны, $x \in A_m^-$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Поэтому A_m, будучи окрестностью точки x, содержит все члены подпоследовательности $\hat{x}'$, кроме конечного их числа. Значит, $[\hat{x}']$ можно покрыть конечным числом множеств A_n. Полученное противоречие доказывает, что из рассматриваемого покрытия множества M можно выделить конечное подпокрытие. ►

Дадим описание окрестностно компактного множества при помощи центрированных систем его подмножеств.

Теорема 1.38. *В пространстве (X, Λ) множество M окрестностно компактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы $\{K_i : i \in I\}$ подмножеств в M*

$$M \bigcap \bigcap_{i \in I} K_i^+ \neq \varnothing. \tag{1}$$

◄ Пусть M окрестностно компактно, а $\{K_i : i \in I\}$ — центрированная система подмножеств в M. Предположим в (1) пересечение пусто. Обозначим $A_i = X \setminus K_i$, $i \in I$. Очевидно, из сделанного предположения следует, что

$$M \subset \bigcup_{i \in I} A_i^- \tag{2}$$

и, значит, система $\{A_i : i \in I\}$ является окрестностным покрытием множества M. В силу окрестностной компактности M из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие

$\{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}\}$, т. е.

$$M \subset \bigcup_{n=1}^{m} A_{i_n}. \tag{3}$$

Но тогда

$$\bigcap_{n=1}^{m} K_{i_n} = \varnothing \tag{4}$$

и, следовательно, система $\{K_i : i \in I\}$ не центрирована. Полученное противоречие доказывает (1).

Пусть, обратно, имеет место (1), а $\{A_i : i \in I\}$ — окрестностное покрытие множества M, т. е. имеет место (2). Обозначим $K_i = M \setminus A_i$, $i \in I$. Из (2) следует, что в (1) пересечение пусто. Но тогда система $\{K_i : i \in I\}$ не центрирована. Поэтому для некоторой конечной системы $\{K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_m}\}$ имеет место (4), из которого следует (3). Тем самым из рассматриваемого покрытия множества M можно выделить конечное подпокрытие. Следовательно, M окрестностно компактно. ▶

Теорема 1.39. *В пространстве (X, Λ) для окрестностно счетной компактности (т. е. секвенциальной компактности) множества M необходимо, чтобы*

$$M \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^+ \neq \varnothing \tag{5}$$

для любой центрированной системы $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ подмножеств в M, и достаточно, чтобы для любой последовательности $(x_i : i \in \mathbb{N})$ попарно различных точек из M этому условию удовлетворяла система множеств $K_n = \{x_i : i \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Необходимость доказывается таким же образом, как в теореме 1.38. Докажем достаточность. Пусть $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — окрестностное счетное покрытие множества M, т. е. имеет место (2) с $I = \mathbb{N}$. Предположим из этого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел $j_1 < j_2 < \ldots$, что если для множеств $B_n = \bigcup_{i=1}^{j_n} A_i$, $n \in \mathbb{N}$, обозначить $H_n = M \setminus B_n$, то $H_{n+1} \subset H_n$ и $H_{n+1} \neq H_n$. В силу $A_n \subset B_n$ и включения (2) с $I = \mathbb{N}$ имеем $A_n^- \subset B_n^-$ и $M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n^-$. Однако $M \cap H_n^+ \subset M \setminus B_n^-$ и поэтому $M \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n^+ = \varnothing$. Выбирая для каждого $n \in \mathbb{N}$ некоторое $x_n \in H_n \setminus H_{n+1}$, получим последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ попарно различных точек из M. Положим $K_n=\{x_i : i\geqslant n\}$, $n\in\mathbb{N}$. Так как $K_n\subset H_n$, то $M\bigcap\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n^+=\varnothing$. Однако это противоречит условию (5). Значит, из рассматриваемого покрытия множества M можно выделить конечное подпокрытие. ►

Дадим описание окрестностно компактного множества при помощи сходящихся направленностей. С этой целью сначала приведем некоторые свойства направленностей в пространстве с операцией предела последовательности.

Определение 1.22. *В пространстве (X, Λ) точка x называется пределом направленности $\check{x}$, а направленность $\check{x}$ называется сходящейся к x, если направленность $\check{x}$ почти вся лежит в каждой окрестности точки x.*

Теорема 1.40. *В пространстве (X, Λ) направленность $\check{x}$ является частой в каждой окрестности точки x тогда и только тогда, когда x является пределом некоторого $\check{y}\prec\check{x}$.*

◄ Пусть направленность $\check{x}=(x_i : i\in I)$ является частой в каждой окрестности точки x, а U_x — полная система окрестностей точки x. Рассмотрим множество J таких пар $j=(i, u)$, что $i\in I$, $u\in U_x$ и $x_i\in u$. Множество J частично предупорядочим, положив $j'\leqslant j''$ для элементов $j'=(i', u')$ и $j''=(i'', u'')$ из J, если $i'\leqslant i''$ и $u''\subset u'$. Тогда J становится направленным. Действительно, для j' и j'' пересечение $u=u'\cap u''$ есть окрестность точки x. Поскольку I направленное, существует такое $i_0\in I$, что $i'\leqslant i_0$ и $i''\leqslant i_0$. В силу того, что $\check{x}$ является частой в u, существует такое $i\in I$, что $i_0\leqslant i$ и $x_i\in u$. Тогда $j'\leqslant j$ и $j''\leqslant j$ для $j=(i, u)\in J$. Тем самым J направленное. Для произвольного $j=(i, u)\in J$ положим $y_j=x_i$. Тогда направленность $\check{y}=(y_j : j\in J)$ является поднаправленностью для $\check{x}$. Действительно, для произвольного $i\in I$ возьмем такое $j\in J$, что $j=(i, u)$ (например, можно взять $u=X$). Тогда для любого $j'=(i', u')\in J$, такого, что $j\leqslant j'$, имеем $i\leqslant i'$ и $y_{j'}=x_{i'}$. Следовательно, $\check{y}\prec\check{x}$. Докажем, что точка x является пределом для $\check{y}$. Пусть u — окрестность точки x. Поскольку $\check{x}$ является частой в u, существует такое $i\in I$, что $x_i\in u$. Положим $j=(i, u)$. Для произвольного $j'=(i', u')\in J$, удовлетворяющего условию $j\leqslant j'$, имеем $y_{j'}=x_{i'}\in u'\subset u$. Тем самым $\check{y}$ почти вся лежит в каждой окрестности точки x и, следовательно, сходится к x.

Пусть, обратно, направленность $\check{x}=(x_i : i\in I)$ обладает поднаправленностью $(y_j : j\in J)$, сходящейся к точке x, а u — окрестность точки x. Тогда существует такое $j'\in J$, что $y_j\in u$ для всех $j\geqslant j'$. Рассмотрим произвольное $i_0\in I$. Для i_0 существует такое

$j_0 \in J$, что $y_j = x_i$ при каждом $j \geqslant j_0$ с некоторым $i \geqslant i_0$. Возьмем $j \in J$ так, чтобы $j_0 \leqslant j$ и $j' \leqslant j$. Тогда $x_i = y_j \in u$ для некоторого $i \geqslant i_0$. А это означает, что $\check{x}$ является частой в каждой окрестности точки x. ▶

Предложение 1.41. *В пространстве (X, Λ) точка x является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда x является пределом некоторой направленности в $M \backslash \{x\}$.*

◀ Если x — предельная точка для M, то по определению она является пределом некоторой последовательности в $M \backslash \{x\}$. Если же x является пределом некоторой направленности в $M \backslash \{x\}$, то, очевидно, каждая окрестность точки x имеет непустое пересечение с $M \backslash \{x\}$. Поэтому, согласно теореме 1.10, x является предельной точкой для M. ▶

Теорема 1.41. *В пространстве (X, Λ) множество M окрестностно компактно тогда и только тогда, когда любая направленность в M обладает поднаправленностью, имеющей предел в M.*

◀ Пусть M окрестностно компактно, а $\check{x} = (x_i : i \in I)$ — направленность в M. Обозначим $K_i = \{x_{i'} : i' \geqslant i\}$, $i \in I$. Система $\{K_i : i \in I\}$ центрирована. Поэтому в силу теоремы 1.38 пересечение системы $\{K_i^+ : i \in I\}$ содержит некоторую точку $x \in M$. Но тогда $u \cap K_i \neq \varnothing$ для каждых $i \in I$ и окрестности u точки x, т. е. существует такое $i' \geqslant i$, что $x_{i'} \in u$. А это означает, что $\check{x}$ является частой в любой окрестности точки x. Отсюда в силу теоремы 1.40 следует существование поднаправленности направленности $\check{x}$, сходящейся к x.

Пусть, обратно, любая направленность в M обладает поднаправленностью, имеющей предел в M. Отсюда в силу теоремы 1.40 следует, что для каждой направленности в M существует такое $x \in M$, что эта направленность является частой в любой окрестности точки x. Рассмотрим произвольную центрированную систему E подмножеств в M. Обозначим через S систему всех пересечений конечного числа множеств из системы E. Множество J всех пар $j = (x, s)$, где $s \in S$ и $x \in s$, частично предупорядочим, положив $j_1 \leqslant j_2$ для элементов $j_1 = (x_1, s_1)$ и $j_2 = (x_2, s_2)$ из J, если $s_2 \subset s_1$. Тогда J становится направленным. Рассмотрим направленность $\check{y} = (y_j : j \in J)$ в M, где $y_j = x$ для $j = (x, s) \in J$. По условию, существует такое $y \in M$, что $\check{y}$ является частой в каждой окрестности точки y. Покажем, что $y \in s^+$ для любого $s \in S$. Пусть u — окрестность точки y, а $j = (x, s) \in J$. Тогда существует такое $j' \geqslant j$, что $y_{j'} \in u$. Если

$j' = (x', u')$, то $y_{j'} = x' \in s' \subset s$ и, значит, $y_{j'} \in u \cap s \neq \varnothing$. Отсюда в силу теоремы 1.10 следует, что $y \in s^+$. Поэтому пересечение всех множеств s^+, $s \in S$, содержит точку из M. Однако $E \subset S$ и, следовательно, пересечение квазизамыканий всех множеств из E содержит точку из M. Отсюда в силу теоремы 1.38 следует окрестностная компактность M. ►

Определение 1.23. *В пространстве (X, Λ) множество M называется квазикомпактным, если любая направленность в M обладает сходящейся поднаправленностью.*

Теорема 1.42. *В пространстве (X, Λ) множество M квазикомпактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы $\{K_i : i \in I\}$ подмножеств в M*

$$\bigcap_{i \in I} K_i^+ \neq \varnothing. \tag{6}$$

◄ Пусть M квазикомпактно, а $E = \{K_i : i \in I\}$ — центрированная система подмножеств в M. Обозначим через S систему всех пересечений конечного числа множеств из E. Множество J всех пар $j = (x, s)$, где $s \in S$ и $x \in s$, частично предупорядочим, положив $j_1 \leqslant j_2$ для элементов $j_1 = (x_1, s_1)$ и $j_2 = (x_2, s_2)$ из J, если $s_2 \subset s_1$. Тогда J становится направленным. Рассмотрим направленность $\check{y} = (y_j : j \in J)$ в M, где $y_j = x$ для $j = (x, s) \in J$. По условию, существует поднаправленность $\check{y}' \prec \check{y}$, сходящаяся к некоторому $y \in X$. Но тогда в силу теоремы 1.40 $\check{y}$ является частой в каждой окрестности точки y. Отсюда повторением рассуждений, сделанных в доказательстве теоремы 1.41, получим $y \in s^+$ для любого $s \in S$. С учетом $K_i \in S$ имеем $y \in K_i^+$ для всех $i \in I$. Значит, имеет место (6).

Пусть, обратно, имеет место (6), а $\check{x} = (x_i : i \in I)$ — направленность в M. Обозначим $K_i = \{x_{i'} : i' \geqslant i\}$, $i \in I$. Система $\{K_i : i \in I\}$ подмножеств в M центрирована. В силу (6) существует такое $x \in X$, что $x \in K_i^+$ для всех $i \in I$. Отсюда повторением рассуждений, сделанных в доказательстве теоремы 1.41, получаем, что направленность $\check{x}$ является частой в любой окрестности точки x. Но тогда в силу теоремы 1.40 $\check{x}$ обладает поднаправленностью, сходящейся к x. ►

Теорема 1.43. *В пространстве (X, Λ) для секвенциальной квазикомпактности множества M необходимо, чтобы*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n^+ \neq \varnothing \tag{7}$$

для любой центрированной системы $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ подмножеств в M, и достаточно, чтобы для любой последовательности

$(x_i : i \in \mathbb{N})$ *попарно различных точек из* M *этому условию удовлетворяла система множеств* $K_n = \{x_i : i \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ Пусть множество M секвенциально квазикомпактно, а $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ — центрированная система подмножеств в M. Обозначим $H_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} K_i$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $H_{n+1} \subset H_n$, $H_n \subset K_n$ и $H_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $x_n \in H_n$, $n \in \mathbb{N}$, и рассмотрим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in M^{\mathbb{N}}$. По условию, существует подпоследовательность $\hat{x}' \prec \hat{x}$, сходящаяся к некоторому $x \in X$. Так как $\hat{x}'$ почти вся лежит в каждом H_n, то $x \in H_n^+$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $x \in K_n^+$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, значит, имеет место (7).

Докажем достаточность. Рассмотрим произвольное $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$. Ясно, что $\hat{x}$ обладает либо стационарной подпоследовательностью, либо подпоследовательностью $\hat{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ попарно различных точек. Во втором случае, по условию, для $K_n = \{y_i : i \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$, выполняется (7). Пусть $y \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n^+$. Тогда любая окрестность точки y имеет непустое пересечение с каждым K_n, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\hat{y}$ является частой в каждой окрестности точки y. Но тогда в силу теоремы 1.13 $\hat{y}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к y. Тем самым в любом случае $\hat{x}$ обладает сходящейся подпоследовательностью. ▶

Приведем из общей топологии некоторые понятия и связанные с ними предложения, методы доказательств которых были применены выше к теоремам 1.37—1.41. Как было отмечено в n° 3 раздела обозначений и определений, если τ — топология в множестве X, то для пары (X, τ) будем использовать название *пространство с топологией*, вместо ее общепринятого названия *топологическое пространство*, используемого здесь в смысле топологизируемого пространства. Там же приведены понятия подпространства с топологией и прямого произведения семейства пространств с топологией. В пространстве (X, τ) множества из топологии τ называются τ-открытыми, а их дополнения — τ-замкнутыми множествами. Каждое множество из τ называется также τ-открытой окрестностью произвольной своей точки. Точка $x \in X$ называется τ-точкой накопления подмножества $M \subset X$, если любая τ-открытая окрестность точки x имеет непустое пересечение с $M \setminus \{x\}$. Пересечение всех τ-замкнутых множеств, содержащих M, называется τ-замыканием множества M, обозначается через $\overline{M}$ и совпадает с объединением M и множества его τ-точек накопления. Точка $x \in M$ называется τ-внутренней точкой множества M, если M содержит τ-открытую окрестность точки x.

Определение 1.24. *В пространстве с топологией* (X, τ) *точка* x *называется* τ*-пределом направленности* $\check{x}$*, а направленность* $\check{x}$ *называется* τ*-сходящейся к* x*, если направленность* $\check{x}$ *почти вся лежит в каждой* τ*-открытой окрестности точки* x.

Определение 1.25. *В пространстве с топологией* (X, τ) *множество* M *называется* τ*-компактным* (τ*-счетно компактным), если из любого его покрытия (счетного покрытия), состоящего из* τ*-открытых множеств, можно выделить конечное подпокрытие;* τ*-относительно* (τ*-относительно счетно) компактным, если* $\overline{M}$ τ*-компактно* (τ*-счетно компактно).*

При помощи рассуждений, сделанных в доказательстве теоремы 1.40, доказывается

Теорема 1.44. *В пространстве с топологией* (X, τ) *направленность* $\check{x}$ *является частой в каждой* τ*-открытой окрестности точки* x *тогда и только тогда, когда* x *является* τ*-пределом некоторого* $\check{y} \prec \check{x}$. ▶

Теорема 1.45. *В пространстве с топологией* (X, τ) *точка* x *является* τ*-точкой накопления множества* M *тогда и только тогда, когда* x *является* τ*-пределом некоторой направленности в* $M \backslash \{x\}$.

◀ Пусть x является τ-точкой накопления множества M. Тогда $v \cap M \backslash \{x\} \neq \varnothing$ для любой τ-открытой окрестности v точки x. Обозначим через J множество всех пар $j = (y, v)$, где v есть τ-открытая окрестность точки x, а $y \in v \cap M \backslash \{x\}$. Множество J частично предупорядочим, положив $j_1 \leqslant j_2$ для элементов $j_1 = (y_1, v_1)$ и $j_2 = (y_2, v_2)$ из J, если $v_2 \subset v_1$. Тогда J становится направленным. Рассмотрим направленность $\check{y} = (y_j : j \in J)$ в $M \backslash \{x\}$, где $y_j = y$ для $j = (y, v) \in J$. Очевидно, $\check{y}$ почти вся лежит в каждой τ-открытой окрестности точки x. Следовательно, x является τ-пределом для $\check{y}$.

Обратно, если точка x является τ-пределом некоторой направленности в $M \backslash \{x\}$, то, очевидно, каждая τ-открытая окрестность точки x имеет непустое пересечение с $M \backslash \{x\}$ и, следовательно, x является τ-точкой накопления множества M. ▶

Предложение 1.42. *Если в пространстве с топологией* (X, τ) *одноточечное множество* τ*-замкнуто, то любая* τ*-открытая окрестность* τ*-точки накопления* x *множества* M *содержит бесконечное множество точек из* M.

◀ Пусть v является τ-открытой окрестностью точки x. Предположим множество $K = v \cap M \backslash \{x\}$ конечно. Тогда K τ-замкнуто, а $v' = X \setminus K$ является τ-открытой окрестностью точки x. Поэтому $v \cap v'$ тоже является τ-открытой окрестностью точки x и не содержит точек из $M \setminus \{x\}$. А это означает, что x не является τ-точкой накопления для M. ▶

Теорема 1.46. *В пространстве с топологией (X, τ) множество M τ-счетно компактно тогда и только тогда, когда для каждого $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ существует такое $x \in M$, что $\hat{x}$ является частым в любой τ-открытой окрестности точки x.*

◀ Пусть M τ-счетно компактно, а $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in M^{\mathbb{N}}$. Обозначим $M_k = \{x_n : n \geqslant k\}$, $k \in \mathbb{N}$, и $K = M \bigcap \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \overline{M}_k$. Тогда $K \neq \varnothing$, поскольку в противном случае счетная система $\{A_k : k \in \mathbb{N}\}$ τ-открытых множеств $A_k = X \setminus \overline{M}_k$ является покрытием для M, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие, что противоречит условию τ-счетной компактности M. Пусть $x \in K$. Так как любая τ-открытая окрестность v точки x имеет непустое пересечение с каждым M_k, $k \in \mathbb{N}$, то v содержит бесконечное число членов последовательности $\hat{x}$.

Пусть, обратно, для каждого $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ существует такое $x \in M$, что $\hat{x}$ является частым в любой τ-открытой окрестности точки x. Рассмотрим произвольное τ-открытое счетное покрытие $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества M. Предположим из этого покрытия нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда $M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E_n \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $x_n \in E_n$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что каждое из множеств A_n содержит лишь конечное число членов последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. Однако, по условию, существует такое $x \in M$, что $\hat{x}$ является частой в любой τ-открытой окрестности точки x. Так как $x \in A_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то τ-открытая окрестность A_m точки x содержит бесконечное число членов последовательности $\hat{x}$. Полученное противоречие доказывает, что из рассматриваемого покрытия можно выделить конечное подпокрытие. ▶

Из теоремы 1.46 с учетом предложения 1.42 вытекает

Следствие 1.8. *В пространстве с топологией (X, τ) любое бесконечное подмножество τ-счетно компактного множества M имеет τ-точку накопления в M. Обратно, если в (X, τ) одноточечное множество τ-замкнуто, а любое счетное подмножество множества M имеет τ-точку накопления в M, то M τ-счетно компактно.* ▶

В [5], с. 236, и [42], с. 103, обратное утверждение следствия 1.8 сформулировано без условия τ-замкнутости одноточечного множества, что не верно (см. пример в § 10, n° 12).

Приведем еще следующие три теоремы, доказательства которых аналогичны доказательствам теорем 1.38, 1.39 и 1.41.

Теорема 1.47. *В пространстве с топологией* (X, τ) *множество* M τ*-компактно тогда и только тогда, когда* $M \bigcap \bigcap\limits_{i\in I} \overline{K}_i \neq \varnothing$ *для любой центрированной системы* $\{K_i : i \in I\}$ *подмножеств в* M. ▶

Теорема 1.48. *В пространстве с топологией* (X, τ) *для* τ*-счетной компактности множества* M *необходимо, чтобы* $M \bigcap \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \overline{K}_n \neq \varnothing$ *для любой центрированной системы* $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ *подмножеств в* M*, и достаточно, чтобы для любой последовательности* $(x_i : i \in \mathbb{N})$ *попарно различных точек из* M *этому условию удовлетворяла система множеств* $K_n = \{x_i : i \geqslant n\}$, $n \in \mathbb{N}$. ▶

Теорема 1.49. *В пространстве с топологией* (X, τ) *множество* M τ*-компактно тогда и только тогда, когда любая направленность в* M *обладает поднаправленностью, имеющей* τ*-предел в* M. ▶

Определение 1.26. *В пространстве с топологией* (X, τ) *множество* M *называется* τ*-квазикомпактным (*τ*-счетно квазикомпактным), если для каждой направленности (последовательности) в* M *существует такое* $x \in X$*, что эта направленность (последовательность) является частой в любой* τ*-открытой окрестности точки* x.

Непосредственно из теоремы 1.44 вытекает

Теорема 1.50. *В пространстве с топологией* (X, τ) *множество* M τ*-квазикомпактно тогда и только тогда, когда любая направленность в* M *обладает* τ*-сходящейся поднаправленностью.* ▶

В силу предложения 1.42 справедливо также следующее предложение, аналогичное следствию 1.8.

Предложение 1.43. *В пространстве с топологией* (X, τ) *бесконечное подмножество* τ*-счетно квазикомпактного множества* M *имеет* τ*-точку накопления в* X*. Обратно, если в* (X, τ) *одноточечное множество* τ*-замкнуто, а счетное подмножество в* M *имеет* τ*-точку накопления в* X*, то* M τ*-счетно квазикомпактно.* ▶

По аналогии с теоремами 1.42 и 1.43 доказываются следующие две теоремы.

Теорема 1.51. *В пространстве с топологией* (X, τ) *множество* M τ*-квазикомпактно тогда и только тогда, когда*

$\bigcap\limits_{i\in I}\overline{K}_i\neq\varnothing$ *для любой центрированной системы* $\{K_i : i\in I\}$ *подмножеств в* M. ▶

Теорема 1.52. *В пространстве с топологией* $(X,\,\tau)$ *для* τ*-счетной квазикомпактности множества* M *необходимо, чтобы* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{K}_n\neq\varnothing$ *для любой центрированной системы* $\{K_n : n\in\mathbb{N}\}$ *подмножеств в* M, *и достаточно, чтобы для любой последовательности* $(x_i : i\in\mathbb{N})$ *попарно различных точек из* M *этому условию удовлетворяла система множеств* $K_n = \{x_i : i\geqslant n\}$, $n\in\mathbb{N}$. ▶

Очевидно, τ-компактное (τ-счетно компактное) или τ-относительно (τ-относительно счетно) компактное множество τ-квазикомпактно (τ-счетно квазикомпактно), а τ-замкнутое и τ-квазикомпактное (τ-счетно квазикомпактное) множество τ-компактно (τ-счетно компактно).

Если операция предела Λ в множестве X определена некоторой топологией τ, то при любом $x\in X$ для τ-замыкания множества $\{x\}$ справедливо равенство $\overline{\{x\}}=\Lambda(\dot{x})$. Кроме того, секвенциально компактное множество может не быть τ-компактным, а τ-компактное множество — секвенциально компактным даже при хаусдорфовой топологии τ (см. примеры в § 10, n° 4).

Заметим, что в пространстве с операцией предела $(X,\,\Lambda)$, имеющем секвенциальную топологию τ, понятия открытого множества, замкнутого множества, замыкания множества и точки накопления множества эквивалентны соответствующим понятиям в пространстве с топологией $(X,\,\tau)$.

Теорема 1.53. *В пространстве с операцией предела* (X,Λ), *имеющем секвенциальную топологию* τ, *секвенциально квазикомпактное множество* τ*-счетно квазикомпактно, секвенциально относительно компактное множество* τ*-относительно счетно компактно, а секвенциально компактное множество* τ*-счетно компактно. Обратно, если пространство* $(X,\,\Lambda)$ *топологическое или в нем стационарная последовательность имеет один предел, то* τ*-счетно квазикомпактное множество секвенциально квазикомпактно,* τ*-относительно счетно компактное множество секвенциально относительно компактно, а открытое или замкнутое* τ*-счетно компактное множество секвенциально компактно.*

◀ С учетом теоремы 1.46 в доказательстве нуждаются обратные утверждения. Пусть $(X,\,\Lambda)$ удовлетворяет условию теоремы, а $M\subset X$ и $\hat{x}\in M^{\mathbb{N}}$. Если M τ-счетно квазикомпактно, то $\hat{x}$ является частым в каждой открытой окрестности некоторого $x \in X$. Поэтому в силу теоремы 1.30 или утверждения г) предложения 1.19 $\hat{x}$ обладает сходящейся подпоследовательностью и, значит, M секвенциально квазикомпактно. Если M τ-относительно счетно компактно и, значит, его замыкание $\overline{M}$ τ-счетно компактно, то $\overline{M}$ секвенциально квазикомпактно и, будучи замкнутым множеством, секвенциально компактно. Отсюда, очевидно, следует, что замкнутое τ-счетно компактное множество секвенциально компактно. Пусть M открыто и τ-счетно компактно, а τ_1 — секвенциальная топология подпространства $(M, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$. В силу предложения 1.27 τ_1 совпадает с топологией, индуцированной в M секвенциальной топологией τ пространства (X, Λ). Поэтому M τ_1-счетно компактно. Поскольку (M, Λ_1) либо топологическое, либо в нем стационарная последовательность имеет один предел, M секвенциально квазикомпактно в (M, Λ_1), а значит, и секвенциально компактно в (M, Λ_1). Но тогда M секвенциально компактно и в (X, Λ). ▶

Теорема 1.54. *Если в пространстве с операцией предела* (X, Λ)*, имеющем секвенциальную топологию* τ*, каждая последовательность* $\hat{x}$ *обладает подпоследовательностью* $\hat{y}$*, для которой* $\overline{[\hat{y}]} \subset [\hat{x}]^+$*, то* τ*-счетно компактное подмножество* $M \subset X$ *секвенциально компактно.*

◀ Пусть $\hat{x} = (x_i : i \in \mathbb{N})$ — последовательность попарно различных точек из M. По условию, существует такая подпоследовательность $\hat{y}_1 \prec \hat{x}$, что $\overline{[\hat{y}_1]} \subset [\hat{x}]^+$. Удалением из $\hat{y}_1$ первого члена получаем $\hat{y}_1'$. Выберем $\hat{y}_2 \prec \hat{y}_1'$ так, чтобы $\overline{[\hat{y}_2]} \subset [\hat{y}_1']^+$. Удалением из $\hat{y}_2$ первого члена получаем $\hat{y}_2'$. Выберем $\hat{y}_3 \prec \hat{y}_2'$ так, чтобы $\overline{[\hat{y}_3]} \subset [\hat{y}_2']^+$. Продолжая этот выбор, получим систему последовательностей $\hat{y}_n$, $n \in \mathbb{N}$, такую, что $\hat{y}_{n+1} \prec \hat{y}_n$ и $\overline{[\hat{y}_{n+1}]} \subset [\hat{y}_n]^+$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, система множеств $[\hat{y}_n]$, $n \in \mathbb{N}$, центрирована. В силу теоремы 1.48 из τ-счетной компактности M вытекает, что $M \bigcap \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{[\hat{y}_n]} \neq \varnothing$ и, значит, $M \bigcap \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} [\hat{y}_n]^+ \neq \varnothing$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $K_n = \{x_i : i \geqslant n\}$ и заметим, что $[\hat{y}_n] \subset K_n$. Поэтому $M \bigcap \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} K_n^+ \neq \varnothing$. Отсюда в силу теоремы 1.39 следует секвенциальная компактность M. ▶

Следствие 1.9. *Если пространство* (X, Λ)*, имеющее секвенциальную топологию* τ*, является пространством с операцией однозначного предела или пространством Фреше—Урысона, то в нем* τ*-счетно компактное множество секвенциально компактно.* ▶

В силу теоремы 1.31 пространство, удовлетворяющее условию теоремы 1.54, топологическое. В связи с теоремами 1.53 и 1.54 отметим, что, как показывает пример, приведенный в § 10, n° 11, в произвольном пространстве $(X,\, \Lambda)$, имеющем секвенциальную топологию τ, из τ-счетной компактности множества M, вообще говоря, не следует его секвенциальная компактность даже при $M = X$. Кроме того, из τ-компактности (τ-счетной компактности) множества M не следует его τ_1-компактность (τ_1-счетная компактность), где τ_1 — секвенциальная топология подпространства $(M,\, \Lambda_1) \subset (X,\, \Lambda)$. Это означает, что в $(X,\, \Lambda)$ понятие τ-компактности (τ-счетной компактности) множества не инвариантно относительно подпространств. Введем в пространстве с операцией предела еще несколько понятий компактности множества, инвариантных относительно подпространств.

Определение 1.27. *В пространстве $(X,\, \Lambda)$ множество M называется компактным (счетно компактным), если оно τ_1-компактно (τ_1-счетно компактно), где τ_1 — секвенциальная топология подпространства $(M,\, \Lambda_1) \subset (X,\, \Lambda)$; относительно (относительно счетно) компактным, если $\overline{M}$ компактно (счетно компактно).*

Из теоремы 1.53 вытекает

Следствие 1.10. *В пространстве $(X,\, \Lambda)$ секвенциально компактное множество счетно компактно. Если же $(X,\, \Lambda)$ топологическое или в нем стационарная последовательность имеет один предел, то счетно компактное множество секвенциально компактно.* ▶

В пространстве $(X,\, \Lambda)$, имеющем секвенциальную топологию τ, окрестностно (окрестностно счетно) компактное множество компактно (счетно компактно), а компактное (счетно компактное) множество τ-компактно (τ-счетно компактно), причем открытое или замкнутое τ-компактное (τ-счетно компактное) множество компактно (счетно компактно). Кроме того, понятия относительно (относительно счетно) компактного множества и τ-относительно (τ-относительно счетно) компактного множества эквивалентны. Ясно, что понятия предела и τ-предела направленности (последовательности) эквивалентны лишь в том случае, когда $(X,\, \Lambda)$ — пространство Фреше–Урысона (топологическое пространство). В пространстве Фреше–Урысона $(X,\, \Lambda)$ понятия компактного (счетно компактного), τ-компактного (τ-счетно компактного) и окрестностно (окрестностно счетно) компактного множества эквивалентны.

§ 9. Пределы функции. Непрерывности

Определение 1.28. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $x_0 \in X$ — предельная точка подмножества $G \subset X$. Точка $y_0 \in Y$ называется секвенциальным пределом функции $f: G \to Y$ в точке x_0, если для любой последовательности точек $x_n \in G \backslash \{x_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к x_0, точка y_0 является пределом последовательности $(f(x_n): n \in \mathbb{N})$.*

Теорема 1.55. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $(\widetilde{V}_y : y \in Y)$ — семейство систем окрестностей в Y, определяющее операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, а $x_0 \in X$ — предельная точка подмножества $G \subset X$. Точка $y_0 \in Y$ является секвенциальным пределом функции $f: G \to Y$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда для каждого $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_{y_0}$ существует такая окртестность v точки x_0, что $f(v \cap G \backslash \{x_0\}) \subset \widetilde{v}$.*

◀ Пусть y_0 — секвенциальный предел функции f в точке x_0, а $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_{y_0}$. Докажем, что множество $v = f^{-1}(\widetilde{v}) \cup (X \backslash G) \cup \{x_0\}$ является окрестностью точки x_0. Предположим противное. Тогда $x_0 \in \Lambda(\hat{x})$ для некоторой последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в $X \backslash v = G \backslash v$. Так как $f(x_n) \notin \widetilde{v}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $y_0 \notin \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ для $\hat{y} = (f(x_n): n \in \mathbb{N})$. Однако это противоречит условию, наложенному на y_0. Следовательно, v — окрестность точки x_0. Очевидно, для v имеет место включение $f(v \cap G \backslash \{x_0\}) \subset \widetilde{v}$.

Пусть, обратно, для каждого $\widetilde{v} \in V_{y_0}$ существует такая окрестность v точки x_0, что $f(v \cap G \backslash \{x_0\}) \subset \widetilde{v}$, а $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность в $G \backslash \{x_0\}$, сходящаяся к x_0. Так как $\hat{x}$ почти вся лежит в v, то последовательность $\hat{y} = (f(x_n): n \in \mathbb{N})$ почти вся лежит в $\widetilde{v}$ и, значит, $y_0 \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. ▶

Следствие 1.11. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $x_0 \in X$ — предельная точка подмножества $G \subset X$. Точка $y_0 \in Y$ является секвенциальным пределом функции $f: G \to Y$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 направленности $(x_i : i \in I)$ в $G \backslash \{x_0\}$ точка y_0 является пределом направленности $(f(x_i): i \in I)$.* ▶

Определение 1.29. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывной (короче — секвенциально непрерывной) в точке $x_0 \in G$, если либо x_0 не является предельной точкой множества G, либо x_0 является предельной точкой для G, а $f(x_0)$ — секвениальным пределом функции f в* *точке x_0. Функция f называется секвенциально непрерывной на $M \subset G$, если она секвенциально непрерывна в каждой точке из M. Если функция f секвенциально непрерывна на G, то она просто называется секвенциально непрерывной.*

С учетом определения 1.28 можно сказать, что функция $f: G \to Y$ называется секвенциально непрерывной в точке $x_0 \in G$, если для любой последовательности точек $x_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к x_0, значение $f(x_0)$ является пределом последовательности $(f(x_n): n \in \mathbb{N})$.

Из теоремы 1.55 вытекают следующие две теоремы.

Теорема 1.56. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $G \subset X$, а $(\widetilde{V}_y : y \in Y)$ — семейство систем окрестностей в Y, определяющее операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для $y_0 = f(x_0)$ и каждого $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_{y_0}$ существует такая окрестность v точки x_0, что $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$.* ▶

Теорема 1.57. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $G \subset X$, а $(\widetilde{V}_y : y \in Y)$ — семейство систем окрестностей в Y, определяющее операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(\widetilde{v})$ каждой окрестности $\widetilde{v} \in \widetilde{V}_{y_0}$ точки $y_0 = f(x_0)$ есть окрестность точки x_0 в подпространстве с носителем G.* ▶

Следствие 1.12. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к x_0 направленности $(x_i : i \in I)$ в G точка $f(x_0)$ является пределом направленности $(f(x_i): i \in I)$.* ▶

Предложение 1.44. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна тогда и только тогда, когда для любого $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} = (f(x_n): n \in \mathbb{N})$ имеет место включение $f(G \cap \Lambda(\hat{x})) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$.* ▶

Определение 1.30. *Пусть (X, τ) и $(Y, \widetilde{\tau})$ — пространства с топологией, а $x_0 \in X$ — τ-точка накопления подмножества $G \subset X$. Точка $y_0 \in Y$ называется $(\tau, \widetilde{\tau})$-пределом функции $f: G \to Y$ в точке x_0, если для каждой окрестности $\widetilde{v} \in \widetilde{\tau}$ точки y_0 существует такая окрестность $v \in \tau$ точки x_0, что $f(v \cap G \setminus \{x_0\}) \subset \widetilde{v}$.*

Теорема 1.58. *Пусть $(X,\,\tau)$ и $(Y,\,\widetilde{\tau})$ — пространства с топологией, а $x_0\in X$ — τ-точка накопления подмножества $G\subset X$. Точка $y_0\in Y$ является $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-пределом функции $f:G\to Y$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда для любой τ-сходящейся к x_0 направленности $(x_i:i\in I)$ в $G\backslash\{x_0\}$ точка y_0 является $\widetilde{\tau}$-пределом направленности $(f(x_i):i\in I)$.*

◀ Обозначим через J множество всех пар $(x,\,v)$, где $v\in\tau$ — окрестность точки x_0, а $x\in v\cap G\backslash\{x_0\}$. Множество J частично предупорядочим, положив $j'\leqslant j''$ для элементов $j'=(x',\,v')$ и $j''=(x'',\,v'')$ из J, если $v''\subset v'$. Тогда J становится направленным множеством. Рассмотрим направленность $\check{x}=(x_j:j\in J)$ в $G\backslash\{x_0\}$, где $x_j=x$ для $j=(x,\,v)\in J$. Очевидно, x_0 является τ-пределом для $\check{x}$. Пусть $y_0\in Y$ есть $\widetilde{\tau}$-предел направленности $(f(x_j):j\in J)$, а $\widetilde{v}\in\widetilde{\tau}$ — окрестность точки y_0. Тогда существует такое $j_1=(x_1,\,v)\in J$, что $f(x_j)\in\widetilde{v}$ для любого $j\geqslant j_1$ из J. Однако если $x\in v\cap G\backslash\{x_0\}$, то $j\geqslant j_1$ для $j=(x,\,v)\in J$. Поэтому $f(v\cap G\backslash\{x_0\})\subset\widetilde{v}$ и, значит, y_0 есть $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-предел функции f в точке x_0. Обратное утверждение теоремы очевидно. ▶

Определение 1.31. *Пусть $(X,\,\tau)$ и $(Y,\,\widetilde{\tau})$ — пространства с топологией, а $G\subset X$. Функция $f:G\to Y$ называется $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывной в точке $x_0\in G$, если либо x_0 не является τ-точкой накопления множества G, либо x_0 является τ-точкой накопления для G, а $f(x_0)$ является $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-пределом функции f в точке x_0. Функция f называется $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывной на $M\subset G$, если она $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывна в каждой точке из M. Если функция f $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывна на G, то она просто называется $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывной (или τ-непрерывной, когда ясно какая топология рассматривается в Y).*

С учетом определения 1.30 можно сказать, что функция $f:G\to Y$ называется $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывной в точке $x_0\in G$, если для каждой окрестности $\widetilde{v}\in\widetilde{\tau}$ точки $f(x_0)$ существует такая окрестность $v\in\tau$ точки x_0, что $f(v\cap G)\subset\widetilde{v}$.

Из теоремы 1.58 вытекает

Теорема 1.59. *Пусть $(X,\,\tau)$ и $(Y,\,\widetilde{\tau})$ — пространства с топологией, а $G\subset X$. Функция $f:G\to Y$ $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывна в точке $x_0\in G$ тогда и только тогда, когда для любой τ-сходящейся к x_0 направленности $(x_i:i\in I)$ в G значение $f(x_0)$ является $\widetilde{\tau}$-пределом направленности $(f(x_i):i\in I)$.* ▶

Теорема 1.60. *Пусть $(X,\,\tau)$ и $(Y,\,\widetilde{\tau})$ — пространства с топологией, а $G\subset X$. Функция $f:G\to Y$ $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого $\widetilde{v}\in\widetilde{\tau}$ прообраз $f^{-1}(\widetilde{v})$ τ_1-от-*

крыт, где τ_1 — топология в G, индуцированная топологией τ.

◀ Пусть функция f $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывна, $\widetilde{v} \in \widetilde{\tau}$, а $x \in f^{-1}(\widetilde{v})$. В силу $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывности f в точке x существует такая окрестность $v \in \tau$ точки x, что $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$. Однако $v \cap G \subset f^{-1}(\widetilde{v})$. Поэтому $f^{-1}(\widetilde{v}) \in \tau_1$. Обратное утверждение теоремы очевидно. ▶

Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, имеющие секвенциальные топологии τ и $\widetilde{\tau}$ соответственно, а τ_1 и $\widetilde{\tau}_1$ — секвенциальные топологии подпространств $(X_1, \Lambda_1) \subset \subset (X, \Lambda)$ и $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ соответственно, где $Y_1 = f(X_1)$. Из $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывности функции $f: X_1 \to Y$, вообще говоря, не следует ее $(\tau_1, \widetilde{\tau}_1)$-непрерывность. А это означает, что в пространствах с операцией предела понятие $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывности функции не инвариантно относительно подпространств. Введем в пространствах с операцией предела еще два понятия непрерывности, инвариантных относительно подпространств.

Определение 1.32. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $x_0 \in X$ — предельная точка подмножества $G \subset X$. Точка $y_0 \in Y$ называется пределом функции $f: G \to Y$ в точке x_0, если для каждого $G_1 \subset G$, имеющего предельную точку x_0 и каждой открытой в подпространстве $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ с носителем $Y_1 = f(G_1) \cup \{y_0\}$ окрестности $\widetilde{v}$ точки y_0 существует такая открытая в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = G_1 \cup \{x_0\}$ окрестность v точки x_0, что $f(v \setminus \{x_0\}) \subset \widetilde{v}$.*

Определение 1.33. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-непрерывной (короче — непрерывной) в точке $x_0 \in G$, если либо x_0 не является предельной точкой множества G, либо x_0 является предельной точкой для G, а $f(x_0)$ — пределом функции f в точке x_0. Функция f называется непрерывной на $M \subset G$, если она непрерывна в каждой точке из M. Если функция f непрерывна на G, то она просто называется непрерывной.*

С учетом определения 1.32 можно сказать, что функция $f: G \to Y$ называется непрерывной в точке $x_0 \in G$, если для каждого $X_1 \subset G$, содержащего x_0, и каждой открытой в подпространстве $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ с носителем $Y_1 = f(X_1)$ окрестности $\widetilde{v}$ точки $f(x_0)$ существует такая открытая в $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ окрестность v точки x_0, что $f(v) \subset \widetilde{v}$.

Это определение эквивалентно следующему: функция $f: G \to Y$ называется непрерывной в точке $x_0 \in G$, если для каждого подпространства $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$, содержащего $f(x_0)$, и каждой открытой в нем окрестности $\widetilde{v}$ точки $f(x_0)$ существует такая открытая в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ окрестность v точки x_0, что $f(v) \subset \widetilde{v}$.

Теорема 1.61. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ непрерывна тогда и только тогда, когда для любого подпространства $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ с носителем $Y_1 \subset f(G)$ и любого открытого в нем множества $\widetilde{v}$ прообраз $f^{-1}(\widetilde{v})$ открыт в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1)$.*

◀ Пусть функция f непрерывна, а $x \in f^{-1}(\widetilde{v})$. Существует такая открытая в (X_1, Λ_1) окрестность v точки x, что $f(v) \subset \widetilde{v}$. В силу $v \subset f^{-1}(\widetilde{v})$ и произвольности x множество $f^{-1}(\widetilde{v})$ открыто в (X_1, Λ_1). Обратное утверждение теоремы очевидно. ▶

Теорема 1.62. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Если функция $f: G \to Y$ непрерывна в точке $x_0 \in G$, то она секвенциально непрерывна в x_0.*

◀ Предположим противное. Тогда существует такая сходящаяся к x_0 последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в $G \setminus \{x_0\}$, что последовательность $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ не сходится к $y_0 = f(x_0)$. Поэтому существует окрестность точки y_0, не содержащая члены некоторой подпоследовательности $\hat{y}' = (f(x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$. Пусть $\hat{x}' = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$. Рассмотрим множества $X_1 = [\hat{x}'] \cup \{x_0\}$ и $Y_1 = [\hat{y}'] \cup \{y_0\}$. Очевидно, что $Y_1 = f(X_1)$, а множество $\widetilde{v} = \{y_0\}$ является открытой окрестностью точки y_0 в $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$. Однако в $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ каждая открытая окрестность v точки x_0 содержит все члены последовательности $\hat{x}'$, кроме конечного их числа. Следовательно, $\hat{y}'$ почти вся лежит в $f(v)$. Отсюда с учетом $f(x_{k_n}) \neq y_0$, $n \in \mathbb{N}$, получаем, что $f(v) \setminus \widetilde{v} \neq \varnothing$. А это противоречит условию непрерывности f в точке x_0. ▶

Утверждение, обратное к приведенному в теореме 1.62, не верно (см. пример в § 10, n° 17). Однако верна следующая

Теорема 1.63. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $G \subset X$, а подмножество $M \subset G$ открыто в подпространстве с носителем G. Если функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна на M, то она непрерывна на M.*

◀ Пусть $x_0 \in M$, $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ — подпространство, содержащее $f(x_0)$, а $\widetilde{v}$ — открытая в $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1)$ окрестность точки $f(x_0)$. Докажем, что множество $v = M \cap f^{-1}(\widetilde{v})$ открыто в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1)$. Так как $M_1 = M \cap X_1$ открыто в (X_1, Λ_1), а $v \subset M_1$, то достаточно доказать $v \cap \Lambda_1(\hat{x}) = \varnothing$ для всех $\hat{x} \in (M_1 \setminus v)^{\mathbb{N}}$. Предположим $\widetilde{x} \in v \cap \Lambda_1(\hat{x})$ для некоторого $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in (M_1 \setminus v)^{\mathbb{N}}$. Обозначим $\widetilde{y} = f(\widetilde{x})$ и $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$. В силу секвенциальной непрерывности f в точке $\widetilde{x}$ имеем $\widetilde{y} \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Однако $\widetilde{y} \in Y_1$ и $f(x_n) \in Y_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $\widetilde{y} \in \widetilde{\Lambda}_1(\hat{y})$. С другой стороны, $\widetilde{y} \in \widetilde{v}$ и $f(x_n) \notin \widetilde{v}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что $\widetilde{y} \notin \widetilde{\Lambda}_1(\hat{y})$, так как $\widetilde{v}$ открыто в $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1)$. Полученное противоречие доказывает, что v открыто в (X_1, Λ_1). Поскольку $x_0 \in v$ и $f(v) \subset \widetilde{v}$, функция f непрерывна в точке x_0. ▶

Определение 1.34. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $x_0 \in X$ — предельная точка для $G \subset X$. Точка $y_0 \in Y$ называется усиленным пределом функции $f : G \to Y$ в точке y_0, если для каждого $G_1 \subset G$, имеющего предельную точку x_0, и каждой открытой в подпространстве $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ с носителем $Y_1 = f(G_1) \cup \{y_0\}$ окрестности $\widetilde{v}$ точки y_0 существует такая открытая в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = G_1 \cup (X \setminus G) \cup \{x_0\}$ окрестность v точки x_0, что $f(v \cap G \setminus \{x_0\}) \subset \widetilde{v}$.*

Определение 1.35. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f : G \to Y$ называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-усиленно непрерывной (короче — усиленно непрерывной) в точке $x_0 \in G$, если либо x_0 не является предельной точкой множества G, либо x_0 является предельной точкой для G, а $f(x_0)$ — усиленным пределом функции f в точке x_0. Функция f называется усиленно непрерывной на $M \subset G$, если она усиленно непрерывна в каждой точке из M. Если функция f усиленно непрерывна на G, то она просто называется усиленно непрерывной.*

С учетом определения 1.34 можно сказать, что функция $f : G \to Y$ называется усиленно непрерывной в точке $x_0 \in G$, если для каждого $G_1 \subset G$, содержащего x_0, и каждой открытой в подпространстве $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ с носителем $Y_1 = f(G_1)$ окрестности $\widetilde{v}$ точки $f(x_0)$ существует такая открытая в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = G_1 \cup (X \setminus G)$ окрестность v точки x_0, что $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$.

Это определение эквивалентно следующему: функция $f: G \to Y$ называется усиленно непрерывной в точке $x_0 \in G$, если для каждого подпространства $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$, содержащего $f(x_0)$, и каждой открытой в нем окрестности $\widetilde{v}$ точки $f(x_0)$ существует такая открытая в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \setminus G)$ окрестность v точки x_0, что $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$.

Усиленная непрерывность функции $f: G \to Y$ в точке $x_0 \in G$ влечет ее непрерывность, секвенциальную непрерывность и $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывность в этой точке, где τ и $\widetilde{\tau}$ — секвенциальные топологии пространств (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ соответственно.

Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Если функция $f: G \to Y$ $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-усиленно непрерывна в точке $x_0 \in G$, а $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ — подпространство, содержащее x_0, то сужение $f_1 = f|_{G_1}$, где $G_1 = G \cap X_1$, является $(\Lambda_1, \widetilde{\Lambda})$-усиленно непрерывной в точке x_0 функцией. Однако обратное утверждение не верно, а именно: из $(\Lambda', \widetilde{\Lambda})$-усиленной непрерывности функции f, где Λ' — операция предела подпространства $(G, \Lambda') \subset (X, \Lambda)$, вообще говоря, не следует $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-усиленная непрерывность f (см. пример в § 10, n° 19).

Теорема 1.64. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а $G \subset X$. Функция $f: G \to Y$ усиленно непрерывна тогда и только тогда, когда для каждого подпространства $(Y_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y, \widetilde{\Lambda})$ с носителем $Y_1 \subset f(G)$ и каждого открытого в нем множества $\widetilde{v}$ существует открытое в подпространстве $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \setminus G)$ множество v, такое, что $f^{-1}(\widetilde{v}) = v \cap G$.*

◀ Пусть функция f усиленно непрерывна, а X_1, Y_1 и $\widetilde{v}$ — указанные в теореме множества. Рассмотрим произвольное $x \in f^{-1}(\widetilde{v})$. Существует такая открытая в подпространстве (X_1, Λ_1) окрестность v_0 точки x, что $f(v_0 \cap G) \subset \widetilde{v}$ и, значит, $v_0 \cap G \subset f^{-1}(\widetilde{v})$. Поэтому x является внутренней точкой множества $f^{-1}(\widetilde{v}) \cup (X \setminus G)$ в (X_1, Λ_1). Обозначим через v внутренность этого множества в (X_1, Λ_1). Тогда $f^{-1}(\widetilde{v}) = v \cap G$. Обратное утверждение теоремы очевидно. ▶

Теорема 1.65. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $G \subset X$, а функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна на $M \subset G$. Если M открыто в (X, Λ) или G замк-*

нуто в $(X,\, \Lambda)$*, а* M *открыто в подпространстве с носителем* G*, то* f *усиленно непрерывна на* M*.*

◀ Пусть $x_0 \in M$, $(Y_1,\, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — подпространство, содержащее $f(x_0)$, $\widetilde{v}$ — открытая в $(Y_1,\, \widetilde{\Lambda}_1)$ окрестность точки $f(x_0)$, $(X_1,\, \Lambda_1) \subset (X,\, \Lambda)$ — подпространство с носителем $X_1 = G_1 \cup (X \backslash G)$, где $G_1 = f^{-1}(Y_1)$, а $M_1 = M \cap G_1$ и $v = M \cap f^{-1}(\widetilde{v})$. В силу секвенциальной непрерывности f на M, как и в доказательстве теоремы 1.63, $v \cap \Lambda(\hat{x}) = \varnothing$ для всех $\hat{x} \in (M_1 \backslash v)^{\mathbb{N}}$.

Если M открыто в $(X,\, \Lambda)$, то M_1 открыто в $(X_1,\, \Lambda_1)$. Так как $v \subset M_1$, то в силу указанного выше свойства v оно открыто в $(X_1,\, \Lambda_1)$. Поскольку $x_0 \in v$ и $f(v) \subset \widetilde{v}$, функция f усиленно непрерывна в точке x_0.

Если же множество G замкнуто в $(X,\, \Lambda)$, а M открыто в подпространстве с носителем G, то в силу предложения 1.22 $G \backslash M$ замкнуто в $(X,\, \Lambda)$. Отсюда следует, что множество $G_1 \backslash M_1 = (G \backslash M) \cap X_1$ замкнуто в $(X_1,\, \Lambda_1)$. Используя опять указанное выше свойство v, получим, что множество $G_1 \backslash v = (G_1 \backslash M_1) \cup (M_1 \backslash v)$ замкнуто, а $v' = v \cup (X \backslash G)$ открыто в подпространстве $(X_1,\, \Lambda_1)$. Так как $v' \cap G = v$, $x_0 \in v$ и $f(v) \subset \widetilde{v}$, то функция f усиленно непрерывна в точке x_0. ▶

Теорема 1.66. *Пусть* $(X,\, \Lambda)$ *— пространство Фреше–Урысона,* $(Y,\, \Lambda)$ *— пространство с операцией предела,* $G \subset X$*. Функция* $f : G \to Y$ *усиленно непрерывна в точке* $x_0 \in G$ *тогда и только тогда, когда она секвенциально непрерывна в* x_0*.*

◀ В доказательстве нуждается только утверждение о том, что секвенциальная непрерывность функции f в точке x_0 влечет усиленную непрерывность f в этой точке. Пусть $(Y_1,\, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — подпространство, содержащее $f(x_0)$, $\widetilde{v}$ — открытая в $(Y_1,\, \widetilde{\Lambda}_1)$ окрестность точки $f(x_0)$, а $(X_1,\, \Lambda_1) \subset (X,\, \Lambda)$ — подпространство с носителем $X_1 = G_1 \cup (X \backslash G)$, где $G_1 = f^{-1}(Y_1)$. Обозначим $E = G_1 \backslash f^{-1}(\widetilde{v})$. В силу $\widetilde{v} \cap f(E) = \varnothing$ и секвенциальной непрерывности f в точке x_0 имеем $x_0 \notin E^+$. Однако $E^+ = \overline{E}$, так как $(X,\, \Lambda)$ является пространством Фреше–Урысона. Поэтому $x_0 \notin \overline{E}$. Отсюда следует, что множество $v = X_1 \backslash \overline{E} = (X \backslash \overline{E}) \cap X_1$ является открытой окрестностью точки x_0 в $(X_1,\, \Lambda_1)$. Поскольку $v \cap G = G_1 \backslash \overline{E} \subset f^{-1}(\widetilde{v})$ и $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$, функция f усиленно непрерывна в точке x_0. ▶

Теорема 1.67. *Пусть* $(X,\, \Lambda)$ *и* $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ *— пространства с операцией предела, имеющие секвенциальные топологии* τ *и* $\widetilde{\tau}$ *соответственно, а* $\tau_1 \subset \tau$ *и* $\widetilde{\tau}_1 \subset \widetilde{\tau}$ *— некоторые топологии в*

X и Y соответственно, причем пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ топологическое, а $\widetilde{\tau}_1$ определяет в Y операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Если функция $f : G \to Y$, где $G \subset X$, $(\tau_1, \widetilde{\tau}_1)$-непрерывна в точке $x_0 \in G$, то она секвенциально непрерывна в этой точке.

◀ Рассмотрим в G сходящуюся к x_0 последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. Докажем, что последовательность $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к $y_0 = f(x_0)$. Пусть $\widetilde{v} \in \widetilde{\tau}_1$ — открытая окрестность точки y_0. В силу $(\tau_1, \widetilde{\tau}_1)$-непрерывности f в точке x_0 существует такая открытая окрестность $v \in \tau_1$ точки x_0, что $f(v \cap G) \subset \widetilde{v}$. Поскольку $x_0 \in \Lambda(\hat{x})$, последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в v. Но тогда $\hat{y}$ почти вся лежит в $\widetilde{v}$. Отсюда следует, что y_0 является $\widetilde{\tau}_1$-пределом последовательности $\hat{y}$. Однако $\widetilde{\tau}_1$ определяет в Y операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Поэтому $y_0 \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ и, значит, функция f секвенциально непрерывна в точке x_0. ▶

В § 10, n° 18 приведен пример функции $f : X \to Y$ и пространств с операцией однозначного предела (X, λ) и $(Y, \widetilde{\lambda})$, имеющих секвенциальные топологии τ и $\widetilde{\tau}$ соответственно, где функция f $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывна в некоторой точке, но не является непрерывной в этой точке. В § 10, n° 19 приведен также пример функции $f : G \to Y$ и указанного типа пространств (X, λ) и $(Y, \widetilde{\lambda})$, где функция f секвенциально непрерывна на $G \subset X$, но не является $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывной.

Теорема 1.68. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела. Относительно функции $f : X \to Y$ рассмотрим следующие условия:*

1) функция f секвенциально непрерывна;

2) $f(M^+) \subset (f(M))^+$ для любого $M \subset X$;

3) $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ для любого $M \subset X$;

4) прообраз $f^{-1}(H)$ каждого открытого (замкнутого) в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ подмножества $H \subset Y$ открыт (замкнут) в (X, Λ).

Тогда 1) эквивалентно 2), а 3) эквивалентно 4), причем из 1) следует 3). Если пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ топологическое, то из 3) следует 1), т. е. все эти условия попарно эквивалентны.

◀ Пусть функция f секвенциально непрерывна, а $M \subset X$. Для $x \in M^+$ выберем сходящуюся к x последовательность точек $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательность $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к $f(x)$. Так как $f(x_n) \in f(M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $f(x) \in (f(M))^+$. Значит, $f(M^+) \subset (f(M))^+$, т. е. выполняется условие 2).

Из теоремы 1.57 следует, что прообраз $f^{-1}(H)$ всякого открытого (замкнутого) подмножества H пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ открыт (замкнут) в (X, Λ), т. е. выполняется условие 4). Отсюда, в частности, вытекает, что множество $f^{-1}\big(\overline{f(M)}\big)$ замкнуто в (X, Λ). Так как $M \subset f^{-1}\big(\overline{f(M)}\big)$, то $\overline{M} \subset f^{-1}\big(\overline{f(M)}\big)$. Следовательно, $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$, т. е. выполняется условие 3).

Пусть выполняется условие 2). Предположим функция f не является секвенциально непрерывной в некоторой точке $x \in X$. Тогда существует такая сходящаяся к x последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X, что последовательность $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ не сходится к $f(x)$. Отсюда в силу теоремы 1.2 вытекает существование такой подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $f(x) \notin$ $\notin (f([\hat{x}']))^+$. Это противоречит включению $f([\hat{x}']^+) \subset (f([\hat{x}']))^+$, так как $x \in [\hat{x}']^+$. Следовательно, функция f секвенциально непрерывна. Таким образом, условия 1) и 2) эквивалентны.

Очевидно, условие 4) для открытых подмножеств пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ эквивалентно этому же условию для замкнутых подмножеств. Однако если выполняется условие 4) для замкнутых подмножеств пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$ для любого $M \subset X$, т. е. выполняется условие 3).

Пусть выполняется условие 3). Тогда для прообраза $G =$ $= f^{-1}(H)$ замкнутого подмножества H пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ имеем $f(\overline{G}) \subset \overline{f(G)} = \overline{H} = H$. Поэтому $\overline{G} \subset f^{-1}(H) = G$, т. е. прообраз $f^{-1}(H)$ замкнут в (X, Λ). Тем самым выполняется условие 4) для замкнутых, а значит, и для открытых подмножеств пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Следовательно, условия 3) и 4) эквивалентны. Кроме того, если пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ топологическое, то из выполнения условия 4) для открытых подмножеств пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ в силу теоремы 1.67 вытекает секвенциальная непрерывность f, т. е. из условия 3) следует 1). ►

Замечание 1.11. Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, имеющие секвенциальные топологии τ и $\widetilde{\tau}$ соответственно; $f : X \to Y$ — секвенциально непрерывное отображение; $X_1 \subset X$ — непустое подмножество; τ' — топология в X_1, индуцированная топологией τ; $f_1 = f|_{X_1}$ — сужение отображения f на X_1. Очевидно, f_1 секвенциально непрерывно. Более того, из теоремы 1.68 следует $(\tau', \widetilde{\tau})$-непрерывность f_1. Однако не всякое секвенциально непрерывное отображение $g : X_1 \to Y$ может быть $(\tau', \widetilde{\tau})$-непрерывным. Так, что условие $(\tau', \widetilde{\tau})$-непрерывности отображения g необходимо для того чтобы g допускало секвенциально непрерывное продолжение на X.

В силу теорем 1.9, 1.57, 1.61 и 1.63 справедлива

Теорема 1.69. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $G \subset X$, а функция $f: G \to Y$ секвенциально непрерывна. Если $G' \subset G$ компактно, счетно компактно, окрестностно компактно или секвенциально компактно, то соответствующим свойством обладает также $f(G')$, а если G' секвенциально квазикомпактно в подпространстве с носителем G, то $f(G')$ тоже секвенциально квазикомпактно.* ▶

В $\mathbb{R}$ классическую операцию предела (т. е. операцию предела, определенную системой всех открытых числовых промежутков) обозначим через lim. В пространстве $(\mathbb{R}, \lim)$ сходимость последовательности $\hat{r} = (r_n : n \in \mathbb{N})$ к r будем записывать в виде $\lim \hat{r} = r$ или $\lim\limits_n r_n = r$. Для нижнего и верхнего пределов последовательности $\hat{r}$ тоже будем использовать общепринятую запись $\underline{\lim}\, \hat{r}$ и $\overline{\lim}\, \hat{r}$ или $\underline{\lim}\limits_n r_n$ и $\overline{\lim}\limits_n r_n$.

Определение 1.36. *Пусть G — подмножество пространства с операцией предела (X, Λ). Функционал $f: G \to \mathbb{R}$ называется секвенциально полунепрерывным снизу (сверху) в точке $x_0 \in G$, если для любой последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в G, сходящейся к x_0, выполняется неравенство $f(x_0) \leqslant \underline{\lim}\limits_n f(x_n)$ $(f(x_0) \geqslant \overline{\lim}\limits_n f(x_n))$. Если функционал f секвенциально полунепрерывен снизу (сверху) в каждой точке из G, то она просто называется секвенциально непрерывным снизу (сверху).*

Предложение 1.45. *Если G — секвенциально компактное подмножество пространства с операцией предела (X, Λ), то секвенциально полунепрерывный снизу (сверху) функционал $f: G \to \mathbb{R}$ принимает наименьшее (наибольшее) значение.* ▶

Из теоремы 1.69 вытекает

Предложение 1.46. *Пусть G — счетно компактное подмножество пространства с операцией предела (X, Λ). Если функционал $f: G \to \mathbb{R}$ секвенциально непрерывен, то он принимает наименьшее и наибольшее значения.* ▶

Определение 1.37. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела. Отображение $f: X \to Y$, переводящее каждое открытое подмножество пространства (X, Λ) в открытое подмножество пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$, называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-открытым (короче — открытым) отображением.*

С учетом теоремы 1.18 справедлива также

Теорема 1.70. *Пусть (X, Λ) — прямое произведение семейства пространств $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$. Тогда для каждого $i \in I$ проектирующее отображение $pr_i : X \to X_i$ секвенциально непрерывно и открыто. При этом Λ является слабейшей операцией предела в X, при которой каждое отображение pr_i (Λ, Λ_i)-секвенциально непрерывно.* ▶

Предложение 1.47. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, а U_x — полная система окрестностей точки $x \in X$ в пространстве (X, Λ). Отображение $f : X \to Y$ тогда и только тогда переводит каждую окрестность точки x в окрестность точки $f(x)$, когда в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ каждая сходящаяся к $f(x)$ последовательность точек $y_n \in Y \setminus \bigcap\{f(u) : u \in U_x\}$, $n \in \mathbb{N}$, обладает такой подпоследовательностью $(y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, что последовательность некоторых $x_n \in f^{-1}(y_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к x в (X, Λ).*

◀ Пусть f переводит каждую окрестность точки $x \in X$ в окрестность точки $f(x)$. Рассмотрим сходящуюся к $f(x)$ последовательность точек $y_n \in Y \setminus \bigcap\{f(u) : u \in U_x\}$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $M = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(y_n)$. Так как $f(u) \bigcap \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \neq \varnothing$ для каждого $u \in U_x$, то $u \cap M \neq \varnothing$. В силу теоремы 1.10 существует сходящаяся к x последовательность $\hat{\xi}$ в M. Однако для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $u_n \in U_x$, что $y_n \notin f(u_n)$. Поэтому каждое множество $f^{-1}(y_n)$ может содержать лишь конечное число членов последовательности $\hat{\xi}$. Отсюда следует существование такой последовательности натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$, что $[\hat{\xi}] \bigcap f^{-1}(y_{k_n}) \neq \varnothing$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Легко заметить, что любая последовательность точек $x_n \in [\hat{\xi}] \bigcap f^{-1}(y_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к x. Обратное утверждение предложения очевидно. ▶

На основании предложений 1.12 и 1.34 справедлива

Теорема 1.71. *Пусть $f : X \to Y$ — некоторое отображение; $\widetilde{\Lambda}$ — операция предела в Y; $(\widetilde{U}_y : y \in Y)$ и $\widetilde{\tau}$ — соответственно семейство полных систем окрестностей и секвенциальная топология пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$; $\widetilde{\Lambda}'$ — операция предела в Y, определенная топологией $\widetilde{\tau}$; Λ и Λ' — операции предела в X, определенные формулами $\Lambda(\hat{x}) = f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}))$ и $\Lambda'(\hat{x}) = f^{-1}(\widetilde{\Lambda}'(\hat{y}))$, где $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$. Тогда*

а) Λ является слабейшей, операцией предела в X, при ко-

торой отображение f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывно;

б) Λ' является слабейшей операцией предела в X, при которой отображение f $(\Lambda', \widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно, причем Λ' является топологической операцией предела;

в) в пространстве (X, Λ) полная система окрестностей точки $x \in X$ есть фильтр с базой $\{f^{-1}(\widetilde{u}) : \widetilde{u} \in \widetilde{U}_y,\ y = f(x)\}$, причем каждая окрестность точки x является также окрестностью множества $f^{-1}(f(x))$;

г) в (X, Λ) секвенциальная топология есть система $\{f^{-1}(\widetilde{v}) : \widetilde{v} \in \widetilde{\tau}\}$ и определяет в X операцию предела Λ'. ▶

Предложение 1.48. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела, а $f : X \to Y$ — некоторое отображение. Тогда в Y существуют сильнейшая операция предела $\widetilde{\Lambda}$ и сильнейшая топологическая операция предела $\widetilde{\Lambda}'$, при каждой из которых f секвенциально непрерывно.*

◀ Пусть E — множество всех таких операций предела в Y, при каждой из которых f секвенциально непрерывно, а $E' \subset E$ — подмножество тополгических операций предела. С учетом $E' \neq \emptyset$ операции предела $\widetilde{\Lambda}$ и $\widetilde{\Lambda}'$ в Y, определенные равенствами $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) = \bigcap\limits_{\Lambda' \in E} \Lambda'(\hat{y})$ и $\widetilde{\Lambda}'(\hat{y}) = \bigcap\limits_{\Lambda' \in E'} \Lambda'(\hat{y})$, $\hat{y} \in Y^{\mathbb{N}}$, являются требуемыми. ▶

Теорема 1.72. *Пусть Λ' — операция предела в X, определенная секвенциальной топологией τ пространства (X, Λ); f — отображение X на множество Y; $\widetilde{\Lambda}$ — операция предела в Y, определенная семейством систем окрестностей $(\widetilde{U}_y : y \in Y)$, где $\widetilde{U}_y$ — система таких $\widetilde{u} \subset Y$, что $f^{-1}(\widetilde{u})$ является окрестностью множества $f^{-1}(y)$ в (X, Λ); $\widetilde{\Lambda}'$ — операция предела в Y, определенная секвенциальной топологией $\widetilde{\tau}$ пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Тогда*

а) $\widetilde{U}_y$ является полной системой окрестностей точки y в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и совпадает с системой всех множеств $f(u)$, где u — произвольная окрестность множества $f^{-1}(y)$ в (X, Λ);

б) $\widetilde{\Lambda}$ является сильнейшей операцией предела в Y, при которой f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывно;

в) $\widetilde{\tau} = \{\widetilde{v} \subset Y : f^{-1}(\widetilde{v}) \in \tau\}$;

г) $\widetilde{\Lambda}'$ является сильнейшей топологической операцией предела в Y, при которой f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно;

д) отображение f $(\Lambda', \widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно;

е) $\widetilde{\Lambda}$ является сильнейшей операцией предела в Y, а $\widetilde{\Lambda}'$ — сильнейшей топологической операцией предела в Y, удовлетворяющие включениям $f(\Lambda(\hat{x}))\subset\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ и $f(\Lambda'(\hat{x}))\subset\widetilde{\Lambda}'(\hat{y})$ для любых $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})\in Y^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$, где $x_n\in f^{-1}(y_n)$.

◀ (а) Пусть $\widetilde{v}_0$ — окрестность точки y в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Покажем, что $f^{-1}(\widetilde{v}_0)$ является окрестностью множетсва $f^{-1}(y)$ в (X, Λ). Предположим противное. Тогда существует последовательность точек $x_n\in X\backslash f^{-1}(\widetilde{v}_0)$, $n\in\mathbb{N}$, сходящаяся к некоторому $x\in f^{-1}(y)$. Очевидно, для каждого $\widetilde{v}\in\widetilde{U}_y$ последовательность $(x_n : n\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в $f^{-1}(\widetilde{v})$. Но тогда последовательность $\hat{y}=(f(x_n) : n\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в $\widetilde{v}$. Так как семейство $(\widetilde{U}_y : y\in Y)$ систем окрестностей определяет в Y операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, то последовательность $\hat{y}$ сходится к y в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и, следовательно, почти вся лежит в $\widetilde{v}_0$. Однако это противоречит выбору точек x_n. Поэтому $f^{-1}(\widetilde{v}_0)$ является окрестностью множества $f^{-1}(y)$, т. е. $\widetilde{v}_0\in\widetilde{U}_y$. Значит, $\widetilde{U}_y$ является полной системой окрестностей точки y в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Кроме того, для любой окрестности u множества $f^{-1}(y)$ из включения $u\subset f^{-1}(f(u))$ следует, что $f^{-1}(f(u))$ тоже является окрестностью множества $f^{-1}(y)$, т. е. $f(u)\in\widetilde{U}_y$. С другой стороны, каждое множество из $\widetilde{U}_y$ является образом некоторой окрестности множества $f^{-1}(y)$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{U}_y$ совпадает с системой всех множеств $f(u)$, где u — окрестность множества $f^{-1}(y)$.

(б) В силу теоремы 1.57 и определения семейства $(\widetilde{U}_y : y\in Y)$ отображение f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывно.

Пусть $\widetilde{\Lambda}_1$ — такая операция предела в Y, что f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda}_1)$-секвенциально непрерывно, а $\widetilde{v}$ — окрестность точки y в $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$. В силу теоремы 1.57 $f^{-1}(\widetilde{v})$ является окрестностью множества $f^{-1}(y)$ в (X, Λ). Поэтому $\widetilde{v}\in\widetilde{U}_y$, т. е. полная система окрестностей точки y пространства $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$ содержится в $\widetilde{U}_y$. Отсюда вытекает, что $\widetilde{\Lambda}\leqslant\widetilde{\Lambda}_1$ и, значит, $\widetilde{\Lambda}$ является сильнейшей операцией предела в Y, при которой f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывно.

(в) В силу теоремы 1.68 из $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциальной непрерывности f следует его $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывность. Поэтому если

$\widetilde{v}\in\widetilde{\tau}$, то $f^{-1}(\widetilde{v})\in\tau$. С другой стороны, если $\widetilde{v}\subset Y$ такое, что $f^{-1}(\widetilde{v})\in\tau$, то $f^{-1}(\widetilde{v})$ является окрестностью множества $f^{-1}(y)$ для любого $y\in\widetilde{v}$. Но тогда, как было доказано выше, множество $\widetilde{v}=f(f^{-1}(\widetilde{v}))$ является окрестностью любой своей точки в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. А это означает, что $\widetilde{v}$ открыто в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ и, следовательно, $\widetilde{v}\in\widetilde{\tau}$. Тем самым доказано, что секвенциальная топология $\widetilde{\tau}$ пространства $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ есть система таких $\widetilde{v}\subset Y$, что $f^{-1}(\widetilde{v})\in\tau$.

(г) Пусть $\widetilde{\Lambda}_2$ — такая топологическая операция предела в Y, что отображение f $(\Lambda,\,\widetilde{\Lambda}_2)$-секвенциально непрерывно. В силу теоремы 1.68 отображение f $(\tau,\,\widetilde{\tau}_2)$-непрерывно, где $\widetilde{\tau}_2$ — секвенциальная топология пространства $(Y,\,\widetilde{\Lambda}_2)$. Поэтому если $\widetilde{v}\in\widetilde{\tau}_2$, то $f^{-1}(\widetilde{v})\in\tau$ и $\widetilde{\tau}_2\subset\widetilde{\tau}$. Значит, $\widetilde{\Lambda}'\leqslant\widetilde{\Lambda}_2$, т. е. $\widetilde{\Lambda}'$ является сильнейшей топологической операцией предела в Y, при которой отображение f $(\Lambda,\,\widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно.

(д) Так как из $(\Lambda,\,\widetilde{\Lambda})$-секвенциальной непрерывности f следует его $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывность, а τ и $\widetilde{\tau}$ являются также секвенциальными топологиями пространств $(X,\,\Lambda')$ и $(Y,\,\widetilde{\Lambda}')$ соответственно, то в силу теоремы 1.67 отображение f $(\Lambda',\,\widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно.

(е) Это утверждение легко следует из б), г) и д). ►

В теореме 1.72 пространство $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ может не быть топологическим, даже если пространство $(X,\,\Lambda)$ топологическое (в связи с этим см. предложение 3.37 в главе III, § 8).

С использованием теорем 1.57 и 1.68 легко доказывается

Предложение 1.49. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, $f:X\to Y$ — секвенциально непрерывное отображение, а $\Gamma=\{(x,\,f(x)):x\in X\}$ (подмножество $\Gamma\subset X\times Y$ называется графиком отображения f). Тогда*

а) если $\widetilde{\Lambda}$ — операция однозначного предела, то график Γ замкнут в прямом произведении $(X,\,\Lambda)\times(Y,\,\widetilde{\Lambda})$;

б) если пространство $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ отделимо (хаусдорфово), то для каждой пары $(x,\,y)\in(X\times Y)\setminus\Gamma$ существуют такие окрестности (открытые окрестности) u_x и v_y точек x и y, что $(u_x\times v_y)\cap\Gamma=\varnothing$. ►

Простые примеры показывают, что отображение, имеющее замкнутый график, может не быть секвенциально непрерывным или открытым (см. также пример в § 10, n° 5).

§ 10. Замечания и примеры

1. Пусть X' — множество всех измеримых по Лебегу функций $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (см. [55], с. 425—427), а $\lim$ — классическая операция предела в $\mathbb{R}$. Обозначим через E множество таких $M\subset\mathbb{R}$, что $\mathbb{R}\setminus M$ имеет нулевую меру Лебега. Рассмотрим систему $\{\Lambda'_M : M\in E\}$ операций предела Λ'_M в X', которые определяются следующим образом. Для $x\in X'$ и $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in {X'}^{\mathbb{N}}$ считаем $x\in\Lambda'_M(\hat{x})$, если последовательность $\hat{x}$ функций поточечно на M сходится к функции x, т. е. $x(r)=\lim\hat{x}_r$ для каждого $r\in M$, где $\hat{x}_r=(x_n(r):n\in\mathbb{N})$. Отображение $\Lambda':{X'}^{\mathbb{N}}\to 2^{X'}$ определим формулой $\Lambda'(\hat{x})=\bigcup\limits_{M\in E}\Lambda'_M(\hat{x}),\ \ \hat{x}\in{X'}^{\mathbb{N}}$. Легко заметить, что Λ' соответствует сходимости почти всюду на $\mathbb{R}$ последовательности функций. Покажем, что Λ' не является операцией предела последовательности в принятом здесь смысле. Именно: оно не обладает указанным в теоеме 1.3 свойством 3). Рассмотрим последовательность $\hat{x}$ в X', которая сходится к $x\in X'$ на $\mathbb{R}$ по мере Лебега, но не сходится к x почти всюду (см. [55], с. 94). По *теореме Рисса* (см. [55], с. 96), каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к x почти всюду. Поэтому для рассматриваемых отображения Λ', последовательности $\hat{x}$ и функции x не имеет места свойство 3), указанное в теореме 1.3. Это показывает, что отображение Λ', соответствующее сходимости почти всюду, не может быть определено никаким семейством систем окрестностей в X'. Заметим, что Λ' является операцией псевдопредела в X' (см. замечание 1.10).

В силу теоремы 1.35 рассматриваемая система $\{\Lambda'_M : M\in E\}$ операций предела имеет точную нижнюю границу λ' и точную верхнюю границу Λ'_0 в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}(X')$ всех операций предела в X'. Очевидно, λ' есть операция однозначного предела в X', соответствующая поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности функций, а Λ'_0 есть сильнейшая операция предела в X', удовлетворяющая условию $\Lambda'\leqslant\Lambda'_0$. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$. Определим отображение $\widetilde{\Lambda}':{X'}^{\mathbb{N}}\to 2^{X'}$, считая $x\in\widetilde{\Lambda}'(\hat{x})$ для $x\in X'$ и $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in{X'}^{\mathbb{N}}$, если для каждых положительных чисел ε, δ и k существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $\mu(\{r\in\mathbb{R}:|r|<k,\ |x_n(r)-x(r)|\geqslant\delta\})<\varepsilon$ для всех $n\geqslant m$. Отображение $\widetilde{\Lambda}'$ является операцией предела в X' и соответствует сходимости на $\mathbb{R}$ по мере Лебега. Докажем, что

$\Lambda'_0 = \widetilde{\Lambda}'$. По *теореме Лебега* (см. [55], с. 92), если $x \in \Lambda'(\hat{x})$ для $\hat{x} \in X'^{\mathbb{N}}$, то $x \in \widetilde{\Lambda}'(\hat{x})$. Отсюда следует, что $\Lambda' \leqslant \widetilde{\Lambda}'$ и, значит, $\Lambda'_0 \leqslant \widetilde{\Lambda}'$. Однако по теореме Рисса, если $x \in \widetilde{\Lambda}'(\hat{x})$ для $\hat{x} \in X'^{\mathbb{N}}$, то существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $x \in \Lambda'(\hat{x}')$. Поэтому если $x \in \widetilde{\Lambda}'(\hat{x})$ для $\hat{x} \in X'^{\mathbb{N}}$, то для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует такое $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$, что $x \in \Lambda'(\hat{x}'') \subset \Lambda'_0(\hat{x}'')$. Но тогда $x \in \Lambda'_0(\hat{x})$ в силу указанного в теореме 1.3 свойства 3) операций предела. Отсюда получаем, что $\widetilde{\Lambda}' \leqslant \Lambda'_0$ и, значит, $\Lambda'_0 = \widetilde{\Lambda}'$.

Из сказанного следует, что последовательность $\hat{x} \in X'^{\mathbb{N}}$ сходится к $x \in X'$ на $\mathbb{R}$ по мере Лебега тогда и только тогда, когда любая ее подпоследовательность обладает подпоследовательностью, сходящейся к x почти всюду на $\mathbb{R}$. Это свойство дает возможность ввести в главе II, § 10, n° 2 общее понятие сходимости по мере, обходя при этом понятие измеримой функции.

Пусть $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, т. е. X — множество всех функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Λ_M для каждого $M \subset \mathbb{R}$ — операция предела в X, соответствующая поточечной сходимости на M, а Λ — операция псевдопредела в X, соответствующая сходимости почти всюду на $\mathbb{R}$, т. е. $\Lambda(\hat{x}) = \bigcup\limits_{M \in E} \Lambda_M(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Обозначим через Λ_0 сильнейшую операцию предела в X, удовлетворяющую условию $\Lambda \leqslant \Lambda_0$, т. е. Λ_0 есть точная верхняя граница системы $\{\Lambda_M : M \in E\}$ в $\mathcal{L}(X)$. Нетрудно убедиться, что $x \in \Lambda_0(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ тогда и только тогда, когда каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к x почти всюду на $\mathbb{R}$. Пусть μ^* — внешняя мера Лебега на $\mathbb{R}$ (см. [55], с. 65). Определим в X операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, считая $x \in \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, если для каждых положительных чисел ε, δ и k существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\mu^*(\{r \in \mathbb{R} : |r| < k,\ |x_n(r) - x(r)| \geqslant \delta\}) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant m$. С учетом предложения 1.38 очевидно, что ограничения на $X' \subset X$ операций предела Λ_M, Λ_0, $\widetilde{\Lambda}$ и операции псевдопредела Λ совпадают с рассмотренными выше операциями предела Λ'_M, Λ'_0, $\widetilde{\Lambda}'$ и операцией псевдопредела Λ', причем, как уже было доказано, $\widetilde{\Lambda}' = \Lambda'_0$. Однако $\widetilde{\Lambda} < \Lambda_0$. Действительно, по аналогии с теоремой Рисса можно доказать, что если $x \in \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ для $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, то $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к x почти всюду на $\mathbb{R}$ (в связи с этим см. предложение 2.41 и замечание 2.6 в главе II, § 10, n° 2). Отсюда следует, что $\widetilde{\Lambda} \leqslant \Lambda_0$. А $\widetilde{\Lambda} \neq \Lambda_0$ доказывается при помощи следующего примера. Отрезок $[0;\,1]$ вещественной оси $\mathbb{R}$ представим в виде $[0;\,1] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} H_n$, где $H_i \cap H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, а $\mu^*(H_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. [28], с. 123). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим функцию $x_n \in X$, положив $x_n(r) = 1$ при $r \in H_n$ и $x_n(r) = 0$ при $r \in \mathbb{R}\setminus H_n$. Тогда последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю поточечно на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $0 \in \Lambda_0(\hat{x})$. Однако $0 \notin \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$. Поэтому $\widetilde{\Lambda} \neq \Lambda_0$.

Сходимость, соответствующую операции предела Λ_0 в X, будем называть сходимостью на $\mathbb{R}$ по внешней мере Лебега.

2. Введем в пространствах с операцией предела последовательности понятия предела фильтра, предела функции по фильтру и приведем связанные с ними несколько утверждений.

В пространстве $(X,\,\Lambda)$, имеющего секвенциальную топологию τ, точка $x \in X$ называется пределом (τ-пределом) фильтра $\mathfrak{F}$ в $X' \subset X$, а фильтр $\mathfrak{F}$ называется сходящимся (τ-сходящимся) к x, если фильтр в X, имеющий базу $\mathfrak{F}$, сильнее полной системы окрестностей (открытых окрестностей) точки x.

Пусть функция $f : G \to Y$ принимает значения в пространстве $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$, имеющего секвенциальную топологию $\widetilde{\tau}$, а $\mathfrak{F}$ — фильтр в некотором $G' \subset G$. Точка $y \in Y$ называется пределом ($\widetilde{\tau}$-пределом) функции f по фильтру $\mathfrak{F}$, если y является пределом ($\widetilde{\tau}$-пределом) фильтра $f(\mathfrak{F})$.

Сформулируем утверждения, аналогичные следствиям 1.11, 1.12 и теоремам 1.58, 1.59, 1.41, 1.49.

Пусть $(X,\,\Lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — пространства с операцией предела, имеющие секвенциальные топологии τ и $\widetilde{\tau}$ соответственно, а $G \subset X$. Точка $y \in Y$ является секвенциальным пределом ($(\tau,\,\widetilde{\tau})$-пределом) функции $f : G \to Y$ в предельной точке (точке накопления) $x \in X$ множества G тогда и только тогда, когда для любого сходящегося (τ-сходящегося) к x фильтра $\mathfrak{F}'$ в $G\setminus\{x\}$ точка y является пределом ($\widetilde{\tau}$-пределом) функции f по фильтру $\mathfrak{F}'$. Функция f секвенциально непрерывна ($(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывна) в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда для любого сходящегося (τ-сходящегося) к x_0 фильтра $\mathfrak{F}$ в G значение $f(x_0)$ является пределом ($\widetilde{\tau}$-пределом) функции f по фильтру $\mathfrak{F}$.

В пространстве $(X,\,\Lambda)$, имеющего секвенциальную топологию τ, множество M окрестностно компактно (τ-компактно) тогда и только тогда, когда для каждого фильтра

$\mathfrak{F}$ в M существует фильтр $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$ в M, имеющий предел (τ-предел) в M.

Укажем следующие типы пространств с операцией предела.

Пространство (X, Λ) называется *связным*, если X не является объединением двух непересекающихся непустых открытых подмножеств; *регулярным*, если Λ является операцией однозначного предела, а каждые замкнутое $M \subset X$ и $x \in X \backslash M$ имеют непересекающиеся открытые окрестности; *нормальным*, если Λ является операцией однозначного предела и каждые два непересекающихся замкнутых подмножества имеют непересекающиеся открытые окрестности; *вполне регулярным*, если Λ является операцией однозначного предела, а для каждых замкнутого $M \subset X$ и $x_0 \in X \backslash M$ существует $(\Lambda, \lim)$-секвенциально непрерывная функция $f: X \to \mathbb{R}$, равная нулю на M, единице в точке x_0 и удовлетворяющая условию $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$.

3. Приведем несколько свойств отображения $\lambda: \hat{X} \to X$, где $\hat{X} \subset X^{\mathbb{N}}$, являющегося операцией однозначного предела в множестве X, содержащего более одной точки. Рассмотрим прямое произведение $(X, \lambda)^{\mathbb{N}}$. Нетрудно убедиться, что $\hat{X}$ и прообраз $\lambda^{-1}(x)$ любого $x \in X$ секвенциально всюду плотны в $(X, \lambda)^{\mathbb{N}}$ и не являются открытыми множествами. Отображение λ не является секвенциально непрерывным ни в одной точке множества $\hat{X}$. График $\Gamma = \{(\hat{x}, \lambda(\hat{x})) : \hat{x} \in \hat{X}\}$ отображения λ не замкнут в $(X, \lambda)^{\mathbb{N}} \times X, \lambda)$, а замыкание $\overline{\Gamma}$ не является графиком никакого отображения подмножества множества $X^{\mathbb{N}}$ в X.

Согласно следствию 1.6, секвенциальная топология τ пространства (X, λ) определяет операцию предела λ. Укажем в X топологии $\widetilde{\tau}$, $\widetilde{\tau}'$ и $\widetilde{\tau}''$, которые тоже определяют операцию предела λ и, вообще говоря, отличны от τ. Топология $\widetilde{\tau}$ состоит из пустого подмножества и тех подмножеств множества X, дополнение каждого из которых есть замкнутое в (X, λ) конечное или счетное множество, имеющее конечное число предельных точек. Топология $\widetilde{\tau}'$ состоит из пустого множества и тех подмножеств множества X, дополнение каждого из которых есть замкнутое в (X, λ) конечное или счетное множество. А для топологии $\widetilde{\tau}''$ в качестве предбазы служит система тех подмножеств в X, дополнение каждого из которых является замыканием в (X, λ) конечного или счетного множества. Очевидно, $\widetilde{\tau} \subset \widetilde{\tau}' \subset \widetilde{\tau}'' \subset \tau$. Отметим, что в (X, λ) секвенциально компактное множество $\widetilde{\tau}$-компактно. В X может существовать также отличная от $\widetilde{\tau}$ топология, которая слабее $\widetilde{\tau}$ и определяет операцию предела λ.

4. Примеры топологий, не допускающих секвенциального продолжения. Здесь используется следующее утверждение, аналогичное следствию 1.2.

Если τ — топология в множестве X, допускающая секвенциальное продолжение, то для каждой точки x из τ-замыкания подмножества $M \subset X$ существует такое конечное или счетное $K \subset M$, что x принадлежит τ-замыканию множества K.

Пусть X — бесконечное несчетное множество, а τ — топология, состоящая из пустого подмножества и тех подмножеств в X, дополнение каждого из которых конечно или счетно. Очевидно, конечное или счетное подмножество в X τ-замкнуто, а τ-замыкание бесконечного несчетного подмножества есть X. Поэтому операция τ-замыкания не обладает указанным выше свойством и, следовательно, топология τ не допускает секвенциального продолжения.

Очевидно, каждая из указанных в n° 3 топологий $\widetilde{\tau}$ и $\widetilde{\tau}'$ тоже не допускает секвенциального продолжения.

Приведем пример, показывающий, что тихоновское произведение семейства секвенциальных топологий может не допускать секвенциального продолжения.

Пусть $(X, \lambda) = (\mathbb{R}, \lim)^{\mathbb{R}}$, т. е. X — множество всех функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а λ — операция предела, соответствующая поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности функций. Обозначим через τ_0 и τ секвенциальные топологии пространств $(\mathbb{R}, \lim)$ и (X, λ) соответственно. Рассмотрим в X тихоновскую топологию $\tau^* = \tau_0^{\mathbb{R}}$ и покажем, что она не допускает секвенциального продолжения. В качестве фундаментальной системы τ^*-открытых окрестностей произвольного $x \in X$ может служить система $V_x^* \subset \tau^*$, состоящая из множеств

$$v_x^* = v_x^*(n, \varepsilon; r_1, r_2, \ldots, r_n) =$$

$$= \{y \in X : |y(r_k) - x(r_k)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

где числа $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $r_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ произвольны. Пусть M — множество функций из X, равных нулю на некотором конечном или счетном подмножестве в $\mathbb{R}$ (своем для каждой функции) и единице на его дополнении. Нетрудно убедиться, что нулевая функция является τ^*-точкой накопления множества M. При этом для любого $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ существует τ^*-открытая окрестность нулевой функции, не содержащая ни одного члена последовательности $\hat{x}$. Поэтому топология τ^* не допускает секвенциального продолжения.

Заметим, что в рассматриваемом примере топология τ^* определяет в X операцию предела λ, причем $\tau^* \subset \tau$ и $\tau^* \neq \tau$. Кроме того, множество M замкнуто и секвенциально компактно в $(X,\ \lambda)$, но оно не τ^*-замкнуто, а значит, и не τ^*-компактно в пространстве с топологией $(X,\ \tau^*) = (\mathbb{R},\ \tau_0)^{\mathbb{R}}$, хотя проекция этого множества на $\mathbb{R}$ есть двухточечное множество $\{0,\ 1\}$, которое τ_0-компактно в пространстве с топологией $(\mathbb{R}, \tau_0)$. При этом τ^*-замыкание множества M совпадает с произведением $\{0,\ 1\}^{\mathbb{R}}$, т. е. с множеством всех функций из X, принимающих лишь значения 0 и 1. Отметим еще, что множество G функций из X, равных нулю на дополнении некоторого конечного или счетного подмножества в $\mathbb{R}$ (своего для каждой функции), замкнуто в $(X,\ \lambda)$, а τ^*-замыкание множества G есть X.

Приведенный пример показывает, что в [47], с. 61, *теорема Тихонова* в несколько более общем виде сформулирована не точно. Эта неточность устраняется в следующей формулировке.

Пусть $(X,\ \tau)$ — прямое произведение семейства пространств с топологией $((X_i,\ \tau_i) : i \in I)$. Если подмножество $H \subset X$ τ-компактно, то каждая его проекция $pr_i(H)$ τ_i-компактна. Обратно, если H τ'-замкнуто в подпространстве $(X',\ \tau') \subset \subset (X,\ \tau)$, где $X' = \prod\limits_{\text{ß} \in I} pr_i(H)$, и каждая его проекция $pr_i(H)$ τ_i-компактна, то оно τ-компактно.

Из теоремы Тихонова следует, что множество $H = \{0,\ 1\}^{\mathbb{R}}$ τ^*-компактно. Однако H не является секвенциально компактным в пространстве $(X,\ \lambda)$. Действительно, обозначим через I множество всех бесконечных подмножеств в $\mathbb{N}$. Поскольку I имеет мощность континуума, существует биективное отображение $f : \mathbb{R} \to I$. Построим последовательность функций $x_n \in H$, $n \in \mathbb{N}$, положив $x_n(r) = 1$ при $n \in f(r)$ и $x_n(r) = 0$ при $n \notin f(r)$, где $r \in \mathbb{R}$. Рассмотрим некоторую подпоследовательность $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ и докажем, что она не сходится в $(X,\ \lambda)$. Пусть $r \in \mathbb{R}$ — число, для которого $f(r) = \{k_{2\nu} : \nu \in \mathbb{N}\}$. Тогда $x_{k_{2\nu}}(r) = 1$ и $x_{k_{2\nu-1}}(r) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность чисел $x_{k_n}(r)$, $n \in \mathbb{N}$, не сходится. Отсюда следует, что последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ не обладает сходящейся подпоследовательностью. Значит, множество H не является секвенциально компактным.

5. Пример нормального пространства Фреше–Урысона $(X,\ \lambda)$, имеющего секвенциальную топологию τ, для которого $(X,\ \lambda) \times (X,\ \lambda)$ не является пространством Фреше–Урысона, а $\tau \times \tau$ не является секвенциальной топологией.

Положим $X=\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ и рассмотрим топологию τ в X, состоящую из тех подмножеств множества X, каждое из которых либо не содержит точку $(0,\, 0)$, либо содержит точку $(0,\, 0)$ и для каждого $r_1\in\mathbb{R}$ может не содержать лишь конечное число точек $(r_1,\, r_2)\in X$. Пусть λ — операция предела в X, определенная топологией τ. В пространстве $(X,\, \lambda)$ к точке $x=(r_1,\, r_2)\neq(0,\, 0)$ могут сходиться лишь почти стационарные последовательности, членами каждой из которых, начиная с некоторого номера, является x. А к $(0,\, 0)$ сходятся лишь те последовательности $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ точек $x_n=\left(r_1^{(n)},\, r_2^{(n)}\right)\in X$, для которых множество $\left\{r_1^{(n)} : n\in\mathbb{N}\right\}$ конечно и $\hat{x}$ не обладает стационарной подпоследовательностью, составленной отличной от $(0,\, 0)$ точкой. Легко заметить, что $(X,\, \lambda)$ является нормальным пространством Фреше–Урысона, а τ является его секвенциальной топологией. Очевидно также, что в $(X,\, \lambda)$ любая окрестность точки $(0,\, 0)$ является ее открытой окрестностью.

Покажем, что $(X,\, \lambda)\times(X,\, \lambda)$ не является пространством Фреше–Урысона. С этой целью рассмотрим в $X\times X$ счетное множество

$$H=\left\{\left(\left(r_1^{(k)},\, r_2^{(kn)}\right),\, \left(r_1,\, r_2^{(k)}\right)\right) : k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

где все числа r_1, $r_1^{(k)}$, $r_2^{(k)}$ и $r_2^{(kn)}$ отличны от нуля, причем $r_1^{(k)}\neq r_1^{(i)}$ и $r_2^{(k)}\neq r_2^{(i)}$ при $k\neq i$, а $r_2^{(kn)}\neq r_2^{(ij)}$ при $k\neq i$ или $n\neq j$. В пространстве $(X,\, \lambda)\times(X,\, \lambda)$ для каждого $k\in\mathbb{N}$ последовательность точек $\left(\left(r_1^{(k)},\, r_2^{(kn)}\right),\, \left(r_1,\, r_2^{(k)}\right)\right)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к $\left((0,\, 0),\left(r_1,\, r_2^{(k)}\right)\right)$, а последовательность точек $\left((0,\, 0),\left(r_1,\, r_2^{(k)}\right)\right)$, $k\in\mathbb{N}$, сходится к $((0,\, 0),\, (0,\, 0))$. Однако никакая последовательность в H не сходится к $((0,\, 0),\, (0,\, 0))$. Поэтому в силу теоремы 1.34 указанное прямое произведение не является пространством Фреше–Урысона.

Докажем, что $\tau\times\tau$ не является секвенциальной топологией. Рассмотрим в произведении $(X,\, \lambda)\times(X,\, \lambda)$ множество M всех точек $((r_1,\, r_2),\, (r_2,\, r_1))$, где $(r_1,\, r_2)\neq(0,\, 0)$. Легко убедиться, что M замкнуто и не содержит точку $((0,\, 0),\, (0,\, 0))$. Покажем, что $(\mathrm{u}\times\mathrm{u})\cap M\neq\emptyset$ для любой окрестности u точки $(0,\, 0)$ пространства $(X,\, \lambda)$. Действительно, если предположить, что при каждом $r_2\in\mathbb{R}$ множество $G(r_2)=\{r_1\in\mathbb{R} : (r_1,\, r_2)\in\mathrm{u}\}$ конечно, то для любого счетного множества $\left\{r_2^{(n)}\in\mathbb{R} : n\in\mathbb{N}\right\}$ и любого $r_1\in\mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G\left(r_2^{(n)}\right)$ будем иметь $\left(r_1,\, r_2^{(n)}\right)\notin\mathrm{u}$ при всех $n\in\mathbb{N}$, что невозможно. Поэтому для некоторого $r_2' \in \mathbb{R}$ множество $G(r_2')$ бесконечно. Следовательно, найдется $r_1' \in G(r_2')$, $r_1' \neq 0$, для которого $(r_2', r_1') \in \mathrm{u}$. Но тогда $((r_1', r_2'), (r_2', r_1')) \in (\mathrm{u}\times\mathrm{u})\cap M$. Таким образом, в $(X, \lambda)\times(X, \lambda)$ любая окрестность типа $\mathrm{u}\times\mathrm{u}$ точки $((0, 0), (0, 0))$ имеет непустое пересечение с M. Значит, топология $\tau\times\tau$ не секвенциальна.

Отображение $f: X \to X$, определенное равенством $f(r_1, r_2) = (r_2, r_1)$, $(r_1, r_2) \in X$, имеет обратное отображение $f^{-1} = f$ и график $\Gamma = M \cup \{((0, 0), (0, 0))\}$, причем оно не открыто и не является секвенциально непрерывным в точке $(0, 0)$, хотя его график замкнут в $(X, \lambda)\times(X, \lambda)$ и, более того, для каждой пары $(x, y) \in (X\times X)\setminus\Gamma$ существуют такие открытые окрестности u_x и u_y точек x и y, что $(\mathrm{u}_x\times\mathrm{u}_y)\cap\Gamma = \varnothing$.

Рассмотрим еще подпространство $(X_1, \lambda_1) \subset (X, \lambda)$, где X_1 состоит из точек множества X, имеющих целые (или рациональные) координаты. Пусть τ_1 — секвенциальная топология этого подпространства, являющегося опять нормальным пространством Фреше–Урысона. Прямое произведение $(X_1, \lambda_1)\times(X_1, \lambda_1)$ не является пространством Фреше–Урысона. При этом можно доказать, что $\tau_1\times\tau_1$ является секвенциальной топологией.

6. Пример пространства с операцией однозначного предела (X, λ), секвенциальная топология которого индуцирует в некотором подмножестве несеквенциальную топологию, причем в этом топологическом пространстве каждая точка имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, хотя оно не является пространством Фреше–Урысона (в связи с этим см. предложение 1.35).

В качестве X возьмем счетное множество попарно различных элементов a, a_n, c_{nk} $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим следующее семейство систем окрестностей в X. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечное множество $\{c_{nk}\}$ есть окрестность точки c_{nk}; для каждого $n \in \mathbb{N}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a_n\}\cup\{c_{nk} : k \geqslant m\}$ есть окрестность точки a_n; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a\}\cup\{a_n : n \geqslant m\}$ есть окрестность точки a. С помощью указанного семейства систем окрестностей определим в X операцию однозначного предела λ. В пространстве (X, λ) для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(c_{nk} : k \in \mathbb{N})$ сходится к a_n, а $(a_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к a. При этом в множестве $M = \{c_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ нет сходящейся к a последовательности. Очевидно, a является в (X, λ) точкой накопления множества M, но не является предельной точкой для M. Поэтому в подпространстве $(X_1, \lambda_1) \subset (X, \lambda)$ с носителем $X_1 = M \cup \{a\}$ множество $\{a\}$ является окрестностью точки a. Это означает, что $\{a\}$ открыто в (X_1, λ_1). С другой стороны, в (X, λ) любая открытая окрестность точки a пересекается с M. Отсюда следует, что секвенциальная топология τ_1 подпространства (X_1, λ_1) отличается от топологии τ', индуцированной в X_1 секвенциальной топологией τ пространства (X, λ). Однако каждая из топологий τ_1 и τ' определяет в X_1 операцию предела λ_1. Поэтому τ' не является секвенциальной топологией. Очевидно, в (X, λ) каждая точка имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей. Однако a не имеет конечной или счетной фундаментальной системы открытых окрестностей. Кроме того, в (X, λ) для любого $m \in \mathbb{N}$ окрестность $\{a\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$ точки a не содержит непустого открытого подмножества.

7. Пример неотделимого пространства, являющегося пространством Фреше–Урысона с операцией однозначного предела.

Пусть X — счетное множество попарно различных элементов a, b, c_{nk} $(n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим следующее семейство систем окрестностей в X. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечное множество $\{c_{nk}\}$ есть окрестность точки c_{nk}; для произвольного $(m_k : k \in \mathbb{N}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ множество $\{a\} \cup \{c_{nk} : n \geqslant m_k, k \in \mathbb{N}\}$ есть окрестность точки a; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{b\} \cup \{c_{nk} : n \in \mathbb{N}, k \geqslant m\}$ есть окрестность точки b. Легко убедиться, что указанное семейство систем окрестностей определяет в X операцию однозначного предела λ, причем (X, λ) является неотделимым пространством Фреше–Урысона, а именно: любые две окрестности точек a и b имеют непустое пересечение.

Другим примером указанного типа пространства может служить (X, λ), где $X = \mathbb{R}^2$, а операция однозначного передела λ определяется следующим семейством систем окрестностей. Для любой отличной от $(0, 0)$ и $(1, 1)$ точки $(r_1, r_2) \in X$ одноточечное множество $\{(r_1, r_2)\}$ есть окрестность точки (r_1, r_2). Любое подмножество в X, которое содержит точку $(0, 0)$ и для каждого $r_1 \in \mathbb{R}$ может не содержать лишь конечное число отличных от $(0, 0)$ точек $(r_1, r_2) \in X$, есть окрестность точки $(0, 0)$. Любое подмножество в X, которое содержит точку $(1, 1)$ и для каждого $r_2 \in \mathbb{R}$ может не содержать лишь конечное число отличных от $(1, 1)$ точек $(r_1, r_2) \in X$, есть окрестность точки $(1, 1)$. В этом пространстве (X, λ) любые две окрестности точек $(0, 0)$ и $(1, 1)$ имеют непустое пересечение. При этом подпространство $(X_1, \lambda_1) \subset (X, \lambda)$, носитель X_1 которого состоит из точек множества X, имеющих рациональные координаты, хаусдорфово.

8. Пример отделимого, но не хаусдорфова пространства.

Пусть X — счетное множество попарно различных элементов a, b, a_n, c_{nk} $(n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим следующее семейство систем окрестностей в X. Одноточечное множество $\{c_{nk}\}$ есть окрестность точки c_{nk} при каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a_n\} \cup \{c_{nk} : k \geqslant m\}$ есть окрестность точки a_n при каждом $n \in \mathbb{N}$; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a_n\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$ есть окрестность точки a; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{b\} \cup \{c_{nk} : n \geqslant m,\ k \in \mathbb{N}\}$ есть окрестность точки b. При помощи этого семейства систем окрестностей определим в X операцию однозначного предела λ. Пространство (X, λ) отделимо и не хаусдорфово, а именно: любые две открытые окрестности точек a и b имеют непустое пересечение.

9. Пусть X — множество, имеющее мощность континуума, а $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ — последовательность попарно различных точек множества X. Обозначим $Y = X \setminus [\hat{x}]$. В множестве всех подпоследовательностей последовательности $\hat{x}$ определим отношение эквивалентности, считая две подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$ и $\hat{x}'' \prec \hat{x}$ эквивалентными, если множество $([\hat{x}'] \setminus [\hat{x}'']) \cup ([\hat{x}''] \setminus [\hat{x}'])$ конечно. Обозначим через I множество полученных классов эквивалентности. Очевидно, каждый из этих классов является счетным множеством. Поэтому множество I имеет мощность континуума и, следовательно, существует биективное отображение $f : I \to Y$. Множество I частично упорядочим, положив $i_1 \leqslant i_2$ для классов $i_1 \in I$ и $i_2 \in I$, если для некоторого (а значит, и для каждого) $\hat{z}_1 \in i_1$ существует такое $\hat{z}_2 \in i_2$, что $\hat{z}_1 \prec \hat{z}_2$. Каждому $i \in I$ сопоставим подмножество $M_i = \{f(i') : i' \geqslant i\}$ в Y. Рассмотрим следующее семейство систем окрестностей в X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\{x_n\}$ есть окрестность точки x_n, а для каждого $y \in Y$ множество $\{y\} \cup [\hat{z}]$, где $\hat{z} \in f^{-1}(y)$, есть окрестность точки y. При помощи указанного семейства систем окрестностей определим в X операцию предела Λ. Легко заметить, что $\Lambda(\hat{z}) = M_i$ для любого $\hat{z} \in i$. Полученное пространство (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона, в котором одноточечное множество замкнуто и $\Lambda(\hat{y}) \neq \Lambda(\hat{z})$ для любых $\hat{y} \prec \hat{x}$ и $\hat{z} \prec \hat{x}$, принадлежащих различным классам, т. е. когда множество $([\hat{y}] \setminus [\hat{z}]) \cup ([\hat{z}] \setminus [\hat{y}])$ бесконечно.

Построим теперь пример, показывающий, что указанные в теореме 1.29 свойства операции предела не достаточны, чтобы она была топологической. С этой целью в приведенном выше примере внесем некоторые изменения, а именно: выберем некоторое $x \in X$, не являющееся членом последовательности $\hat{x}$, и положим $Y=X\setminus([\hat{x}]\cup\{x\})$. Рассмотрим опять множество I классов подпоследовательностей последовательности $\hat{x}$, биективное отображение $f:I\to Y$ и подмножества $M_i\subset Y$, $i\in I$. Вместе с указанными выше системами окрестностей точек x_n, $n\in\mathbb{N}$, и $y\in Y$ рассмотрим также систему окрестностей точки x, состоящую из множеств $\{x\}\cup(Y\setminus M_i)$, $i\in I$. При помощи полученного семейства систем окрестностей определим в X операцию предела Λ. В пространстве $(X,\,\Lambda)$ одноточечное множество замкнуто. Для каждого $i\in I$ множество M_i тоже замкнуто. Кроме того, $\Lambda(\hat{z})=M_i$ для любого $\hat{z}\in i$. Рассмотрим некоторое $\hat{z}\prec\hat{x}$ и такую счетную систему подпоследовательностей $\hat{z}_k\prec\hat{z}$, $k\in\mathbb{N}$, что $[\hat{z}]=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}[\hat{z}_k]$ и $[\hat{z}_{k'}]\cap[\hat{z}_{k''}]=\varnothing$ при $k'\neq k''$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ обозначим через i_k класс из I, содержащий $\hat{z}_k$, и положим $y_k=f(i_k)$. Очевидно, каждое $i\in I$ может предшествовать только одному из i_k. Следовательно, каждое M_i может содержать только одну из точек y_k. Поэтому последовательность $\hat{y}=(y_k:k\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в каждой окрестности $\{x\}\cup(Y\setminus M_i)$ точки x, т. е. $x\in\Lambda(\hat{y})$. Отсюда с учетом $y_k\in\Lambda(\hat{z}_k)$, $k\in\mathbb{N}$, следует, что $x\in([\hat{z}]^+)^+$. Однако x является единственной предельной точкой множества Y. Поэтому $\overline{[\hat{z}]}=([\hat{z}]^+)^+$. Таким образом, $x\in\overline{[\hat{z}]}$ для любого $\hat{z}\prec\hat{x}$, причем, очевидно, $x\notin\Lambda(\hat{x})$. В силу теоремы 1.28 построенная операция предела Λ не является топологической, хотя она обладает указанными в теореме 1.29 свойствами.

10. Пример, показывающий, что в топологическом пространстве $(X,\,\Lambda)$ для сходящейся последовательности $\hat{x}$ квазизамыкание $[\hat{x}]^+$ может не быть замкнутым.

Пусть X — счетное множество попарно различных элементов $x,\ y,\ x_n,\ y_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Множество $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ задаем при помощи семейства $(c_{nk}:n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N})$ попарно различных элементов c_{nk}. Рассмотрим следующее семейство систем окрестностей в X. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ множество $\{x_n\}$ есть окрестность точки x_n; для произвольного $m\in\mathbb{N}$ множества $\{x\}\cup\{x_n:n\geqslant m\}$ и $\{y\}\cup\{y_n:\,n\geqslant m\}$ являются окрестностями точек x и y соответственно; для произвольного $m\in\mathbb{N}$ множество $\{y_n\}\cup\{c_{nk}:k\geqslant m\}$ есть окрестность точки y_n при каждом $n\in\mathbb{N}$. С помощью указанного семейства систем окрестностей определим в X операцию предела Λ. Очевидно, в пространстве $(X,\,\Lambda)$ последовательность $\hat{x}=(x_1,\,x_2,\,\ldots)$ сходится к x, $\hat{y}=(y_1,\,y_2,\,\ldots)$ сходится к y, а для каждого $n\in\mathbb{N}$ последовательность $(c_{nk}:k\in\mathbb{N})$ сходится к y_n. При этом $[\hat{x}]^+=X\setminus\{y\}$ и $\overline{[\hat{x}]}=X$. Значит, $[\hat{x}]^+$ не замкнуто.

11. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов $x,\ x_n,\ \xi_n\ (n\in\mathbb{N})$. Рассмотрим следующее семейство систем окрестностей в X. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ одноточечное множество $\{x_n\}$ и двухточечное множество $\{x_n,\ \xi_n\}$ являются окрестностями точек x_n и ξ_n соответственно, а для произвольного $m\in\mathbb{N}$ множество $\{x\}\cup\{\xi_n : n\geqslant m\}$ есть окрестность точки x. При помощи указанного семейства систем окрестностей определим в X операцию предела Λ. В пространстве $(X,\ \Lambda)$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ стационарная последовательность $\dot{x}_n$ сходится к ξ_n, а $\hat{\xi}=(\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots)$ сходится к x. Однако $\hat{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots)$ не обладает сходящейся подпоследовательностью. Заметим, что последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в каждой открытой окрестности точки x. Следовательно, x является τ-пределом для $\hat{x}$, где τ — секвенциальная топология пространства $(X,\ \Lambda)$. Очевидно, множество $\{x\}\cup[\hat{x}]$ τ-компактно, хотя оно не является секвенциально компактным. Этот пример показывает еще, что для нетопологических пространств утверждения теоремы 1.30 и предложения 1.32 не верны.

12. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов $x_n,\ \xi_n\ (n\in\mathbb{N})$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ двухточечное множество $\{x_n,\ \xi_n\}$ будем считать открытым множеством. Эта система открытых множеств является базой секвенциальной топологии τ в X. Очевидно, любое непустое подмножество множества X имеет в X τ-точку накопления. Однако множество X не является τ-счетно компактным. Этот пример показывает, что в обратном утверждении следствия 1.8 условие τ-замкнутости одноточечного множества существенно.

13. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов x и $x_n,\ n\in\mathbb{N}$. Система подмножеств $\{x\}$ и $\{x,\ x_n\},\ n\in\mathbb{N}$, множества X является базой секвенциальной топологии τ в X. Пусть Λ — операция предела в X, определенная топологией τ. Очевидно, в $(X,\ \Lambda)$ замыкание множества $\{x\}$ есть X, а последовательность $\hat{x}=(x_1,\ x_2,\ \ldots)$ не обладает сходящейся подпоследовательностью. Множество $\{x\}$ секвенциально компактно, окрестностно компактно и τ-компактно. Однако $\{x\}$ не является ни секвенциально относительно компактным, ни окрестностно относительно компактным и ни τ-относительно компактным.

14. Рассмотрим пространства $(X,\ \Lambda_1)$ и $(X,\ \Lambda_2)$, где $X=\{x,\ y,\ z\}$, а семейства $(U'_\xi : \xi\in X)$ и $(U''_\xi : \xi\in X)$ полных систем окрестностей этих пространств определяются равенствами

$$U'_x = U'_y = U''_x = U''_y = \{\{x,\ y\},\ X\},$$

$$U'_z = \{\{x,\, z\},\, X\}, \quad U''_z = \{\{y,\, z\},\, X\}.$$

Эти пространства имеют одну и ту же секвенциальную топологию $\tau = \{\varnothing,\, \{x,\, y\},\, X\}$. Операцию предела Λ в X определим формулой $\Lambda(\hat{\xi}) = \Lambda_1(\hat{\xi}) \cap \Lambda_2(\hat{\xi})$, $\hat{\xi} \in X^{\mathbb{N}}$. Семейство $(U_\xi : \xi \in X)$ полных систем окрестностей пространства $(X,\, \Lambda)$ определяется равенствами

$$U_x = U_y = \{\{x,\, y\},\, X\}, \quad U_z = \{\{z\},\, \{x,\, z\},\, \{y,\, z\},\, X\},$$

а секвенциальная топология пространства $(X,\, \Lambda)$ есть отличная от τ система $\widetilde{\tau} = \{\varnothing,\, \{z\},\, \{x,\, y\},\, X\}$.

15. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов a, b, c_{nk} $(n \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N})$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ операцию однозначного предела λ_i в X определим при помощи следующего семейства систем окрестностей. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечное множество $\{c_{nk}\}$ есть окрестность точки c_{nk}; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a\} \cup \{c_{nk} : n \geqslant m,\, k \leqslant i\}$ есть окрестность точки a; множество $\{b\} \cup \{c_{nk} : n \in \mathbb{N},\, k \geqslant m\}$ есть окрестность точки b. Каждое из $(X,\, \lambda_i)$, $i \in \mathbb{N}$, является хаусдорфовым пространством Фреше–Урысона. В частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}(X)$ всех операций предела в X точная верхняя граница совершенно упорядоченного подмножества $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ есть операция однозначного предела λ, указанная в первом примере, приведенном в n° 7. Однако $(X,\, \lambda)$ — неотделимое пространство Фреше–Урысона.

16. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов a, b, a_n, c_{nk} $(n \in \mathbb{N},\, k \in \mathbb{N})$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ операцию однозначного предела λ_i в X определим при помощи следующего семейства систем окрестностей. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечное множество $\{c_{nk}\}$ есть окрестность точки c_{nk}; для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a_n\} \cup \{c_{nk} : k \geqslant m\}$ есть окрестность точки a_n при каждом $n \leqslant i$; множество $\{a\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$ есть окрестность точки a; множество $\{b\} \cup \{c_{nk} : n \geqslant m,\ k \in \mathbb{N}\}$ есть окрестность точки b. Каждое из $(X,\, \lambda_i)$, $i \in \mathbb{N}$, является хаусдорфовым пространством Фреше–Урысона. В частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_1(X)$ всех операций однозначного предела в X точная верхняя граница совершенно упорядоченного подмножества $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ есть операция однозначного предела λ, указанная в n° 8. Однако $(X,\, \lambda)$ секвенциально компактно и не является пространством Фреше–Урысона. В силу теоремы 1.36 λ является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1(X)$. Поэтому любая операция предела Фреше–Урысона в X, которая слабее λ, является операцией неоднозначного предела (это легко вытекает также из теоремы 1.33). Отсюда следует, что в частично упорядоченном множестве $\widetilde{\mathcal{L}}_1(X)$ всех операций однозначного предела Фреше–Урысона в X совершенно упорядоченное подмножество $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ не имеет верхней границы.

17. Пример, показывающий, что секвенциально непрерывная в точке функция может не быть непрерывной в этой точке.

Пусть X — счетное множество попарно различных элементов a, a_n, c_{nk} $(n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N})$, а λ — операция однозначного предела в X, указанная в n° 6. Операцию однозначного предела $\widetilde{\lambda}$ в X определим при помощи следующего семейства систем окрестностей. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечные множества $\{a_n\}$ и $\{c_{nk}\}$ являются окрестностями точек a_n и c_{nk} соответственно, а для произвольного $m \in \mathbb{N}$ множество $\{a\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$ есть окрестность точки a. Пусть τ и $\widetilde{\tau}$ — секвенциальные топологии пространств $(X,\ \lambda)$ и $(X,\ \widetilde{\lambda})$ соответственно. Система множеств $\{a\} \cup \{a_n : n \geqslant m\} \cup \{c_{nk} : k \geqslant m_n,\ n \geqslant m\}$, где $m \in \mathbb{N}$ и $(m_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ произвольны, образует фундаментальную систему открытых окрестностей точки a в $(X,\ \lambda)$. В $(X,\ \widetilde{\lambda})$ система множеств $\{a\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$, где $m \in \mathbb{N}$ произвольно, образует фундаментальную систему открытых окрестностей точки a. Рассмотрим тождественное отображение $f : X \to X$, т. е. $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Оно $(\lambda,\ \widetilde{\lambda})$-секвенциально непрерывно в точке a, но не является $(\tau,\ \widetilde{\tau})$-непрерывным в a. Отсюда следует, что f не является непрерывным в точке a.

18. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов a, a_n, b_n, c_{nk}, d_{nk} $(n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N})$, а Y — множество элементов a, a_n, c_{nk}, d_{nk} $(n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N})$. Рассмотрим в X следующее семейство систем окрестностей. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечные множества $\{c_{nk}\}$ и $\{d_{nk}\}$ являются окрестностями точек c_{nk} и d_{nk} соответственно; для каждого $n \in \mathbb{N}$ и произвольного $m \in \mathbb{N}$ множества $\{a_n\} \cup \{c_{nk} : k \geqslant m\}$ и $\{b_n\} \cup \{d_{nk} : k \geqslant m\}$ являются окрестностями точек a_n и b_n соответственно; множество $\{a\} \cup \{a_n : n \geqslant m\} \cup \{b_n : n \geqslant m\}$ есть окрестность точки a. При помощи указанного семейства систем окрестностей определим в X операцию однозначного предела λ. В множестве Y операцию однозначного предела $\widetilde{\lambda}$ определим при помощи следующего семейства систем окрестностей. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ одноточечные множества $\{c_{nk}\}$ и $\{d_{nk}\}$ являются окрестностями точек c_{nk} и d_{nk} соответственно; для каждого $n\in\mathbb{N}$ и произвольного $m\in\mathbb{N}$ множество $\{a_n\}\cup\{c_{nk}:k\geqslant m\}\cup\{d_{nk}:k\geqslant m\}$ есть окрестность точки a_n; множество $\{a\}\cup\{a_n:n\geqslant m\}$ есть окрестность точки a. Секвенциальные топологии пространств $(X,\,\lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\lambda})$ обозначим через τ и $\widetilde{\tau}$ соответственно. Отображение $f:X\to Y$ определим следующим образом: $f(c_{nk})=c_{nk}$, $f(d_{nk})=d_{nk}$, $f(a_n)=a_n$, $f(b_n)=a$, $f(a)=a$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N}$. Отображение f $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывно в точке a, но не непрерывно в этой точке. Действительно, рассмотрим подпространство $(X_1,\,\lambda_1)\subset(X,\,\lambda)$, где X_1 — множество точек $a,\ b_n,\ c_{nk},\ d_{nk}$ $(n\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{N})$. Множество $Y_1=f(X_1)$ состоит из точек $a,\ c_{nk},\ d_{nk}$ $(n\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{N})$. В подпространстве $(Y_1,\,\widetilde{\lambda}_1)\subset(Y,\,\widetilde{\lambda})$ множество $\{a\}$ является открытой окрестностью точки a. В $(X_1,\,\lambda_1)$ система множеств $\{a\}\cup\{b_n:n\geqslant m\}\cup\{d_{nk}:k\geqslant m_n,\ n\geqslant m\}$, где $m\in\mathbb{N}$ и $(m_n:n\in\mathbb{N})\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ произвольны, образует фундаментальную систему открытых окрестностей точки a. Однако при отображении f образ любого из указанных открытых окрестностей точки a не содержится в $\{a\}$. Поэтому f не непрерывно в точке a.

19. Пусть X — счетное множество попарно различных элементов $a,\ a_n,\ c_{nk}$ $(n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N})$, а λ — операция однозначного предела в X, указанная в n° 6. В подмножестве $Y\subset X$, состоящем из элементов $a,\ c_{nk}$ $(n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N})$, рассмотрим операцию однозначного предела $\widetilde{\lambda}$, по которой сходятся лишь почти стационарные последовательности. Имеем, что $(Y,\,\widetilde{\lambda})\subset(X,\,\lambda)$. Секвенциальные топологии пространств $(X,\,\lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\lambda})$ обозначим через τ и $\widetilde{\tau}$ соответственно. Тождественное отображение $f:Y\to Y$ непрерывно, но не является $(\tau,\,\widetilde{\tau})$-непрерывным в точке a. Кроме того, оно $(\widetilde{\lambda},\,\widetilde{\lambda})$-усиленно непрерывно, но не является $(\lambda,\,\widetilde{\lambda})$-усиленно непрерывным в точке a.

20. Пусть τ — секвенциальная топология пространства $(\mathbb{R},\,\lim)$, т. е. топология, для которой в качестве базы служит система всех открытых числовых промежутков. Обозначим через τ^* топологию в $\mathbb{R}$, состоящую из пустого множества и тех множеств из τ, дополнение каждого из которых является конечным или счетным множеством. Легко убедиться, что топология τ^* тоже определяет в $\mathbb{R}$ операцию предела lim. Тождественное отображение $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ секвенциально непрерывно и $(\tau,\,\tau)$-непрерывно. Однако f не является $(\tau^*,\,\tau)$-непрерывным ни в одной точке. Обозначим через T множество всех топологий в

$\mathbb{R}$, определяющих операцию предела lim, а через T' — множество всех хаусдорфовых топологий из T. Для каждого $r\in\mathbb{R}$ существует такая топология $\tau_r\in T'$, что f не является $(\tau_r,\,\tau)$-непрерывным только в точке r. Именно: множество $v\in\tau$ принадлежит τ_r, если либо $r\notin v$, либо $r\in v$, а $\mathbb{R}\backslash v$ есть объединение конечного числа конечных отрезков и множества, состоящего из конечного или счетного числа точек. Очевидно, $\tau_{r_1}\cap\tau_{r_2}\in T\backslash T'$ для любых чисел $r_1\neq r_2$, а для топологии $\widetilde{\tau}^*=\bigcap\{\tau_r:r\in\mathbb{R}\}$ имеем, что $\widetilde{\tau}^*\in T\backslash T'$ и $\tau^*\subset\widetilde{\tau}^*$. Заметим, что $\mathbb{R}$ является множеством первой категории в пространстве $(\mathbb{R},\,\widetilde{\tau}^*)$, так как для каждого $n\in\mathbb{N}$ отрезок $[-n;\,n]$ $\widetilde{\tau}^*$-замкнут и не имеет $\widetilde{\tau}^*$-внутренних точек. Конечное множество замкнуто относительно любой топологии $\widetilde{\tau}\in T$, а каждая точка из $\mathbb{R}$ имеет $\widetilde{\tau}$-открытую окрестность, дополнение которой не ограничено и содержит бесконечное ограниченное подмножество. Кроме того, для каждого неограниченного подмножества $M\subset\mathbb{R}$ каждая точка $r\in\mathbb{R}$ имеет такую окрестность $v\in\widetilde{\tau}$, что множество $M\backslash v$ не ограничено.

В конечном числовом отрезке есть только одна хаусдорфова топология, определяющая классическую операцию предела. Это вытекает из следующего утверждения, являющегося аналогом теоремы 1.36 для топологий (см. [54], с. 74).

Если в множестве X топологии $\tau'\subset\tau''$ такие, что τ' хаусдорфова, а X τ''-компактно, то $\tau'=\tau''$.

Отсюда следует, что любые две топологии из T' индуцируют в ограниченном множестве одну и ту же топологию. Однако в отличном от $\mathbb{R}$ открытом промежутке по аналогии с τ_r можно построить хаусдорфовые топологии, определяющие классическую операцию предела, которые не могут быть индуцированы топологиями из T'.

21. Приведем два примера операций предела в $X=2^M$, где M — некоторое множество. Обозначим через $\hat{X}$ множество таких $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$, что $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{n\geqslant k}x_n=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\bigcap\limits_{n\geqslant k}x_n$. Отображение $\lambda:\hat{X}\to X$ определим для всех $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in\hat{X}$ равенством

$$\lambda(\hat{x})=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{n\geqslant k}x_n=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant k}x_n.$$

Легко проверить, что λ является операцией однозначного предела в X. Если в пространстве $(X,\,\lambda)$ последовательности $(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $(y_n:n\in\mathbb{N})$ сходятся к x и y соответственно, то последовательности $(x_n\cup y_n:n\in\mathbb{N})$, $(x_n\cap y_n:n\in\mathbb{N})$ и $(x_n\backslash y_n:n\in\mathbb{N})$ сходятся к $x\cup y$, $x\cap y$ и $x\backslash y$ соответственно. Для каждого $H \subset M$, такого, что $M \backslash H$ конечно, множество 2^H является открытой окрестностью точки $\varnothing$ пространства (X, λ), причем для каждого $x \in X$ множество $\{x \cup y : y \in 2^H\}$ является открытой окрестностью точки x. Обозначим $V_\varnothing = \{2^H : H \subset M$ и $M \backslash H$ конечно$\}$. Тогда семейство $(V_x : x \in X)$ систем $V_x = \{\{x \cup y : y \in v\} : v \in V_\varnothing\}$ открытых окрестностей $\{x \cup y : y \in v\}$ определяет в X операцию предела λ, хотя V_x не совпадает с полной системой открытых окрестностей точки $x \in X$.

Рассмотрим такой функционал $\mu^* : X \to R_+$, что $\mu^*(\varnothing) = 0$ и $\mu^*(x) \leqslant \mu^*(y) + \mu^*(z)$ для любых x, y и z из X, удовлетворяющих включению $x \subset y \cup z$. Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ определим, считая $x \in \Lambda(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, если числовая последовательность $\mu^*((x_n \backslash x) \cup (x \backslash x_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в классическом смысле. Легко проверить, что Λ является операцией предела в X. Если в пространстве (X, Λ) последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ и $(y_n : n \in \mathbb{N})$ сходятся к x и y соответственно, то $(x_n \cup y_n : n \in \mathbb{N})$, $(x_n \cap y_n : n \in \mathbb{N})$ и $(x_n \backslash y_n : n \in \mathbb{N})$ сходятся к $x \cup y$, $x \cap y$ и $x \backslash y$ соответственно. Отметим, что по формуле $d(x, y) = \mu^*((x \backslash y) \cup (y \backslash x))$, $x \in X$, $y \in X$, задается полуметрика $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ на X (см. главу II, § 8), определяющая операцию предела Λ.

22. Пусть X — частично предупорядоченное множество. Определим отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, считая $x \in \Lambda(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, если $x_n \leqslant x$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Легко проверить, что Λ является операцией предела Фреше–Урысона в X. Можно определить в X также операцию предела Фреше–Урысона Λ', считая $x \in \Lambda'(\hat{x})$, если $x \leqslant x_n$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$.

23. Пусть X — частично упорядоченное множество. Определим отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, считая $x \in \Lambda(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, если либо x является минимальным (максимальным) элементом в X и для каждого $x' > x$ $(x'' < x)$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x \leqslant x_n < x'$ $(x'' < x_n \leqslant x)$ при всех $n \geqslant m$, либо x не является ни минимальным и ни максимальным элементом в X и для каждых x' и x'' из X, удовлетворяющих условию $x'' < x < x'$, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x'' < x_n < x'$ при всех $n \geqslant m$. Нетрудно проверить, что Λ является топологической операцией предела в X, причем если X совершенно упорядочено, то пространство (X, Λ) хаусдорфово.

Глава II
ПРОСТРАНСТВА С СЕКВЕНЦИАЛЬНОЙ РАВНОМЕРНОСТЬЮ

§ 1. Отношение секвенциальной квазиравномерности. Полная система окружений

Понятие пространства с операцией предела последовательности можно ввести при помощи соображений, которые приводят также к понятию пространства с секвенциальной равномерностью, имеющему аналогию с понятием равномерного пространства, рассматриваемом в общей топологии.

Пусть X — непустое множество, а V — некоторая система подмножеств декартова произведения $X \times X$, содержащих диагональ $\Delta(X)$. Каждое множество $\mathrm{v} \in V$ назовем *окружением* диагонали $\Delta(X)$ (короче — окружением), а V — системой (точнее — предварительной системой) окружений. При помощи системы окружений V определим подмножество $S \subset (X \times X)^{\mathbb{N}}$, называемое *структурой секвенциальной квазиравномерности* на X и состоящее из тех последовательностей в $X \times X$, каждая из которых почти вся лежит в каждом $\mathrm{v} \in V$. Каждой последовательности $\hat{\zeta} = (\zeta_n : n \in \mathbb{N}) \in S$, где $\zeta_n = (x_n, y_n)$, сопоставим пару $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в X и множество таких пар обозначим через R. Подмножество $R \subset X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ определяет в $X^{\mathbb{N}}$ рефлексивное бинарное отношение, называемое *отношением секвенциальной квазиравномерности*. Очевидно, фильтр V' в $X \times X$, имеющий предбазу V, определяет то же самое отношение секвенциальной квазиравномерности R. Объединение U всех систем окружений, определяющих R, тоже определяет R. Система U является фильтром в $X \times X$, а также сильнейшей системой окружений, определяющей отношение секвенциальной квазиравномерности R, и называется *полной системой окружений*, соответствующей отношению R (или структуре S). Полная система окружений U может отличаться от V', причем $V' \subset U$. Возможность $V' \neq U$ означает, что не всякий фильтр подмножеств произведения $X \times X$, содержащих $\Delta(X)$, может служить полной системой окружений, соответствующей некоторому отношению секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$. По аналогии с предложением 1.4 можно доказать, что U совпадает с пересечением есех фильтров в $X \times X$, имеющих конечную или счетную базу (или только ассоциированных с последовательностями) и содержащих систему V (фильтр U может не иметь конечной или счетной базы).

Если системы окружений V_1 и V_2 определяют одно и то же отношение секвенциальной квазиравномерности, то пересечение системы V_1 совпадает с пересечением системы V_2.

Теорема 2.1. *Система U подмножеств декартова произведения $X\times X$, содержащих диагональ $\Delta(X)$, тогда и только тогда является полной системой окружений, соответствующей некоторому отношению секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$, когда для каждого такого $H\subset X\times X$, что $H\notin U$, существует последовательность в $(X\times X)\setminus H$, почти вся лежащая в каждом множестве из U. Кроме того, U тогда и только тогда является полной системой окружений, соответствующей некоторому отношению секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$, когда U совпадает с пересечением всех фильтров в $X\times X$, имеющих конечную или счетную базу (или только ассоциированных с последовательностями) и содержащих систему U.* ►

Теорема 2.2. *Подмножество $S\subset(X\times X)^{\mathbb{N}}$ является структурой секвенциальной квазиравномерности на X (т. е. определяется системой окружений) тогда и только тогда, когда*

1) $\dot\zeta\in S$ для каждого $\zeta\in\Delta(X)$;

2) если $\hat\zeta\in S$ и $\hat\zeta'\prec\hat\zeta$, то $\hat\zeta'\in S$;

3) если $\hat\zeta\in(X\times X)^{\mathbb{N}}\setminus S$, то существует такое $\hat\zeta'\prec\hat\zeta$, что $S\cap[\hat\zeta']^{\mathbb{N}}=\varnothing$.

Полная система окружений U, соответствующая структуре секвенциальной квазиравномерности S, есть множество таких $\mathrm{u}\subset X\times X$, что $S\cap((X\times X)\setminus\mathrm{u})^{\mathbb{N}}=\varnothing$. ►

Теорема 2.3. *Подмножество $S\subset(X\times X)^{\mathbb{N}}$ является структурой секвенциальной квазиравномерности на X тогда и только тогда, когда*

1) $\dot\zeta\in S$ для каждого $\zeta\in\Delta(X)$;

2) если $\hat\zeta\in S$ и $\hat\zeta'\prec\hat\zeta$, то $\hat\zeta'\in S$;

3) если $\hat\zeta\in(X\times X)^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat\zeta'\prec\hat\zeta$ существует $\hat\zeta''\prec\hat\zeta'$ из S, то $\hat\zeta\in S$;

4) если $\hat\zeta=(\zeta_n:n\in\mathbb{N})\in(X\times X)^{\mathbb{N}}$ такое, что $\dot\zeta_n\in S$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то $\hat\zeta\in S$. ►

Теорема 2.4. *Подмножество $R\subset X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$ определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной квазиравномерности тогда и только тогда, когда*

1) $(\dot{x}, \dot{x}) \in R$ для каждого $x \in X$;

2) если $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$, то $(\hat{x}', \hat{y}') \in R$;

3) если $(\hat{x}, \hat{y}) \in (X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}) \setminus R$, то существует $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ такое, что $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \notin R$ для любого $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению $[(\hat{\xi}, \hat{\eta})] \subset [(\hat{x}', \hat{y}')]$.

Полная система окружений U, соответствующая отношению секвенциальной квазиравномерности R, есть множество таких $\mathrm{u} \subset X \times X$, что $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \notin R$ для любого $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению $[(\hat{\xi}, \hat{\eta})] \subset (X \times X) \setminus \mathrm{u}$. ►

Теорема 2.5. *Подмножество $R \subset X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной квазиравномерности тогда и только тогда, когда*

1) $(\dot{x}, \dot{x}) \in R$ для каждого $x \in X$;

2) если $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$, то $(\hat{x}', \hat{y}') \in R$;

3) если $(\hat{x}, \hat{y}) \in (X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}})$ такое, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}') \prec \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$ из R, то $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$;

4) если пара $(\hat{x}, \hat{y}) \in (X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ такая, что $(\dot{x}_n, \dot{y}_n) \in R$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$. ►

Из указанных в теореме 2.4 свойств 1) и 3) (или из указанных в теореме 2.5 свойств 1) и 4)) следует рефлексивность отношения R.

Если U — полная система окружений, соответствующая отношению секвенциальной квазиравномерности R в $X^{\mathbb{N}}$, а V — система всех таких $\mathrm{v} \in U$, что множество $(X \times X) \setminus \mathrm{v}$ конечно или счетно, то в силу теоремы 2.4 система окружений V определяет отношение секвенциальной квазиравномерности R.

При помощи отношения секвенциальной квазиравномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определим отображения $\Lambda_i : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, $i = 1, 2$, считая $x \in \Lambda_1(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, если $(\hat{x}, \dot{x}) \in R$, а $x \in \Lambda_2(\hat{x})$, если $(\dot{x}, \hat{x}) \in R$. Очевидно, что если $(\dot{x}, \dot{y}) \in R$ для точек x и y из X, то $y \in \Lambda_1(\dot{x})$ и $x \in \Lambda_2(\dot{y})$. В силу теоремы 2.5 каждое из Λ_1 и Λ_2 обладает указанными в теореме 1.3 свойствами и, следовательно, является операцией предела в X. Пусть U — некоторая система окружений в $X \times X$, определяющая отношение секвенциальной квазиравномерности R. Для каждого $x \in X$ рассмотрим системы подмножеств множества X

$$U'_x = \{\mathrm{u}[x]_1 : \mathrm{u} \in U\}, \quad U''_x = \{\mathrm{u}[x]_2 : \mathrm{u} \in U\},$$

где $\mathrm{u}[x]_1 = \{y : (y, x) \in \mathrm{u}\}$ и $\mathrm{u}[x]_2 = \{y : (x, y) \in \mathrm{u}\}$. Нетрудно убедиться, что если U'_x принять как систему окрестностей точки x, то семейство $(U'_x : x \in X)$ систем окрестностей определит в X операцию предела Λ_1. Аналогично семейство $(U''_x : x \in X)$ систем окрестностей определяет в X операцию предела Λ_2. При этом если U является полной системой окружений, соответствующей отношению секвенциальной квазиравномерности R, то U'_x и U''_x являются полными системами окрестностей точки x в пространствах (X, Λ_1) и (X, Λ_2) соответственно. Действительно, пусть u'_x и u''_x — некоторые окрестности точки x в (X, Λ_1) и (X, Λ_2) соответственно. Положим

$$\mathrm{u} = (X \times X) \setminus (((X \setminus u'_x) \times \{x\}) \cup (\{x\} \times (X \setminus u''_x))).$$

Тогда $\mathrm{u} \in U$, причем $\mathrm{u}[x]_1 = u'_x$ и $\mathrm{u}[x]_2 = u''_x$. Относительно Λ_1 и Λ_2 будем говорить, что они определены отношением секвенциальной квазиравномерности R или системой окружений U.

Пусть R_1 и R_2 — отношения секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Если $R_1 \subset R_2$, то будем говорить, что отношение секвенциальной квазиравномерности R_1 *сильнее* R_2 (или R_2 *слабее* R_1). Множество $\mathcal{R}(X^{\mathbb{N}})$ всех отношений секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$, частично упорядоченное отношением включения, является полной решеткой, наибольшим элементом которой, т. е. слабейшим отношением секвенциальной квазиравномерности, является $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, а наименьшим элементом, т. е. сильнейшим отношением секвенциальной квазиравномерности, является множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в X, что $x_n = y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа значений.

Пусть $\{R_i : i \in I\}$—система отношений секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Точной нижней и точной верхней границами этой системы являются отношения секвенциальной квазиравномерности $R' = \bigcap\limits_{i \in I} R_i$ и R'' соответственно, где R'' определяется следующим образом. Пусть $P_1 = \bigcup\limits_{i \in I} R_i$, а P_2 — множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в X, что $(\dot{x}_n, \dot{y}_n) \in P_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $P = P_1 \cup P_2$. Тогда R'' есть множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y}) = X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$ из P. Отношения секвенциальной квазиравномерности R' и R'' могут быть определены при помощи систем окружений $V' = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$

и $U'' = \bigcap\limits_{i \in I} U_i$ соответственно, где U_i — полная система окружений, соответствующая R_i, причем U'' является полной системой окружений, соответствующей R''.

Пусть R — отношение секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$, а $X_1 \subset X$ — непустое подмножество. Обозначим $R_1 = R \cap (X_1^{\mathbb{N}} \times X_1^{\mathbb{N}})$. Тогда R_1 является в $X_1^{\mathbb{N}}$ отношением секвенциальной квазиравномерности и называется ограничением отношения R на $X_1^{\mathbb{N}}$. При этом если U — полная система окружений в $X \times X$, соответствующая R, то система окружений U_1, индуцированная в $X_1 \times X_1$ системой U, является полной системой окружений, соответствующей R_1. Очевидно, всякое отношение секвенциальной квазиравномерности в $X_1^{\mathbb{N}}$ есть ограничение на $X_1^{\mathbb{N}}$ некоторого отношения секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Пусть $E = \{R_i : i \in I\}$ и $E_1 = \{R_i' : i \in I\}$ — системы отношений секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$ и $X_1^{\mathbb{N}}$ соответственно, где $R_i' = R_i \cap (X_1^{\mathbb{N}} \times X_1^{\mathbb{N}})$. Если R' и R'' — соответственно точная нижняя и точная верхняя границы системы E в $\mathcal{R}(X^{\mathbb{N}})$, то $R_1' = R' \cap (X_1^{\mathbb{N}} \times X_1^{\mathbb{N}})$ и $R_1'' = R'' \cap (X_1^{\mathbb{N}} \times X_1^{\mathbb{N}})$ являются соответственно точной нижней и точной верхней границами системы E_1 в $\mathcal{R}(X_1^{\mathbb{N}})$.

Пусть Λ_1 и Λ_2 — такие операции предела в множестве X, что $x \in \Lambda_2(\dot{y})$ для точек x и y из X тогда и только тогда, когда $y \in \Lambda_1(\dot{x})$. Эти операции предела могут быть определены отношением секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Среди таких отношений существуют сильнейшее и слабейшее. Сильнейшее отношение секвенциальной квазиравномерности R', определяющее операции предела Λ_1 и Λ_2, строится следующим образом. Пусть P_1 и P_2 — множества таких пар $(\hat{x}, \dot{x})$ и $(\dot{x}, \hat{x})$ соответственно, где $x \in X$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, что соответственно $x \in \Lambda_1(\hat{x})$ и $x \in \Lambda_2(\hat{x})$, а P_3 — множество таких пар $(\hat{y}, \hat{z})$ последовательностей $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ в X, что $(\dot{y}_n, \dot{z}_n) \in P_1 \cap P_2$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3$. Тогда R' есть множество таких пар $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{\xi}', \hat{\eta}') \prec (\hat{\xi}, \hat{\eta})$ существует $(\hat{\xi}'', \hat{\eta}'') \prec (\hat{\xi}', \hat{\eta}')$ из P. Слабейшее отношение секвенциальной квазиравномерности R'', определяющее операции предела Λ_1 и Λ_2, задается при помощи системы окружений

$$\{(X \times X) \setminus (((X \setminus u_x') \times \{x\}) \cup (\{x\} \times (X \setminus u_x''))) :$$
$$x \in X,\ u_x' \in U_x',\ u_x'' \in U_x''\},$$

где U'_x и U''_x — полные системы окрестностей точки x в пространствах (X, Λ_1) и (X, Λ_2) соответственно. Если $\{R_i : i\in I\}$ — множество всех отношений секвенциальной квазиравномерности, определяющих в X операции предела Λ_1 и Λ_2, то R' и R'' являются соответственно точной нижней и точной верхней границами этого множества. Следовательно, $R'=\bigcap\limits_{i\in I} R_i$, а R'' есть множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}')\prec(\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'')\prec(\hat{x}', \hat{y}')$ из $\bigcup\limits_{i\in I} R_i$.

Пусть U' — полная система окружений в $X\times X$, соответствующая сильнейшему отношению секвенциальной квазиравномерности R', определяющему в X операции предела Λ_1 и Λ_2, $\widetilde{U}$ — система всех окрестностей диагонали $\Delta(X)$ в $(X, \Lambda_1)\times(X, \Lambda_2)$, а $\widetilde{R}$ — отношение секвенциальной квазиравномерности, определенное системой окружений $\widetilde{U}$. Из следствия 1.1 вытекает, что $\widetilde{R}$ есть множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}')\prec(\hat{x}, \hat{y})$ существует пара $(\hat{\xi}, \hat{\eta})\prec(\hat{x}', \hat{y}')$ последовательностей $\hat{\xi}=(\xi_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(\eta_n : n\in\mathbb{N})$, для которых либо $\Lambda_1(\hat{\xi})\cap\Lambda_2(\hat{\eta})\neq\varnothing$, либо $\Lambda_1(\dot{\xi}_n)\cap\Lambda_2(\dot{\eta}_n)\neq\varnothing$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому из построения R' следует, что $R'\subset\widetilde{R}$ и, значит, $\widetilde{U}\subset U'$. При этом операции предела, определенные в X отношением $\widetilde{R}$, могут отличаться от Λ_1 и Λ_2.

Пусть Λ_1 и Λ_2 — произвольные операции предела в X, $\widetilde{U}$ — система всех окрестностей диагонали $\Delta(X)$ в $(X, \Lambda_1)\times(X, \Lambda_2)$, $\widetilde{R}$ — отношение секвенциальной квазиравномерности, определенное системой окружений $\widetilde{U}$, а $\widetilde{\Lambda}_1$ и $\widetilde{\Lambda}_2$ — операции предела в X, определенные отношением $\widetilde{R}$ (т. е. системой $\widetilde{U}$). Из приведенного выше описания отношения $\widetilde{R}$ следует, что $\widetilde{U}$ является полной системой окружений, соответствующей $\widetilde{R}$. При этом $\Lambda_1\leqslant\widetilde{\Lambda}_1$ и $\Lambda_2\leqslant\widetilde{\Lambda}_2$. Если $\Lambda_1=\Lambda_2$, то из $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ следует, что $\widetilde{\mathrm{u}}^{-1}\in\widetilde{U}$. Поэтому в указанном случае $\widetilde{\Lambda}_1=\widetilde{\Lambda}_2$ и, кроме того, отношение $\widetilde{R}$ обладает свойством симметричности $\widetilde{R}=\widetilde{R}^{-1}$, означающим, что если $(\hat{x}, \hat{y})\in\widetilde{R}$, то $(\hat{y}, \hat{x})\in\widetilde{R}$.

Всякая операция предела Λ_1 в X может быть определена некоторым отношением секвенциальной квазиравномерности R в том смысле, что для $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ множество $\Lambda_1(\hat{x})$ состоит из тех $x\in X$, для которых $(\hat{x}, \dot{x})\in R$. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать существование такой операции предела Λ_2 в X, что $x\in\Lambda_2(\dot y)$ для точек x и y из X тогда и только тогда, когда $y\in\Lambda_1(\dot x)$. Сильнейшая операция предела Λ_2, обладающая указанным свойством, строится следующим образом: для каждого $y\in X$ в качестве $\Lambda_2(\dot y)$ возьмем множество тех $x\in X$, для которых $y\in\Lambda_1(\dot x)$, а для произвольного $\hat x=(x_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ положим (см. предложение 1.9)

$$\Lambda_2(\hat x)=\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant k}\Lambda_2(\dot x_n).$$

Сильнейшее отношение секвенциальной квазиравномерности R', определяющее операцию предела Λ_1, строится следующим образом. Обозначим через P_1 множество пар $(\hat x,\,\dot x)$, где $x\in X$ и $\hat x\in X^{\mathbb{N}}$, для которых $x\in\Lambda_1(\hat x)$, а через P_2 — множество пар $(\hat y,\,\hat z)$ последовательностей $\hat y=(y_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat z=(z_n : n\in\mathbb{N})$ в X, для которых $(\dot y_n,\,\dot z_n)\in P_1$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Положим $P=P_1\cup P_2$. Тогда R' есть множество таких пар $(\hat\xi,\,\hat\eta)$, что для каждого $(\hat\xi',\,\hat\eta')\prec(\hat\xi,\,\hat\eta)$ существует $(\hat\xi'',\,\hat\eta'')\prec(\hat\xi',\,\hat\eta')$ из P. Ясно, что R' определяет вместе с Λ_1 также построенную выше операцию предела Λ_2, т. е. для каждого $\hat x\in X^{\mathbb{N}}$ множество $\Lambda_2(\hat x)$ состоит из таких $x\in X$, что $(\dot x,\,\hat x)\in R'$. Слабейшее отношение секвенциальной квазиравномерности R'', определяющее Λ_1, задается при помощи системы окружений

$$V''=\{(X\times X)\setminus((X\setminus u'_x)\times\{x\}) : x\in X,\ u'_x\in U'_x\},$$

где U'_x — полная система окрестностей точки x в $(X,\,\Lambda_1)$.

Пусть Λ_1 и Λ_2 — операции предела в X, определенные некоторым отношением секвенциальной квазиравномерности R. Тогда если в одном из пространств $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ стационарная последовательность имеет один предел, то этим свойством обладает также другое пространство. При этом $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ обладают указанным свойством тогда и только тогда, когда $(\dot x,\,\dot y)\notin R$ для любых $x\neq y$ из X. Кроме того, система окружений V тогда и только тогда определяет в X операции предела Λ_1 и Λ_2, по каждой из которых стационарная последовательность имеет один предел, когда пересечение системы V совпадает с $\Delta(X)$. Ясно, что любые две операции предела Λ_1 и Λ_2 в X, по каждой из которых стационарная последовательность имеет один предел, могут быть определены некоторым отношением секвенциальной квазиравномерности или, что то же самое, некоторой системой окружений.

Докажем несколько предложений, относящихся к замыканию и квазизамыканию множества.

Предложение 2.1. *Пусть Λ_1 и Λ_2 — операции предела в множестве X, а v и w — такие окружения в $X{\times}X$, что для любого $x \in X$ множества $\mathrm{v}[x]_1$ и $\mathrm{w}[x]_2$ являются окрестностями точки x в пространствах $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно. Тогда для любого $M \subset X$ множества $\mathrm{v}[M]_1$ и $\mathrm{w}[M]_2$ являются окрестностями множества M в $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно, а для любого $H \subset X{\times}X$ множество $\mathrm{w}{\circ}H{\circ}\mathrm{v}$ является окрестностью множества H в $(X,\,\Lambda_1){\times}(X,\,\Lambda_2)$. Кроме того,*

$$H^+ \subset \mathrm{w}^{-1}{\circ}H{\circ}\mathrm{v}^{-1}, \tag{1}$$

$$(M)_1^+ \subset \mathrm{v}^{-1}[M]_1 = \mathrm{v}[M]_2, \quad (M)_2^+ \subset \mathrm{w}^{-1}[M]_2 = \mathrm{w}[M]_1, \tag{2}$$

где H^+ — квазизамыкание в $(X,\,\Lambda_1){\times}(X,\,\Lambda_2)$, а $(M)_1^+$ и $(M)_2^+$ — квазизамыкания множества M в $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно.

◀ Первое утверждение следует из равенств

$$\mathrm{v}[M]_1 = \bigcup_{x\in M} \mathrm{v}[x]_1, \quad \mathrm{w}[M]_2 = \bigcup_{x\in M} \mathrm{w}[x]_2,$$

$$\mathrm{w}{\circ}H{\circ}\mathrm{v} = \bigcup_{(x,\,y)\in H} \mathrm{w}{\circ}\{(x,\,y)\}{\circ}\mathrm{v} = \bigcup_{(x,\,y)\in H} \mathrm{v}[x]_1{\times}\mathrm{w}[y]_2.$$

Докажем (1) и (2). Пусть $(x,\,y) \in H^+$. Из условий предложения следует, что декартово произведение $\mathrm{v}' = \mathrm{v}[x]_1{\times}\mathrm{w}[y]_2$ является окрестностью точки $(x,\,y)$ в $(X,\,\Lambda_1){\times}(X,\,\Lambda_2)$. Поэтому в силу теоремы 1.10 $\mathrm{v}'{\cap}H \neq \varnothing$. Рассмотрим некоторую точку $(x',\,y') \in \mathrm{v}'{\cap}H$. Так как $x' \in \mathrm{v}[x]_1$ и $y' \in \mathrm{w}[y]_2$, то $(x',\,x) \in \mathrm{v}$, $(y,\,y') \in \mathrm{w}$ и, значит, $(x,\,x') \in \mathrm{v}^{-1}$, $(y',\,y) \in \mathrm{w}^{-1}$. Отсюда с учетом $(x',\,y') \in H$ следует, что $(x,\,y) \in \mathrm{w}^{-1}{\circ}H{\circ}\mathrm{v}^{-1}$, т. е. имеет место (1). В частности, для множества $H = M{\times}M$ имеем

$$(M)_1^+{\times}(M)_2^+ = (M{\times}M)^+ \subset \mathrm{w}^{-1}{\circ}(M{\times}M){\circ}\mathrm{v}^{-1} =$$

$$= \mathrm{v}^{-1}[M]_1{\times}\mathrm{w}^{-1}[M]_2 = \mathrm{v}[M]_2{\times}\mathrm{w}[M]_1.$$

Отсюда получаются включения (2). ▶

Предложение 2.2. *Пусть Λ_1 и Λ_2 — операции предела в множестве X, а V и W — такие системы окружений в $X{\times}X$, что для любого $x \in X$ системы $V_x = \{\mathrm{v}[x]_1 : \mathrm{v} \in V\}$ и $W_x = \{\mathrm{w}[x]_2 : \mathrm{w} \in W\}$ подмножеств в X образуют фундаментальные системы окрестностей точки x в пространствах $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно. Тогда для всяких подмно-*

жеств M, G и E множества X имеют место равенства

$$(M\times G)^+ = \bigcap_{\mathrm{w}\in W}\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{w}^{-1}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}^{-1}, \qquad (3)$$

$$(E)_1^+ = \bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}[E]_2, \quad (E)_2^+ = \bigcap_{\mathrm{w}\in W}\mathrm{w}[E]_1. \qquad (4)$$

Кроме того, в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ для произвольного множества H равенство

$$H^+ = \bigcap_{\mathrm{w}\in W}\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}, \qquad (5)$$

имеет место тогда и только тогда, когда для каждой точки $(x,\,y)$ из $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ и каждой ее окрестности $\mathrm{u}_{(x,\,y)}$ существуют такие $v_x\in V_x$ и $w_y\in W_y$, что $v_x\times w_y\subset\mathrm{u}_{(x,\,y)}$.

◀ В силу включения (1), если $(x,\,y)\in(M\times G)^+$, то $(x,\,y)\in\in\mathrm{w}^{-1}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}^{-1}$ для любых $\mathrm{v}\in V$ и $\mathrm{w}\in W$. Если же $(x,\,y)\notin\notin(M\times G)^+$, то либо $x\notin(M)_1^+$, либо $y\notin(G)_2^+$. В случае $x\notin(M)_1^+$ найдется в (X,Λ_1) такая окрестность u_x точки x, что $u_x\cap M=\varnothing$. Выберем $\mathrm{v}\in V$ так, чтобы $\mathrm{v}[x]_1\subset u_x$. Тогда $(x',\,y')\notin M\times G$ для любых $x'\in\mathrm{v}[x]_1$ и $y'\in X$. Поэтому $(x,\,y)\notin\mathrm{w}^{-1}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}^{-1}$ для любого $\mathrm{w}\in W$. Аналогично доказывается, что в случае $y\notin(G)_2^+$ существует такое $\mathrm{w}\in W$, что $(x,\,y)\notin\mathrm{w}^{-1}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}^{-1}$ для любого $\mathrm{v}\in V$. Следовательно, имеет место (3). При $M=G=E$ из (3) имеем

$$(E)_1^+\times(E)_2^+ = (E\times E)^+ = \bigcap_{\mathrm{w}\in W}\bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{w}^{-1}\circ(E\times E)\circ\mathrm{v}^{-1} =$$

$$= \bigcap_{\mathrm{w}\in W}\bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}[E]_2\times\mathrm{w}[E]_1 = \Big(\bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}[E]_2\Big)\times\Big(\bigcap_{\mathrm{w}\in W}\mathrm{w}[E]_1\Big).$$

Отсюда получается (4).

Пусть имеет место (5). Рассмотрим произвольную точку $(x,\,y)$ пространства $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ и произвольную ее окрестность $\mathrm{u}_{(x,\,y)}$. Обозначим $H=(X\times X)\setminus\mathrm{u}_{(x,\,y)}$. Имеем, что $(x,\,y)\notin\notin H^+$. Поэтому из (5) следует, что $(x,\,y)\notin\mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$ для некоторых $\mathrm{v}\in V$ и $\mathrm{w}\in W$. Но тогда $(\mathrm{v}[x]_1\times\mathrm{w}[y]_2)\cap H=\varnothing$. Отсюда получаем, что $\mathrm{v}[x]_1\times\mathrm{w}[y]_2\subset(X\times X)\setminus H=\mathrm{u}_{(x,\,y)}$, т. е. окрестности $v_x=\mathrm{v}[x]_1\in V_x$ и $w_y=\mathrm{w}[y]_2\in W_y$ точек x и y удовлетворяют включению $v_x\times w_y\subset\mathrm{u}_{(x,\,y)}$.

Обратно, если $(x,\,y)\in H^+$, то в силу включения (1) $(x,\,y)\in\in\mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$ для любых $\mathrm{v}\in V$ и $\mathrm{w}\in W$. Если же $(x,\,y)\notin H^+$, то в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ найдется такая окрестность $\mathrm{u}_{(x,\,y)}$ точки $(x,\,y)$, что $\mathrm{u}_{(x,\,y)}\cap H=\varnothing$. Однако, по условию, существуют такие $v_x\in V_x$ и $w_y\in W_y$, что $v_x\times w_y\subset \mathrm{u}_{(x,\,y)}$. Выберем $\mathrm{v}\in V$ и $\mathrm{w}\in W$ так, чтобы $\mathrm{v}[x]_1=v_x$ и $\mathrm{w}[y]_2=w_y$. Тогда $H\cap(\mathrm{v}[x]_1\times\mathrm{w}[y]_2)=\varnothing$. Следовательно, $(x,\,y)\notin \mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$. Значит, имеет место (5). ▶

Предложение 2.3. *Пусть операции предела Λ_1 и Λ_2 в множестве X определены системой окружений V в $X\times X$, а для любого $x\in X$ системы $V'_x=\{\mathrm{v}[x]_1:\mathrm{v}\in V\}$ и $V''_x=\{\mathrm{v}[x]_2:\mathrm{v}\in V\}$ подмножеств в X образуют фундаментальные системы окрестностей точки x в пространствах $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно. Тогда для всяких подмножеств M, G и E множества X* имеют место равенства

$$(M\times G)^+=\bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}^{-1}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}^{-1},$$

$$(E)_1^+=\bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}[E]_2,\quad (E)_2^+=\bigcap_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}[E]_1.$$

Если при этом V является предбазой фильтра в $X\times X$, то в пространстве $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ для произвольного множества H равенство $H^+=\bigcap\limits_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$ имеет место тогда и только тогда, когда для каждой точки $(x,\,y)$ и каждой ее окрестности $\mathrm{u}_{(x,\,y)}$ существуют такие $v'_x\in V'_x$ и $v''_y\in V''_y$, что $v'_x\times v''_y\subset\mathrm{u}_{(x,\,y)}$. ▶

Предложение 2.4. *Пусть Λ_1 и Λ_2 — операции предела в множестве X, а v и w — такие подмножества в $X\times X$, что для любого $x\in X$ множества $\mathrm{v}[x]_1$ и $\mathrm{w}[x]_2$ открыты в пространствах $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно. Тогда для любых $M\subset X$ и $H\subset X\times X$ множества $\mathrm{v}[M]_1$, $\mathrm{w}[M]_2$ и $\mathrm{w}\circ H\circ\mathrm{v}$ открыты в $(X,\,\Lambda_1)$, $(X,\,\Lambda_2)$ и $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ соответственно, причем*

$$\mathrm{w}^{-1}\circ\overline{H}\circ\mathrm{v}^{-1}=\mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}. \tag{6}$$

Если же для каждого $x\in X$ множества $\mathrm{v}[x]_1$ и $\mathrm{w}[x]_2$ являются открытыми окрестностями точки x в $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно, то $\mathrm{v}[M]_1$ и $\mathrm{w}[M]_2$ являются открытыми окрестностями множества M в этих пространствах соответственно, а $\mathrm{w}\circ H\circ\mathrm{v}$ является открытой окрестностью множества H в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$. Кроме того, $\overline{H}\subset\mathrm{w}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$, $\overline{(M)}_1\subset\mathrm{v}^{-1}[M]_1=\mathrm{v}[M]_2$ и *$\overline{(M)}_2\subset\mathrm{w}^{-1}[M]_2=\mathrm{w}[M]_1$, где $\overline{(M)}_1$ и*

$\overline{(M)}_2$ — *замыкания множества* M *в* (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *соответственно.*

◀ Докажем (6), а остальные утверждения доказываются по аналогии с предложением 2.1. Пусть $(x, y) \in \mathrm{w}^{-1} \circ \overline{H} \circ \mathrm{v}^{-1}$. Тогда существует такое $(x', y') \in \overline{H}$, что $(x', x) \in \mathrm{v}$ и $(y, y') \in \mathrm{w}$. Имеем $x' \in \mathrm{v}[x]_1$ и $y' \in \mathrm{w}[y]_2$. Поскольку множества $\mathrm{v}[x]_1$ и $\mathrm{w}[y]_2$ открыты в (X, Λ_1) и (X, Λ_2) соответственно, декартово произведение $\mathrm{u} = \mathrm{v}[x]_1 \times \mathrm{w}[y]_2$ является открытой окрестностью точки (x', y') в $(X, \Lambda_1) \times (X, \Lambda_2)$. Поэтому в силу $(x', y') \in \overline{H}$ существует точка $(x'', y'') \in \mathrm{u} \cap H$. Отсюда следует, что $(x'', x) \in \mathrm{v}$, $(y, y'') \in \mathrm{w}$ и $(x'', y'') \in H$. Значит, $(x, y) \in \mathrm{w}^{-1} \circ H \circ \mathrm{v}^{-1}$, т. е. $\mathrm{w}^{-1} \circ \overline{H} \circ \mathrm{v}^{-1} \subset \subset \mathrm{w}^{-1} \circ H \circ \mathrm{v}^{-1}$. Учитывая также очевидное обратное включение, получим (6). ▶

По аналогии с предложениями 2.2 и 2.3 доказываются следующие два предложения.

Предложение 2.5. *Пусть* Λ_1 *и* Λ_2 — *операции предела в множестве* X, *а* V *и* W — *такие системы окружений в* $X \times X$, *что для любого* $x \in X$ *системы* $V_x = \{\mathrm{v}[x]_1 : \mathrm{v} \in V\}$ *и* $W_x = \{\mathrm{w}[x]_2 : \mathrm{w} \in W\}$ *подмножеств в* X *образуют фундаментальные системы открытых окрестностей точки* x *в пространствах* (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *соответственно. Тогда для всяких подмножеств* M, G *и* E *множества* X имеют место равенства

$$\overline{M \times G} = \bigcap_{\mathrm{w} \in W} \bigcap_{\mathrm{v} \in V} \mathrm{w}^{-1} \circ (M \times G) \circ \mathrm{v}^{-1},$$

$$\overline{(E)}_1 = \bigcap_{\mathrm{v} \in V} \mathrm{v}[E]_2, \quad \overline{(E)}_2 = \bigcap_{\mathrm{w} \in W} \mathrm{w}[E]_1.$$

Кроме того, в $(X, \Lambda_1) \times (X, \Lambda_2)$ *для произвольного множества* H *равенство* $\overline{H} = \bigcap_{\mathrm{w} \in W} \bigcap_{\mathrm{v} \in V} \mathrm{w}^{-1} \circ H \circ \mathrm{v}^{-1}$ *имеет место тогда и только тогда, когда произведение* $\tau_1 \times \tau_2$ *секвенциальных топологий* τ_1 *и* τ_2 *пространств* (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *является секвенциальной топологией пространства* $(X, \Lambda_1) \times (X, \Lambda_2)$. ▶

Предложение 2.6. *Пусть операции предела* Λ_1 *и* Λ_2 *в множестве* X *и система окружений* V *в* $X \times X$ *такие, что для любого* $x \in X$ *системы* $V'_x = \{\mathrm{v}[x]_1 : \mathrm{v} \in V\}$ *и* $V''_x = \{\mathrm{v}[x]_2 : \mathrm{v} \in V\}$ *подмножеств в* X *образуют фундаментальные системы открытых окрестностей точки* x *в пространствах* (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *соответственно. Тогда для всяких подмножеств* M, G *и* E *множества* X имеют место равенства

$$\overline{M\times G} = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ(M\times G)\circ\mathrm{v}^{-1},$$

$$\overline{(E)}_1 = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[E]_2, \quad \overline{(E)}_2 = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[E]_1.$$

Если при этом V является базой фильтра в $X\times X$, то в пространстве $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ для произвольного множества H равенство $\overline{H} = \bigcap\limits_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$ имеет место тогда и только тогда, когда произведение $\tau_1\times\tau_2$ секвенциальных топологий τ_1 и τ_2 пространств $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ является секвенциальной топологией пространства $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$. ►

Предложение 2.7. *Пусть операции предела Λ_1 и Λ_2 в множестве X и полная система окружений U в $X\times X$ соответствуют некоторому отношению секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Если в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ имеет место равенство*

$$\bigcap_{\mathrm{u}\in U} \mathrm{u}^{+} = \Delta(X), \tag{7}$$

то пространства $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ отделимы. Кроме того, выполнение первого (второго) из равенств

$$\bigcap_{\mathrm{u}\in U} \mathrm{u}\circ\mathrm{u}^{-1} = \Delta(X), \qquad \bigcap_{\mathrm{u}\in U} \mathrm{u}^{-1}\circ\mathrm{u} = \Delta(X) \tag{8}$$

необходимо и достаточно для отделимости пространства $(X,\,\Lambda_1)$ (соответственно $(X,\,\Lambda_2)$), причем для отделимости обоих пространств $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\bigcap_{\mathrm{u}\in U} ((\mathrm{u}\circ\mathrm{u}^{-1})\cup(\mathrm{u}^{-1}\circ\mathrm{u})) = \Delta(X). \tag{9}$$

◄ Для произвольного $x\in X$ система $U'_x = \{\mathrm{u}[x]_1 : \mathrm{u}\in U\}$ подмножеств в X является полной системой окрестностей точки x в $(X,\,\Lambda_1)$. Очевидно, для квазизамыкания $(\mathrm{u}[x]_1)^{+}_1$ подмножества $\mathrm{u}[x]_1$ пространства $(X,\,\Lambda_1)$ имеет место $(\mathrm{u}[x]_1)^{+}_1\times\{x\}\subset \subset(\mathrm{u}[x]_1\times\{x\})^{+}\subset\mathrm{u}^{+}$. Поэтому $(\mathrm{u}[x]_1)^{+}_1\subset\mathrm{u}^{+}[x]_1$. Отсюда с учетом (7) получаем $\bigcap\limits_{\mathrm{u}\in U} (\mathrm{u}[x]_1)^{+}_1 \subset \bigcap\limits_{\mathrm{u}\in U} \mathrm{u}^{+}[x]_1 = \{x\}$. Таким образом, в $(X,\,\Lambda_1)$ пересечение квазизамыканий всех окрестностей точки содержит лишь эту точку. Но тогда в силу предложения 1.25 пространство $(X,\,\Lambda_1)$ отделимо. Аналогично доказывается отделимость $(X,\, \Lambda_2)$ при условии (7). В силу предложения 2.3

$$\bigcap_{\mathrm{u}\in U} (\mathrm{u}[x]_1)^+_1 = \bigcap_{\mathrm{u}\in U}\bigcap_{\mathrm{v}\in U} \mathrm{v}^{-1}[\mathrm{u}[x]_1]_1 = \bigcap_{\mathrm{u}\in U}\bigcap_{\mathrm{v}\in U} (\mathrm{u}\circ\mathrm{v}^{-1})[x]_1.$$

Поскольку U является фильтром в $X\times X$, пересечение $\mathrm{w}=\mathrm{u}\cap\mathrm{v}$ произвольных $\mathrm{u}\in U$ и $\mathrm{v}\in U$ принадлежит U, причем, очевидно, $\mathrm{w}\circ\mathrm{w}^{-1}\subset\mathrm{u}\circ\mathrm{v}^{-1}$. Поэтому $\bigcap_{\mathrm{u}\in U} (\mathrm{u}[x]_1)^+_1 = \bigcap_{\mathrm{u}\in U} (\mathrm{u}\circ\mathrm{u}^{-1})[x]_1$. С учетом предложения 1.25 из полученного равенства следует, что первое из равенств (8) эквивалентно отделимости $(X,\, \Lambda_1)$. Аналогично доказывается эквивалентность второго из равенств (8) отделимости $(X,\, \Lambda_2)$.

Очевидно, что если выполняются оба равенства (8), то для любых $x\neq y$ из X существуют такие $\mathrm{v}\in U$ и $\mathrm{w}\in U$, что $(x,\, y)\notin \notin \mathrm{v}\circ\mathrm{v}^{-1}$ и $(x,\, y)\notin \mathrm{w}^{-1}\circ\mathrm{w}$. Поэтому $(x,\, y)\notin(\mathrm{u}\circ\mathrm{u}^{-1})\cup(\mathrm{u}^{-1}\circ\mathrm{u})$, где $\mathrm{u}=\mathrm{v}\cap\mathrm{w}$. А это означает, что выполняется (9). Очевидно также то, что (9) влечет оба равенства (8). Следовательно, (9) является необходимым и достаточным условием для отделимости обоих пространств $(X,\, \Lambda_1)$ и $(X,\, \Lambda_2)$. ►

В связи с первым утверждением предложения 2.7 заметим, что в силу предложения 2.1 $\mathrm{u}^+\subset\mathrm{u}^{-1}\circ\mathrm{u}\circ\mathrm{u}^{-1}$ для любого $\mathrm{u}\in U$. Поэтому равенство $\bigcap_{\mathrm{u}\in U} \mathrm{u}^{-1}\circ\mathrm{u}\circ\mathrm{u}^{-1}=\Delta(X)$ влечет (7), а следовательно, и отделимость обоих пространств $(X,\, \Lambda_1)$ и $(X,\, \Lambda_2)$.

Предложение 2.8. *Пусть операции предела Λ_1 и Λ_2 в множестве X и система окружений V в $X\times X$ такие, что для любого $x\in X$ системы $V'_x=\{\mathrm{v}[x]_1 : \mathrm{v}\in V\}$ и $V''_x=\{\mathrm{v}[x]_2 : \mathrm{v}\in V\}$ подмножеств в X образуют фундаментальные системы открытых окрестностей точки x в пространствах $(X,\, \Lambda_1)$ и $(X,\, \Lambda_2)$ соответственно. Если в $(X,\, \Lambda_1)\times(X,\, \Lambda_2)$ имеет место равенство*

$$\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \overline{\mathrm{v}} = \Delta(X), \tag{10}$$

то пространства $(X,\, \Lambda_1)$ и $(X,\, \Lambda_2)$ хаусдорфовы. Если же при этом V является базой фильтра в $X\times X$, то выполнение первого (второго) из равенств

$$\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}\circ\mathrm{v}^{-1} = \Delta(X), \qquad \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ\mathrm{v} = \Delta(X)$$

необходимо и достаточно для хаусдорфовости пространства $(X,\, \Lambda_1)$ (соответственно $(X,\, \Lambda_2)$), причем для хаусдорфовости *обоих пространств* (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\bigcap_{\mathrm{v}\in V}((\mathrm{v}\circ\mathrm{v}^{-1})\cup(\mathrm{v}^{-1}\circ\mathrm{v})) = \Delta(X). \blacktriangleright$$

В связи с первым утверждением этого предложения заметим, что в силу предложения 2.4 для любого $\mathrm{v}\in V$ имеет место $\overline{\mathrm{v}}\subset \mathrm{v}^{-1}\circ\mathrm{v}\circ\mathrm{v}^{-1}$. Поэтому равенство $\bigcap\limits_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ\mathrm{v}\circ\mathrm{v}^{-1} = \Delta(X)$ влечет (10), а следовательно, и хаусдорфовость обоих пространств (X, Λ_1) и (X, Λ_2).

Предложение 2.9. *Пусть операции предела* Λ_1 *и* Λ_2 *в множестве* X *и полная система окружений* U *в* $X\times X$ *соответствуют некоторому отношению секвенциальной квазиравномерности в* $X^{\mathbb{N}}$, *а* $V\subset U$ *— такая подсистема, что каждое* $\mathrm{v}\in V$ *содержит* $\mathrm{u}\in V$, *для которого* $\mathrm{u}^2\subset\mathrm{v}$. *Тогда*

а) отношение секвенциальной квазиравномерности, определенное системой окружений V, *транзитивно;*

б) для любого $H\subset X\times X$ *множество*

$$E = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$$

замкнуто в $(X, \Lambda_1)\times(X, \Lambda_2)$, *причем* $\overline{H}\subset E$*;*

в) для любого $M\subset X$ *множества*

$$G_1 = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_2, \quad G_2 = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_1$$

замкнуты в (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *соответственно, причем* $\overline{(M)}_1\subset G_1$ *и* $\overline{(M)}_2\subset G_2$*;*

г) в $(X, \Lambda_1)\times(X, \Lambda_2)$ *внутренность* v° *каждого* $\mathrm{v}\in V$ *содержит окружение из* V *и, значит, является открытой окрестностью диагонали* $\Delta(X)$*;*

д) если V' *— фильтр в* $X\times X$, *имеющий предбазу* V, *то для каждого* $\mathrm{v}\in V'$ *существует* $\mathrm{u}\in V'$, *которое открыто в* $(X, \Lambda_1)\times(X, \Lambda_2)$ *и* $\mathrm{u}^2\subset\mathrm{v}$, *причем если* $V'=U$, *то* (X, Λ_1) *и* (X, Λ_2) *являются пространствами Фреше–Урысона.*

◀ Утверждение а) очевидно.

(б) Для $\mathrm{v}\in V$ выберем $\mathrm{u}\in V$ так, чтобы $\mathrm{u}^2\subset\mathrm{v}$. Очевидно, $E\subset\mathrm{u}^{-1}\circ H\circ\mathrm{u}^{-1}$, а в силу предложения 2.1 $E^+\subset\mathrm{u}^{-1}\circ E\circ\mathrm{u}^{-1}$. Поэтому $E^+\subset\mathrm{u}^{-2}\circ H\circ\mathrm{u}^{-2}\subset\mathrm{v}^{-1}\circ H\circ\mathrm{v}^{-1}$. Отсюда следует, что

$$E^{+} \subset \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ H\circ \mathrm{v}^{-1} = E.$$

Но тогда в силу $E\subset E^{+}$ имеем $E=E^{+}$. А это означает, что E замкнуто в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$. Из $H\subset E$ получаем $\overline{H}\subset\overline{E}=E$.

(в) Имеют место равенства

$$\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}^{-1}\circ(M\times M)\circ \mathrm{v}^{-1} = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_2\times \mathrm{v}[M]_1 =$$

$$= (\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_2)\times(\bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_1) = G_1\times G_2.$$

Отсюда в силу б) получаем $G_1\times G_2=\overline{G_1\times G_2}=\overline{(G_1)}_1\times\overline{(G_2)}_2$. Поэтому $G_1=\overline{(G_1)}_1$ и $G_2=\overline{(G_2)}_2$. Значит, G_1 и G_2 замкнуты в пространствах $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ соответственно. Из очевидного включения $M\times M\subset G_1\times G_2$ вытекает, что $\overline{(M)}_1\subset\overline{(G_1)}_1=G_1$ и $\overline{(M)}_2\subset\overline{(G_2)}_2=G_2$.

(г) Для $\mathrm{v}\in V$ выберем $\mathrm{u}\in V$ так, чтобы $\mathrm{u}^3\subset \mathrm{v}$. Обозначим $H=(X\times X)\setminus \mathrm{v}$. В силу б) $\overline{H}\subset \mathrm{u}^{-1}\circ H\circ \mathrm{u}^{-1}$. Очевидно, $\mathrm{v}\cap H=\varnothing$. Докажем, что $\mathrm{u}\cap(\mathrm{u}^{-1}\circ H\circ \mathrm{u}^{-1})=\varnothing$. Предположим противное. Тогда найдется такое $(x,\,y)\in \mathrm{u}$, что $(x,\,y)\in \mathrm{u}^{-1}\circ H\circ \mathrm{u}^{-1}$. Отсюда следует существование таких $\xi\in X$ и $\eta\in X$, что $(\xi,\,x)\in \mathrm{u}$, $(\xi,\,\eta)\in H$ и $(\eta,\,y)\in \mathrm{u}$. Однако из $(\xi,\,x)\in \mathrm{u}$, $(x,\,y)\in \mathrm{u}$ и $(\eta,\,y)\in \mathrm{u}$ имеем $(\xi,\,\eta)\in \mathrm{u}^3\subset \mathrm{v}$. Тем самым $(\xi,\,\eta)\in \mathrm{v}$ и $(\xi,\,\eta)\in H$. Это противоречит равенству $\mathrm{v}\cap H=\varnothing$. Поэтому $\mathrm{u}\cap(\mathrm{u}^{-1}\circ H\circ \mathrm{u}^{-1})=\varnothing$. Отсюда получаем, что $\mathrm{u}\cap\overline{H}=\varnothing$ и, значит, $\mathrm{u}\subset(X\times X)\setminus\overline{H}=\mathrm{v}^{\circ}$, где v° — внутренность окружения v в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$.

(д) Каждое $\mathrm{v}\in V'$ содержит пересечение конечного числа окружений из V. Пусть для некоторого $n\in\mathbb{N}$ имеет место включение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{v}_i\subset \mathrm{v}$, где $\mathrm{v}_i\in V$. В силу г) для каждого v_i существует $\mathrm{u}_i\in V'$, которое открыто в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$ и $\mathrm{u}_i^2\subset \mathrm{v}_i$. Поэтому множество $\mathrm{u}=\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{u}_i$ открыто в $(X,\,\Lambda_1)\times(X,\,\Lambda_2)$, причем $\mathrm{u}\in V'$ и $\mathrm{u}^2\subset \mathrm{v}$. Если $V'=U$, то в каждом из пространств $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ каждая окрестность точки содержит открытую окрестность этой точки. Поэтому в силу теоремы 1.32 $(X,\,\Lambda_1)$ и $(X,\,\Lambda_2)$ являются пространствами Фреше–Урысона. ►

Предложение 2.10. *Пусть V — конечная или счетная система окружений в $X\times X$, а $((x_{ni}, y_{ni}):(n, i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N})$ — такое семейство точек в $X\times X$, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ последовательность $((x_{ni}, y_{ni}):i\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в каждом окружении из V. Тогда существует такая последовательность $(j_n:n\in\mathbb{N})\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что для любой последовательности натуральных $i_n\geqslant j_n$, $n\in\mathbb{N}$, последовательность $((x_{ni_n}, y_{ni_n}):n\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в каждом окружении из V.*

◀ Пусть $V=\{\mathrm{v}_n:n\in\mathbb{N}\}$. Рассмотрим систему окружений $V'=\{\mathrm{v}'_n:n\in\mathbb{N}\}$, где $\mathrm{v}'_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\mathrm{v}_i$. Очевидно, последовательность точек из $X\times X$ почти вся лежит в каждом v_n тогда и только тогда, когда она почти вся лежит в каждом v'_n. Учитывая это, а также включения $\mathrm{v}'_{n+1}\subset\mathrm{v}'_n$, $n\in\mathbb{N}$, легко получим существование требуемой последовательности $(j_n:n\in\mathbb{N})\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. ▶

§ 2. Отношение секвенциальной равномерности

Определение 2.1. *Если отношение секвенциальной квазиравномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ является отношением эквивалентности, т. е. дополнительно обладает свойствами симметричности $R^{-1}=R$ и транзитивности $R\circ R=R$, то оно называется отношением секвенциальной равномерности, а соответствующая структура секвенциальной квазиравномерности S на X называется структурой секвенциальной равномерности. При этом пара (X, R) называется пространством с отношением секвенциальной равномерности (короче — пространством с секвенциальной равномерностью).*

Из теорем 2.2—2.5 получаем следующие утверждения.

Теорема 2.6. *Подмножество $S\subset(X\times X)^{\mathbb{N}}$ является структурой секвенциальной равномерности на X тогда и только тогда, когда*

1) $\dot{\zeta}\in S$ для каждого $\zeta\in\Delta(X)$;

2) если $\hat{\zeta}\in S$ и $\hat{\zeta}'\prec\hat{\zeta}$, то $\hat{\zeta}'\in S$;

3) если $\hat{\zeta}\in(X\times X)^{\mathbb{N}}\setminus S$, то существует такое $\hat{\zeta}'\prec\hat{\zeta}$, что $S\cap[\hat{\zeta}']^{\mathbb{N}}=\varnothing$;

4) если $((x_n, y_n):n\in\mathbb{N})\in S$, то $((y_n, x_n):n\in\mathbb{N})\in S$;

5) если $((x_n, y_n):n\in\mathbb{N})\in S$ и $((y_n, z_n):n\in\mathbb{N})\in S$, то $((x_n, z_n):n\in\mathbb{N})\in S$.

Полная система окружений U в $X\times X$, соответствующая структуре секвенциальной равномерности S, есть множество таких $\mathrm{u}\subset X\times X$, *что* $S\cap((X\times X)\setminus\mathrm{u})^{\mathbb{N}}=\varnothing$. ▶

Теорема 2.7. *Подмножество $S\subset(X\times X)^{\mathbb{N}}$ является структурой секвенциальной равномерности на X тогда и только тогда, когда*

1) $\dot{\zeta}\in S$ для каждого $\zeta\in\Delta(X)$;

2) если $\hat{\zeta}\in S$ и $\hat{\zeta}'\prec\hat{\zeta}$, то $\hat{\zeta}'\in S$;

3) если $\hat{\zeta}\in(X\times X)^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat{\zeta}'\prec\hat{\zeta}$ существует $\hat{\zeta}''\prec\hat{\zeta}'$ из S, то $\hat{\zeta}\in S$;

4) если $\hat{\zeta}=(\zeta_n:n\in\mathbb{N})\in(X\times X)^{\mathbb{N}}$ такое, что $\dot{\zeta}_n\in S$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то $\hat{\zeta}\in S$;

5) если $((x_n,\, y_n):n\in\mathbb{N})\in S$, то $((y_n,\, x_n):n\in\mathbb{N})\in S$;

6) если $((x_n,\, y_n):n\in\mathbb{N})\in S$ и $((y_n,\, z_n):n\in\mathbb{N})\in S$, то $((x_n,\, z_n):n\in\mathbb{N})\in S$. ▶

Теорема 2.8. *Подмножество $R\subset X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$ определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности тогда и только тогда, когда*

1) $(\dot{x},\, \dot{x})\in R$ для каждого $x\in X$;

2) если $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$ и $(\hat{x}',\, \hat{y}')\prec(\hat{x},\, \hat{y})$, то $(\hat{x}',\, \hat{y}')\in R$;

3) если $(\hat{x},\, \hat{y})\in(X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}})\setminus R$, то существует такое $(\hat{x}',\, \hat{y}')\prec(\hat{x},\, \hat{y})$, что $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\notin R$ для любого $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению $[(\hat{\xi},\, \hat{\eta})]\subset[(\hat{x}',\, \hat{y}')]$;

4) если $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$, то $(\hat{y},\, \hat{x})\in R$;

5) если $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$ и $(\hat{y},\, \hat{z})\in R$, то $(\hat{x},\, \hat{z})\in R$.

Полная система окружений U в $X\times X$, соответствующая отношению секвенциальной равномерности R, есть множество таких $\mathrm{u}\subset X\times X$, *что $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\notin R$ для любого $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению* $[(\hat{\xi},\, \hat{\eta})]\subset(X\times X)\setminus\mathrm{u}$. ▶

Теорема 2.9. *Подмножество $R\subset X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$ определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности тогда и только тогда, когда*

1) $(\dot{x},\, \dot{x})\in R$ для каждого $x\in X$;

2) если $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$ и $(\hat{x}',\, \hat{y}')\prec(\hat{x},\, \hat{y})$, то $(\hat{x}',\, \hat{y}')\in R$;

3) если $(\hat{x},\, \hat{y})\in(X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}})$ такое, что для каждого $(\hat{x}',\, \hat{y}')\prec\prec(\hat{x},\, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'',\, \hat{y}'')\prec(\hat{x}',\, \hat{y}')$ из R, то $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$;

4) если пара $(\hat{x},\, \hat{y})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$ последовательностей $\hat{x}==(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ такая, что $(\dot{x}_n,\, \dot{y}_n)\in R$ для всех

$n\in\mathbb{N}$, *то* $(\hat{x},\,\hat{y})\in R$;

5) если $(\hat{x},\,\hat{y})\in R$, *то* $(\hat{y},\,\hat{x})\in R$;

6) если $(\hat{x},\,\hat{y})\in R$ *и* $(\hat{y},\,\hat{z})\in R$, *то* $(\hat{x},\,\hat{z})\in R$. ▶

С учетом теоремы 2.1 легко доказывается также

Теорема 2.10. *Система* V *подмножеств в* $X\times X$ *тогда и только тогда является системой окружений, определяющей отношение секвенциальной равномерности в* $X^{\mathbb{N}}$, *когда*

1) каждое $\mathrm{v}\in V$ *содержит* $\Delta(X)$;

2) если последовательность $((x_n,\,y_n):n\in\mathbb{N})$ *из* $(X\times X)^{\mathbb{N}}$ *почти вся лежит в каждом* $\mathrm{v}\in V$, *то такова и последовательность* $((y_n,\,x_n):n\in\mathbb{N})$;

3) если каждая из последовательностей $((x_n,\,y_n):n\in\mathbb{N})$ *и* $((y_n,\,z_n):n\in\mathbb{N})$ *из* $(X\times X)^{\mathbb{N}}$ *почти вся лежит в каждом* $\mathrm{v}\in V$, *то такова и последовательность* $((x_n,\,z_n):\,n\in\mathbb{N})$. ▶

Если система окружений V в $X\times X$ определяет отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$, то пересечение H системы V совпадает с пересечением полной системы окружений, соответствующей отношению R, и удовлетворяет равенствам $H^{-1}=H$ и $H^2=H$.

Если U — полная система окружений в $X\times X$, соответствующая некоторому отношению секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, и $\mathrm{u}\in U$, то $\mathrm{u}^{-1}\in U$. Отсюда следует, что каждое $\mathrm{u}\in U$ содержит симметричное окружение из U, так как U является фильтром в $X\times X$.

Пусть R — отношение секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, а отображение $\Lambda: X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ сопоставляет каждому $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ множество $\Lambda(\hat{x})$ таких $x\in X$, что $(\hat{x},\,\dot{x})\in R$. Тогда, как было отмечено в § 1, Λ является операцией предела в X. В силу симметричности R $\Lambda(\hat{x})$ есть также множество таких $x\in X$, что $(\dot{x},\,\hat{x})\in R$. Поэтому отношение секвенциальной равномерности, в отличие от отношения секвенциальной квазиравномерности, определяет лишь одну операцию предела.

Пусть V — система окружений в $X\times X$, определяющая отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ и операцию предела Λ в X. Для каждого $x\in X$ рассмотрим системы $V_x'=$ $=\{\mathrm{v}[x]_1:\mathrm{v}\in V\}$, $V_x''=\{\mathrm{v}[x]_2:\mathrm{v}\in V\}$ и $V_x=\{\mathrm{v}[x]:\mathrm{v}\in V\}$ подмножеств в X, где $\mathrm{v}[x]=\mathrm{v}[x]_1\cap\mathrm{v}[x]_2$, и каждую из них примем в качестве системы окрестностей точки x. Тогда, очевидно, каждое из семейств $(V_x':x\in X)$, $(V_x'':x\in X)$ и $(V_x:x\in X)$ систем окрестностей определяет в X операцию предела Λ. При этом если U — полная система окружений, соответствующая отношению секвенциальной равномерности R, то для полной системы U_x окрестностей точки x пространства (X, Λ) справедливы равенства $U_x = \{\mathrm{u}[x]_1 : \mathrm{u} \in U\} = \{\mathrm{u}[x]_2 : \mathrm{u} \in U\} = \{\mathrm{u}[x] : \mathrm{u} \in U\}$.

Предложение 2.11. *Пусть операция предела Λ в X и отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определены системой окружений V в $X \times X$. Тогда следующие условия попарно эквивалентны:*

1) Λ — операция однозначного предела;

2) в пространстве (X, Λ) стационарная последовательность имеет один предел;

3) $(\dot{x}, \dot{y}) \notin R$ для любых $x \neq y$ из X;

4) пересечение системы V совпадает с $\Delta(X)$.

◀ Пусть $\hat{x}$ — сходящаяся последовательность в (X, Λ), а x и y — точки из $\Lambda(\hat{x})$. Тогда $(\dot{x}, \hat{x}) \in R$ и $(\hat{x}, \dot{y}) \in R$. Отсюда в силу транзитивности R получаем $(\dot{x}, \dot{y}) \in R$. А это означает, что $y \in \Lambda(\dot{x})$. Однако если стационарная последовательность $\dot{x}$ имеет один предел, то $x = y$. Поэтому при выполнении условия 2) Λ является операцией однозначного предела. Далее доказательство не вызывает затруднений. ▶

Операцию предела Λ в множестве X и полную систему окружений U в $X \times X$, соответствующие отношению секвенциальной равномерности R, соотнесем к пространству с секвенциальной равномерностью (X, R). Ясно, что в пространствах с секвенциальной равномерностью можно ввести все те понятия, которые были введены в пространствах с операцией предела.

Всякая база фильтра U всех окружений пространства с секвенциальной равномерностью (X, R) называется *фундаментальной системой окружений* этого пространства. Ясно, что система всех симметричных окружений пространства (X, R) является его фундаментальной системой окружений.

Предложение 2.12. *Пусть (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее операцию предела Λ. Тогда каждое окружение этого пространства является окрестностью диагонали $\Delta(X)$ в $(X, \Lambda) \times (X, \Lambda)$.*

◀ Пусть $\mathrm{u} \subset X \times X$ — окружение пространства (X, R). Предположим, что u не является окрестностью диагонали $\Delta(X)$ в $(X, \Lambda) \times (X, \Lambda)$. Тогда существует последовательность $\hat{\zeta} = (\zeta_n : n \in \mathbb{N})$ в $(X \times X) \setminus \mathrm{u}$, сходящаяся в указанном прямом произведении к некоторому $\zeta \in \Delta(X)$. Пусть $\zeta = (x, x)$ и $\zeta_n = (x_n, y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. Имеем, что $x \in \Lambda(\hat{x})$, $x \in \Lambda(\hat{y})$, и, значит, $(\hat{x}, \dot{x}) \in R$, $(\dot{x}, \hat{y}) \in R$. Отсюда в силу транзитивности R получаем $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$. Поэтому $\hat{\zeta}$ почти вся лежит в $\mathfrak{u}$, что противоречит выбору $\hat{\zeta}$. Следовательно, $\mathfrak{u}$ является окрестностью диагонали $\Delta(X)$. ►

В $(X, \Lambda)\times(X, \Lambda)$ окрестность диагонали может не быть окружением пространства с секвенциальной равномерностью (X, R), имеющего операцию предела последовательности Λ.

Теорема 2.11. *Пусть* (X, R) *— пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее операцию предела* Λ. *Тогда*

а) если последовательности $\hat{x}$ *и* $\hat{y}$ *в* X *такие, что* $\Lambda(\hat{x})\cap\Lambda(\hat{y})\neq\varnothing$, *то* $(\hat{x}, \hat{y})\in R$;

б) $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{y})$ *для любого* $(\hat{x}, \hat{y})\in R$;

в) для любого $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ *множество* $\Lambda(\hat{x})$ *замкнуто, а каждая окрестность точки из* $\Lambda(\hat{x})$ *является окрестностью для* $\Lambda(\hat{x})$, *причем пересечение всех окрестностей точки* $x\in X$ *совпадает с* $\Lambda(\dot{x})$;

г) если $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ *— сходящаяся последовательность,* $\hat{x}'\prec\hat{x}$, $\hat{z}$ *— последовательность в* $\Lambda(\hat{x})$, *а* $\hat{\xi}=(\xi_n : n\in\mathbb{N})$ *— последовательность точек* $\xi_n\in\Lambda(\dot{x}_n)$, *то* $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{x}')=\Lambda(\hat{z})=$ $=\Lambda(\hat{\xi})$;

д) если последовательность $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ *либо сходится, либо не обладает сходящейся подпоследовательностью, то* $\overline{[\hat{x}]}=[\hat{x}]^{+}=\Lambda(\hat{x})\bigcup\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\Lambda(\dot{x}_n)$, *причем в первом случае замыкание* $\overline{[\hat{x}]}$ *окрестностно компактно;*

е) всякое секвенциально компактное подмножество M *в* X *секвенциально относительно компактно и* $\overline{M}=M^{+}=$ $=\bigcup\limits_{x\in M}\Lambda(\dot{x})$, *а, следовательно, каждая последовательность* $\hat{x}\in\overline{M}^{\mathbb{N}}$ *обладает подпоследовательностью, имеющей предел в* M, *и для* $\hat{x}$ *существует такое* $\hat{y}\in M^{\mathbb{N}}$, *что* $(\hat{x}, \hat{y})\in R$;

ж) если подмножество $H\subset X$ *открыто или замкнуто, то* $H=\bigcup\limits_{x\in H}\Lambda(\dot{x})$.

◄ (а) Пусть $z\in\Lambda(\hat{x})\cap\Lambda(\hat{y})$. Тогда $(\hat{x}, \dot{z})\in R$, $(\dot{z}, \hat{y})\in R$ и, следовательно, $(\hat{x}, \hat{y})\in R$.

(б) Пусть $(\hat{x}, \hat{y})\in R$. В силу симметричности R имеет место $(\hat{y}, \hat{x})\in R$. Если $z\in\Lambda(\hat{x})$, то $(\hat{x}, \dot{z})\in R$. В силу транзитивности R имеем также $(\hat{y}, \dot{z})\in R$ и, значит, $z\in\Lambda(\hat{y})$. Аналогично доказывается, что если $\xi\in\Lambda(\hat{y})$, то $\xi\in\Lambda(\hat{x})$. Следовательно, $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{y})$.

(в) Очевидно, нужно рассматривать случай $\Lambda(\hat{x})\neq\varnothing$. Пусть $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ — последовательность в $\Lambda(\hat{x})$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$

из $y_n \in \Lambda(\hat{x})$ следует, что $(\hat{x}, \dot{y}_n) \in R$. Поэтому в силу б) $\Lambda(\dot{y}_n) = \Lambda(\hat{x})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда в силу указанного в теореме 1.3 свойства 4) операций предела получаем $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{y})$. Но тогда с учетом а) и б) имеет место равенство $\Lambda(\hat{y}) = \Lambda(\hat{x})$, из которого следует замкнутость $\Lambda(\hat{x})$. Пусть u_z — окрестность некоторого $z \in \Lambda(\hat{x})$, а $\hat{z} \in (X \backslash u_z)^{\mathbb{N}}$. Так как $z \notin \Lambda(\hat{z})$, то в силу а) и б) $\Lambda(\hat{x}) \cap \Lambda(\hat{z}) = \varnothing$. А это означает, что u_z является окрестностью множества $\Lambda(\hat{x})$.

Пусть точка $y \in X$ принадлежит каждой окрестности точки $x \in X$. Тогда $x \in \Lambda(\dot{y})$. Поэтому в силу а) и б) $\Lambda(\dot{x}) = \Lambda(\dot{y})$ и $y \in \Lambda(\dot{x})$. Следовательно, пересечение всех окрестностей точки x совпадает с $\Lambda(\dot{x})$.

(г) Равенство $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x}')$ вытекает из $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}')$ с учетом а) и б). Равенство $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{z})$ уже было установлено в утверждении в). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_n)$ следует, что $(\dot{x}_n, \dot{\xi}_n) \in R$. Поэтому $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in R$ в силу указанного в теореме 2.9 свойства 4) отношений секвенциальной равномерности. Отсюда с учетом б) получаем $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{\xi})$.

(д) Если последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ либо сходится, либо не обладает сходящейся подпоследовательностью, то в силу в) и г) имеет место равенство $[\hat{x}]^+ = \Lambda(\hat{x}) \bigcup \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \Lambda(\dot{x}_n)$, правая часть которого есть замкнутое множество и, значит, $\overline{[\hat{x}]} = [\hat{x}]^+$.

Докажем окрестностную компактность $\overline{[\hat{x}]}$ в случае сходящейся последовательности $\hat{x}$. Пусть $x_0 \in \Lambda(\hat{x})$, а E — некоторое окрестностное покрытие множества $\overline{[\hat{x}]}$. Тогда для каждого целого $n \geqslant 0$ существует такое $u_n \in E$, что $x_n \in u_n^-$. В силу в) $\Lambda(\hat{x}) \subset u_0^-$ и $\Lambda(\dot{x}_n) \subset u_n^-$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Докажем существование такого $m \in \mathbb{N}$, что $\Lambda(\dot{x}_n) \subset u_0$ для всех натуральных $n \geqslant m$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел $k_1 < k_2 < \ldots$, что $\Lambda(\dot{x}_{k_n}) \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_{k_n}) \backslash u_0$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$. В силу г) $\Lambda(\hat{\xi}) = \Lambda(\hat{x})$. Однако u_0 является окрестностью множества $\Lambda(\hat{x})$. Поэтому последовательность $\hat{\xi}$ почти вся лежит в u_0, что противоречит выбору $\hat{\xi}$. Следовательно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $\Lambda(\dot{x}_n) \subset u_0$ для всех $n \geqslant m$. Отсюда в силу доказанного для $\overline{[\hat{x}]}$ равенства получаем, что конечная система $\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ множеств из E покрывает $\overline{[\hat{x}]}$. А это означает, что $\overline{[\hat{x}]}$ окрестностно компактно.

(е) Пусть $y \in M^+$, а $\hat{x}$ — последовательность в M сходящаяся к y. Поскольку M секвенциально компактно, существует такое $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $M \cap \Lambda(\hat{x}') \neq \varnothing$. Пусть $x \in M \cap \Lambda(\hat{x}')$. Так как $y \in \Lambda(\hat{x}')$, то в силу г) $y \in \Lambda(\dot{x})$. Отсюда следует, что $M^+ = \bigcup\limits_{x \in M} \Lambda(\dot{x})$. С использованием г) легко доказывается, что правая часть полученного равенства есть замкнутое и секвенциально компактное множество. Поэтому $\overline{M} = M^+$ и, значит, $\overline{M}$ секвенциально компактно.

(ж) Пусть $H \subset X$ и $x \in H$. Если H замкнуто, то, очевидно, $\Lambda(\dot{x}) \subset H$. Из $y \in \Lambda(\dot{x})$ следует, что $x \in \Lambda(\dot{y})$. Поэтому если H открыто, то $\Lambda(\dot{x}) \subset H$. ▶

Из теорем 1.31, 1.54 и утверждения д) теоремы 2.11 вытекает

Следствие 2.1. *Пространство с секвенциальной равномерностью топологическое, причем если τ — его секвенциальная топология, то τ-счетно компактное множество секвенциально компактно.* ▶

Пусть Λ — операция предела, а U — полная система окружений пространства с секвенциальной равномерностью (X, R). Окружение $\mathrm{u} \in U$, являющееся открытым множеством в пространстве $(X, \Lambda) \times (X, \Lambda)$, называется *открытым окружением* пространства (X, R), причем множество W всех открытых окружений $\mathrm{u} \in U$ называется *полной системой открытых окружений* пространства (X, R). Очевидно, система W инвариантна относительно конечных пересечений и произвольных объединений. Кроме того, если $\mathrm{w} \in W$, то $\mathrm{w}^{-1} \in W$. Поэтому каждое открытое окружение содержит симметричное открытое окружение. Отметим, что открытая в $(X, \Lambda) \times (X, \Lambda)$ окрестность диагонали $\Delta(X)$ может не быть окружением пространства (X, R). Кроме того, фильтр V в $X \times X$, имеющий базу W, может отличаться от U. Очевидно, что если $V = U$, то (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона.

Система W' открытых окружений пространства с секвенциальной равномерностью (X, R) называется его *фундаментальной системой открытых окружений*, если для каждого открытого окружения w этого пространства существует такое $\mathrm{w}' \in W'$, что $\mathrm{w}' \subset \mathrm{w}$. Ясно, что система всех симметричных открытых окружений пространства (X, R) является его фундаментальной системой открытых окружений.

Теорема 2.12. *Полная система открытых окружений W пространства с секвенциальной равномерностью (X, R) определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности R, а* *для секвенциальной топологии τ пространства $(X,\, R)$ справедливы равенства*

$$\tau\backslash\{\varnothing\} = \{\mathrm{w}[x]_1 : x\in X,\ \mathrm{w}\in W\} = \{\mathrm{w}[x]_2 : x\in X,\ \mathrm{w}\in W\} = \\ = \{\mathrm{w}[x] : x\in X,\ \mathrm{w}\in W\}. \tag{1}$$

◀ Пусть R' — отношение секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$, определенное системой окружений W. Очевидно, что $R\subset R'$. Докажем обратное включение. Рассмотрим пару $(\hat{x},\, \hat{y})\in(X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}})\backslash R$ последовательностей $\hat{x}=(x_1,\, x_2,\, \ldots)$, $\hat{y}= =(y_1,\, y_2,\, \ldots)$. В силу указанного в теореме 2.8 свойства 3) отношений секвенциальной равномерности существует такое $(\hat{x}',\, \hat{y}')\prec(\hat{x},\, \hat{y})$, что $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\notin R$ для любой пары $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющей включению $[(\hat{\xi},\, \hat{\eta})]\subset[(\hat{x}',\, \hat{y}')]$. Пусть Λ — операция предела пространства $(X,\, R)$. Ясно, что существует такое $(\hat{z},\, \hat{t})\prec(\hat{x}',\, \hat{y}')$, что каждая из последовательностей $\hat{z}= =(z_1,\, z_2,\, \ldots)$ и $\hat{t}=(t_1,\, t_2,\, \ldots)$ либо сходится, либо не обладает сходящейся подпоследовательностью. С использованием теоремы 2.11 легко доказывается, что в $(X,\, \Lambda)\times(X,\, \Lambda)$ выполняются равенства

$$\overline{[(\hat{z},\, \hat{t})]} = [(\hat{z},\, \hat{t})]^+ = (\Lambda(\hat{z})\times\Lambda(\hat{t}))\bigcup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\Lambda(\dot{z}_n)\times\Lambda(\dot{t}_n)). \tag{2}$$

Докажем, что $(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')\notin R$ для любого $(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению $[(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')]\subset\overline{[(\hat{z},\, \hat{t})]}$. Предположим противное, т. е. существует $(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')\in R$, удовлетворяющее указанному включению. С учетом (2) существует пара $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\prec(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')$ последовательностей $\hat{\xi}=(\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots)$ и $\hat{\eta}=(\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots)$, удовлетворяющая одному из следующих условий:

1) $[(\hat{\xi},\, \hat{\eta})]\subset\Lambda(\hat{z})\times\Lambda(\hat{t})$;

2) $[(\hat{\xi},\, \hat{\eta})]\subset\Lambda(\dot{z}_m)\times\Lambda(\dot{t}_m)$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$;

3) $(\xi_n,\, \eta_n)\in\Lambda(\dot{z}_{k_n})\times\Lambda(\dot{t}_{k_n})$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ с некоторым $k_n\in\mathbb{N}$, таким, что $k_1<k_2<\ldots$.

В силу $(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')\in R$, $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\prec(\hat{\xi}',\, \hat{\eta}')$ и указанного в теореме 2.8 свойства 2) отношений секвенциальной равномерности имеем, что $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\in R$. При выполнении условия 1) имеем также $[\hat{\xi}]\subset\Lambda(\hat{z})$ и $[\hat{\eta}]\subset\Lambda(\hat{t})$. Поэтому в силу теоремы 2.11 $(\hat{z},\, \hat{\xi})\in R$ и $(\hat{\eta},\, \hat{t})\in R$. Отсюда в силу транзитивности R получаем $(\hat{z},\, \hat{t})\in R$.

Аналогично доказывается, что при выполнении условия 2) $(\dot{z}_m,\ \dot{t}_m)\in R$. Пусть выполняется условие 3). Тогда $\xi_n\in\Lambda(\dot{z}_{k_n})$ и $\eta_n\in\Lambda(\dot{t}_{k_n})$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда в силу теоремы 2.11 получаем $(\hat{z}',\ \hat{\xi})\in R$ и $(\hat{\eta},\ \hat{t}')\in R$, где $\hat{z}'=(z_{k_n}:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{t}'=(t_{k_n}:n\in\mathbb{N})$. Поэтому $(\hat{z}',\ \hat{t}')\in R$ в силу транзитивности R. Таким образом, при выполнении любого из условий 1)—3) существует $(\hat{\varphi},\ \hat{\psi})\in R$, удовлетворяющее включению $[(\hat{\varphi},\ \hat{\psi})]\subset[(\hat{z},\ \hat{t})]\subset[(\hat{x}',\ \hat{y}')]$. А это противоречит выбору $(\hat{x}',\ \hat{y}')$. Тем самым даказано, что $(\hat{\xi}',\ \hat{\eta}')\notin$ $\notin R$, для любого $(\hat{\xi}',\ \hat{\eta}')\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению $[(\hat{\xi}',\ \hat{\eta}')]\subset\overline{[(\hat{z},\ \hat{t})]}$. Отсюда в силу теоремы 2.8 следует, что множество $(X\times X)\setminus\overline{[(\hat{z},\ \hat{t})]}$ является открытым окружением пространства $(X,\ R)$. Однако вне этого окружения находится бесконечное число членов последовательности $((x_n,\ y_n):n\in\mathbb{N})$, так как $(\hat{z},\ \hat{t})\prec(\hat{x},\ \hat{y})$. Поэтому $(\hat{x},\ \hat{y})\notin R'$ и, значит, $R'\subset R$. Из доказанных включений получаем $R'=R$, т. е. полная система открытых окружений W пространства $(X,\ R)$ определяет отношение секвенциальной равномерности R.

Докажем (1). Очевидно, для любых $x\in X$ и $\mathrm{w}\in W$ каждое из множеств $\mathrm{w}[x]_1$, $\mathrm{w}[x]_2$ и $\mathrm{w}[x]$ является открытой окрестностью точки x в $(X,\ \Lambda)$. Обратно, для любой открытой окрестности u_x точки $x\in X$ множество

$$\mathrm{w}=(X\times X)\setminus(((X\setminus u_x)\times\Lambda(\dot{x}))\cup(\Lambda(\dot{x})\times(X\setminus u_x)))$$

является симметричным открытым окружением пространства $(X,\ R)$, причем $u_x=\mathrm{w}[x]_1=\mathrm{w}[x]_2=\mathrm{w}[x]$. Действительно, поскольку каждое из множеств $\Lambda(\dot{x})$ и $X\setminus u_x$ замкнуто в $(X,\ \Lambda)$, множество w открыто в $(X,\ \Lambda)\times(X,\ \Lambda)$. Докажем, что $(\hat{\xi},\ \hat{\eta})\notin R$ для любого $(\hat{\xi},\ \hat{\eta})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющего включению

$$[(\hat{\xi},\ \hat{\eta})]\subset(X\times X)\setminus\mathrm{w}=((X\setminus u_x)\times\Lambda(\dot{x}))\cup(\Lambda(\dot{x})\times(X\setminus u_x)).\qquad(3)$$

С этой целью предположим противное, т. е. существует $(\hat{\xi},\ \hat{\eta})\in$ $\in R$, удовлетворяющее включению (3). Тогда существует такое $(\hat{\xi}',\ \hat{\eta}')\prec(\hat{\xi},\ \hat{\eta})$, что либо $[\hat{\xi}']\subset X\setminus u_x$ и $[\hat{\eta}']\subset\Lambda(\dot{x})$, либо $[\hat{\xi}']\subset\Lambda(\dot{x})$ и $[\hat{\eta}']\subset X\setminus u_x$. При выполнении любого из указанных случаев из $(\hat{\xi}',\ \hat{\eta}')\in R$ в силу теоремы 2.11 следует, что $\Lambda(\hat{\xi}')=\Lambda(\hat{\eta}')=\Lambda(\dot{x})$ и, значит, $x\in\Lambda(\hat{\xi}')=\Lambda(\hat{\eta}')$. А это противоречит тому, что u_x есть окрестность точки x. Следовательно, построенное множество w является открытым окружением пространства $(X,\, R)$. Тем самым равенства (1) доказаны. ►

В общей топологии равномерная структура в X вводится при помощи такого фильтра V в $X{\times}X$, что

1) каждое $\mathrm{v}\in V$ *содержит* $\Delta(X)$*;*

2) если $\mathrm{v}\in V$, *то* $\mathrm{v}^{-1}\in V$;

3) для каждого $\mathrm{v}\in V$ *существует такое* $\mathrm{u}\in V$, *что* $\mathrm{u}^2\subset \mathrm{v}$.

В связи с этим отметим, что полная система окружений U и полная система открытых окружений W пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\, R)$ удовлетворяют условиям 1) и 2), а условию 3) могут не удовлетворять. Более того, может не существовать системы окружений, удовлетворяющей условию 3) и определяющей данное отношение секвенциальной равномерности R, причем R даже может и не определяться системой окружений $\{\mathrm{u}^2 : \mathrm{u}\in U\}$ (см. примеры в главе III, § 16, n° 1 и n° 2). Если система подмножеств в $X{\times}X$ удовлетворяет условиям 1)—3), то оно удовлетворяет также указанным в теореме 2.10 условиям и, значит, является системой окружений, определяющей отношение секвенциальной равномерности. Как показывают примеры (см. § 16, n° 9), два различных фильтра в $X{\times}X$, удовлетворяющих условиям 1)—3), могут определить одно и то же отношение секвенциальной равномерности.

Определение 2.2. *Пространство с операцией предела* $(X,\, \Lambda)$ *называется секвенциально равномеризуемым или секвенциально равномерным пространством, а* Λ *— равномерной операцией предела, если* Λ *может определяться отношением секвенциальной равномерности.*

Теорема 2.13. *Пространство с операцией предела* $(X,\, \Lambda)$ *является секвенциально равномерным пространством тогда и только тогда, когда для каждой сходящейся последовательности* $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ *в* X, *произвольной точки* $x\in\Lambda(\hat{x})$ *и произвольной последовательности* $\hat{\xi}=(\xi_n : n{\in}\mathbb{N})$ *точек* $\xi_n\in\Lambda(\dot{x}_n)$ *имеют место равенства* $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{\xi})=\Lambda(\dot{x})$. *Среди отношений секвенциальной равномерности, определяющих в* X *операцию предела* Λ, *существуют сильнейшее отношение* R' *и слабейшее отношение* R''. *При этом полная система окружений, соответствующая отношению* R', *совпадает с системой всех окрестностей диагонали* $\Delta(X)$ *в* $(X,\, \Lambda){\times}(X,\, \Lambda)$.

◄ С учетом теоремы 2.11 в доказательстве нуждается утверждение о том, что если для операции предела Λ выполняются указанные равенства, то она определяется некоторым отношением секвенциальной равномерности. Из этих равенств следует, что $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{z})$ для каждой сходящейся последовательности $\hat{x}$ в X и любой последовательности $\hat{z}$ в $\Lambda(\hat{x})$. Кроме того, если $\hat{x}$ и $\hat{y}$ такие, что $\Lambda(\hat{x})\cap\Lambda(\hat{y})\neq\varnothing$, то $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{y})$.

Обозначим через P' множество всех пар $(\hat{x}, \hat{y})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$ последовательностей $\hat{x}=(x_1, x_2, \ldots)$ и $\hat{y}=(y_1, y_2, \ldots)$, для которых либо $\Lambda(\hat{x})=\Lambda(\hat{y})\neq\varnothing$, либо $\Lambda(\dot{x}_n)=\Lambda(\dot{y}_n)$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Легко проверить, что множество P' обладает всеми указанными в теореме 2.9 свойствами, кроме свойства 3). Рассмотрим множество R' таких $(\hat{x}, \hat{y})\in X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}')\prec\prec(\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'')\prec(\hat{x}', \hat{y}')$ из P'. Очевидно, $P'\subset R'$ и, кроме того, множество R' обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—6). Следовательно, R' является отношением секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Легко доказывается также то, что $(\hat{x}, \dot{x})\in R'$ выполняется для $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ и $x\in X$ тогда и только тогда, когда $x\in\Lambda(\hat{x})$. Следовательно, R' определяет в X операцию предела Λ и, значит, (X, Λ) является секвенциально равномерным пространством. С учетом теоремы 2.11 из построения R' следует, что оно является сильнейшим отношением секвенциальной равномерности, определяющим операцию предела Λ. При этом в силу следствия 1.1 полная система окружений, соответствующая отношению R', совпадает с системой всех окрестностей диагонали $\Delta(X)$ в $(X, \Lambda)\times(X, \Lambda)$.

Пусть $E=\{R_i : i\in I\}$ — система всех отношений секвенциальной равномерности, определяющих в X операцию предела Λ. Легко проверить, что точная нижняя граница системы E в частично упорядоченном множестве $\mathcal{R}(X^{\mathbb{N}})$ всех отношений секвенциальной квазиравномерности в $X^{\mathbb{N}}$ является отношением секвенциальной равномерности. Следовательно, $R'=\bigcap\limits_{i\in I} R_i$. Однако точная верхняя граница системы E в $\mathcal{R}(X^{\mathbb{N}})$ может не быть отношением секвенциальной равномерности, а именно: она может не обладать свойством транзитивности. Покажем, что E имеет точную верхнюю границу R'' в частично упорядоченном множестве $\mathcal{R}_0(X^{\mathbb{N}})$ всех отношений секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$ и докажем, что она определяет в X операцию предела Λ. Обозначим $P=\bigcup\limits_{i\in I} R_i$. Множество P обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1), 2), 4) и 5). Положим $P_0=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P^n$. Множество P_0 обладает всеми указанными в теореме 2.9 свойствами, кроме свойства 3). Обозначим через R'' множество таких $(\hat{x},\, \hat{y}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}',\, \hat{y}') \prec (\hat{x},\, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'',\, \hat{y}'') \prec (\hat{x}',\, \hat{y}')$ из P_0. Заметим, что $P^n \subset P^{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, так как $\Delta(X^{\mathbb{N}}) \subset P$. Кроме того, $P_0 \subset R''$. Построенное множество R'' обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—6) и, следовательно, определяет отношение секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Из построения R'' следует, что оно является точной верхней границей системы E в $\mathcal{R}_0(X^{\mathbb{N}})$. Нетрудно убедиться также в том, что $(\hat{x},\, \dot{x}) \in R''$ выполняется для $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X$ тогда и только тогда, когда $x \in \Lambda(\hat{x})$, т. е. когда $(\hat{x},\, \dot{x}) \in R_i$ для всех $i \in I$. Следовательно, R'' определяет в X операцию предела Λ и, значит, является наибольшим элементом системы E. Тем самым существование слабейшего отношения секвенциальной равномерности R'', определяющего Λ, тоже доказано. ▶

Нетрудно доказать, что пространство с операцией предела $(X,\, \Lambda)$ является секвенциально равномерным пространством тогда и только тогда, когда оно топологическое и в нем множества пределов любых двух сходящихся последовательностей либо не пересекаются, либо совпадают. Последнее условие эквивалентно выполнению равенства $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\dot{x})$ для любой сходящейся последовательности $\hat{x}$ в $(X,\, \Lambda)$ и любого $x \in \Lambda(\hat{x})$.

Следствие 2.2. *Операция однозначного предела является равномерной операцией предела. Равномерная операция предела, по которой стационарная последовательность имеет один предел, является операцией однозначного предела.* ▶

Следствие 2.3. *Подпространство секвенциально равномерного пространства есть секвенциально равномерное пространство. Прямое произведение любого семейства секвенциально равномерных пространств есть секвенциально равномерное пространство.* ▶

Если $(S_x : x \in X)$ — структура сходимости в X (см. определение 1.3), соответствующая равномерной операции предела Λ, то для каждых x и y из X множества S_x и S_y либо не пересекаются, либо совпадают, причем $S_x = S_y$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(\dot{x}) = \Lambda(\dot{y})$.

Частично упорядоченное множество $\mathcal{R}_0(X^{\mathbb{N}})$ всех отношений секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$ является полной решеткой, в которой наибольшим элементом, т. е. слабейшим отношением секвенциальной равномерности, является $X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, а наименьшим элементом, т. е. сильнейшим отношением секвенциальной равномерности, является множество таких пар $(\hat{x},\, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots)$ и $\hat{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots)$ в X, что

$x_n = y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа значений. Точная нижняя граница R' системы $\{R_i : i \in I\}$ в $\mathcal{R}_0(X^{\mathbb{N}})$ определяется равенством $R' = \bigcap\limits_{i\in I} R_i$, а точная верхняя граница R'' этой системы определяется следующим образом. Обозначим $P_1 = \bigcup\limits_{i\in I} R_i$. Множество P_1 обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1), 2) и 5). Пусть P_2 — множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\hat{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ в X, что $(\dot{x}_n, \dot{y}_n) \in P_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $P = P_1 \cup P_2$ обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1), 2), 4) и 5), а множество $P_0 = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} P^n$ может не обладать лишь свойством 3). Обозначим через R'' множество таких $(\hat{x}, \hat{y}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$ из P_0. Множество R'' обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—6) и, следовательно, определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности. Из построения R'' следует, что оно является точной верхней границей системы $\{R_i : i \in I\}$ в $\mathcal{R}_0(X^{\mathbb{N}})$.

Множество всех отношений секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, определяющих в X данную равномерную операцию предела Λ, является полной решеткой.

Множество $\mathcal{L}_*(X)$ всех равномерных операций предела в X является полной решеткой.

Замечание 2.1. Пусть $\mathcal{P}_0(X^{\mathbb{N}})$ — множество всех подмножеств $P \subset X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, каждое из которых определяется равенством $P = \bigcup\limits_{R\in E} R$ с некоторым непустым $E \subset \mathcal{R}_0(X^{\mathbb{N}})$. Такое P может не быть отношением секвенциальной квазиравномерности (оно обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1), 2) и 5)). Отношение P в $X^{\mathbb{N}}$, принадлежащее множеству $\mathcal{P}_0(X^{\mathbb{N}})$ и обладающее всеми указанными в теореме 2.9 свойствами, кроме, быть может, свойства 3), называется *отношением секвенциальной псевдоравномерности.* При помощи отношения секвенциальной псевдоравномерности P определяется отображение $\psi : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, называемое *равномерной операцией псевдопредела* в X, которое сопоставляет каждому $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ множество $\psi(\hat{x})$ тех $x \in X$, что $(\hat{x}, \dot{x}) \in P$, обладает всеми указанными в теореме 1.3 свойствами, кроме, быть может, свойства 3) и удовлетворяет условиям теоремы 2.13. Множество $\mathcal{P}_0(X^{\mathbb{N}})$, частично упорядоченное отношением включения, является полной решеткой, причем точной нижней и точной верхней границами его непустого подмножества H являются $P' = \bigcap\limits_{P\in H} P$ и $P'' = \bigcup\limits_{P\in H} P$ соответственно (в связи с этим см. замечание 1.10).

Предложение 2.13. *Пусть равномерная операция предела Λ в X и отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определены конечной системой окружений V в $X\times X$. Тогда пересечение* w *системы V является симметричным открытым окружением пространства $(X,\, R)$, содержится в любом его окружении и удовлетворяет равенству* $\mathrm{w}^2 = \mathrm{w}$, *а, значит, в пространстве $(X,\, \Lambda)$ каждая точка имеет открытую окрестность, содержащуюся в любой окрестности этой точки. Кроме того, R является сильнейшим отношением секвенциальной равномерности, определяющим Λ.*

◀ Утверждения о том, что w является симметричным окружением пространства $(X,\, R)$, содержится в любом его окружении и удовлетворяет равенству $\mathrm{w}^2 = \mathrm{w}$, очевидны. Докажем, что w является открытым окружением. Пусть $(x,\, y)\in \mathrm{w}$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $(x_n,\, y_n)\in X\times X$, $n\in\mathbb{N}$, сходящуюся к $(x,\, y)$ в $(X,\, \Lambda)\times(X,\, \Lambda)$. Для $\hat{x} = (x_n : n\in \in\mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n\in\mathbb{N})$ имеем, что $(\hat{x},\, \dot{x})\in R$ и $(\dot{y},\, \hat{y})\in R$. Однако $(\dot{x},\, \dot{y})\in R$ и в силу транзитивности R $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$. Поэтому $(x_n,\, y_n)\in \mathrm{w}$ для всех $n\in\mathbb{N}$, кроме конечного числа значений. Это означает, что w является окрестностью точки $(x,\, y)$, а следовательно, и открытым окружением пространства $(X,\, R)$.

Пусть теперь $\hat{x} = (x_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n\in\mathbb{N})$ — такие последовательности в X, что $(\hat{x},\, \hat{y})\in R$. Тогда $(x_n,\, y_n)\in \mathrm{w}$ для всех $n\geqslant m$ при некотором $m\in\mathbb{N}$. Поэтому $(\dot{x}_n,\, \dot{y}_n)\in R$ и, значит, $\Lambda(\dot{x}_n) = \Lambda(\dot{y}_n)$ для всех $n\geqslant m$. Из полученного равенства следует, что $(\hat{x},\, \hat{y})\in R'$ для любого отношения секвенциальной равномерности R', определяющего операцию предела Λ. А это означает, что R является сильнейшим отношением секвенциальной равномерности, определяющим Λ. ▶

Если V — фундаментальная система окружений (открытых окружений) пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\, R)$, то система $\{\mathrm{v}^{-1} : \mathrm{v}\in V\}$ тоже является фундаментальной системой окружений (открытых окружений) этого пространства. Учитывая это, из предложений 2.1—2.6 получим следующие две теоремы.

Теорема 2.14. *Пусть $(X,\, R)$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее операцию предела Λ, а $M\subset \subset X$, $G\subset X$ и $H\subset X\times X$. Тогда для любого окружения* u *про-*

странства $(X,\,R)$ *множества* $\mathrm{u}[M]_1$, $\mathrm{u}[M]_2$ *и* $\mathrm{u}[M]$ *являются окрестностями множества* M *в* $(X,\,\Lambda)$, *а* $\mathrm{u}\circ H\circ\mathrm{u}$ *является окрестностью множества* H *в* $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$, *причем* $M^+\subset\subset\mathrm{u}[M]$ *и* $H^+\subset\mathrm{u}\circ H\circ\mathrm{u}$. *Кроме того, для любой фундаментальной системы окружений* U' *пространства* $(X,\,R)$ *имеют место равенства*

$$M^+=\bigcap_{\mathrm{u}\in U'}\mathrm{u}[M]=\bigcap_{\mathrm{u}\in U'}\mathrm{u}[M]_1=\bigcap_{\mathrm{u}\in U'}\mathrm{u}[M]_2,$$

$$(M\times G)^+=\bigcap_{\mathrm{u}\in U'}\mathrm{u}\circ(M\times G)\circ\mathrm{u}.$$

При этом равенство $H^+=\bigcap\limits_{\mathrm{u}\in U'}\mathrm{u}\circ H\circ\mathrm{u}$ *имеет место тогда и только тогда, когда для каждой точки* $(x,\,y)$ *пространства* $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$ *и каждой ее окрестности* $\mathrm{u}_{(x,\,y)}$ *существуют такие окрестности* u_x *и* u_y *точек* x *и* y *пространства* $(X,\,\Lambda)$, *что* $u_x\times u_y\subset\mathrm{u}_{(x,\,y)}$. ▶

Теорема 2.15. *Пусть* $(X,\,R)$ — *пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее операцию предела* Λ, *а* $M\subset\subset X$, $G\subset X$ *и* $H\subset X\times X$. *Тогда для любого открытого окружения* w *пространства* $(X,\,R)$ *множества* $\mathrm{w}[M]$, $\mathrm{w}[M]_1$ *и* $\mathrm{w}[M]_2$ *являются открытыми окрестностями множества* M *в* $(X,\,\Lambda)$, *а* $\mathrm{w}\circ H\circ\mathrm{w}$ *является открытой окрестностью множества* H *в* $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$, *причем* $\overline{M}\subset\mathrm{w}[M]$ *и* $\overline{H}\subset\mathrm{w}\circ H\circ\mathrm{w}$. *Кроме того, для любой фундаментальной системы открытых окружений* W' *пространства* $(X,\,R)$ *имеют место равенства*

$$\overline{M}=\bigcap_{\mathrm{w}\in W'}\mathrm{w}[M]=\bigcap_{\mathrm{w}\in W'}\mathrm{w}[M]_1=\bigcap_{\mathrm{w}\in W'}\mathrm{w}[M]_2,$$

$$\overline{M\times G}=\bigcap_{\mathrm{w}\in W'}\mathrm{w}\circ(M\times G)\circ\mathrm{w}.$$

При этом равенство $\overline{H}=\bigcap\limits_{\mathrm{w}\in W'}\mathrm{w}\circ H\circ\mathrm{w}$ *имеет место тогда и только тогда, когда секвенциальная топология пространства* $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$ *есть* $\tau\times\tau$, *где* τ — *секвенциальная топология пространства* $(X,\,\Lambda)$. ▶

Поскольку система всех симметричных окружений (симметричных открытых окружений) пространства с секвенциальной равномерностью является фундаментальной системой окружений (открытых окружений), из предложений 2.7 и 2.8 получаем

Предложение 2.14. *Пусть* (X, R) *— пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее операцию предела* Λ*, полную систему окружений* U *и полную систему открытых окружений* W*. Тогда выполнение первого (второго) из равенств*

$$\bigcap_{\mathrm{u}\in U} \mathrm{u}^2 = \Delta(X), \qquad \bigcap_{\mathrm{w}\in W} \mathrm{w}^2 = \Delta(X)$$

необходимо и достаточно для отделимости (хаусдорфовости) пространства (X, Λ). ▶

Предложение 2.15. *Пусть* (X, R) *— пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее операцию предела* Λ *и полную систему окружений* U*, а* $V \in U$ *— такая подсистема, что каждое* $\mathrm{v} \in V$ *содержит* $\mathrm{u} \in V$*, для которого* $\mathrm{u}^2 \subset \mathrm{v}$*. Тогда*

а) для любого $H \subset X \times X$ *множество*

$$E = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}\circ H \circ \mathrm{v}$$

замкнуто в $(X, \Lambda)\times(X, \Lambda)$*, причем* $\overline{H} \subset E$*;*

б) для любого $M \subset X$ *множества*

$$G = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M], \quad G_1 = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_1, \quad G_2 = \bigcap_{\mathrm{v}\in V} \mathrm{v}[M]_2$$

замкнуты в (X, Λ)*, причем* $\overline{M} \subset G = G_1 \cap G_2$*;*

в) в $(X, \Lambda)\times(X, \Lambda)$ *внутренность* v° *каждого* $\mathrm{v} \in V$ *содержит окружение из* V *и, значит, является открытым окружением пространства* (X, R)*;*

г) если V' *— фильтр в* $X \times X$*, имеющий предбазу* V*, то каждое* $\mathrm{v} \in V'$ *содержит такое открытое окружение* $\mathrm{u} \in V'$*, что* $\mathrm{u}^2 \subset \mathrm{v}$*;*

д) если пересечение системы V *совпадает с диагональю* $\Delta(X)$*, то пространство* (X, Λ) *хаусдорфово;*

е) если фильтр в $X \times X$*, имеющий предбазу* V*, содержит полную систему открытых окружений пространства* (X, R)*, а секвенциально компактное* $K \subset X$ *и замкнутое* $M \subset X$ *не пересекаются, то существует такое симметричное открытое окружение* w*, что* $\mathrm{w}[\overline{K}] \cap \mathrm{w}[M] = \varnothing$*;*

ж) если V *является предбазой фильтра* U*, то* (X, Λ) *является пространством Фреше–Урысона.*

◀ Очевидно, система окружений $\{\mathrm{v}^{-1} : \mathrm{v} \in V\}$ удовлетворяет такому же условию, что и система V. Поэтому утверждения а)—г) и ж) вытекают из предложения 2.9. Утверждение д) следует из предложения 2.14, поскольку в силу в) для полной системы открытых окружений W пространства $(X,\, R)$ получаем $\Delta(X) \subset \bigcap\limits_{\mathrm{w} \in W} \mathrm{w}^2 \subset \bigcap\limits_{\mathrm{v} \in V} \mathrm{v}^2 = \bigcap\limits_{\mathrm{v} \in V} \mathrm{v} = \Delta(X)$. Докажем е). Так как множество K секвенциально компактно, то в силу утверждения е) теоремы 2.11 замыкание $\overline{K}$ тоже секвенциально компактно. При этом из равенств $\overline{K} = \bigcup\limits_{x \in K} \Lambda(\dot{x})$, $K \cap M = \varnothing$ и замкнутости M следует, что $\overline{K} \cap M = \varnothing$. Обозначим $\mathrm{v} = (X \times X) \setminus (\overline{K} \times M)$. Очевидно, множество $\overline{K} \times M$ замкнуто, а v открыто в пространстве $(X,\, \Lambda) \times (X,\, \Lambda)$. Докажем, что v является открытым окружением пространства $(X,\, R)$. Предположим противное. Тогда найдется такое $(\hat{x},\, \hat{y}) \in R$, что $[(\hat{x},\, \hat{y})] \subset (X \times X) \setminus \mathrm{w} = \overline{K} \times M$, т. е. $[\hat{x}] \subset \overline{K}$ и $[\hat{y}] \subset M$. В силу секвенциальной компактности $\overline{K}$ существует подпоследовательность $\hat{x}' \prec \hat{x}$, сходящаяся к некоторому $x \in \overline{K}$, т. е. $(\dot{x},\, \hat{x}') \in R$. Пусть $\hat{y}'$ — соответствующая подпоследовательность для $\hat{y}$, т. е. $(\hat{x}',\, \hat{y}') \prec (\hat{x},\, \hat{y})$. Так как $(\hat{x}',\, \hat{y}') \in R$, то $(\dot{x},\, \hat{y}') \in R$. А это означает, что последовательность $\hat{y}'$ сходится к x. Отсюда в силу замкнутости M получаем $x \in M$, что противоречит равенству $\overline{K} \cap M = \varnothing$. Таким образом, v является открытым окружением пространства $(X,\, R)$. С учетом г) выберем симметричное открытое окружение w так, чтобы $\mathrm{w}^2 \subset \mathrm{v}$. Теперь докажем, что $\mathrm{w}[\overline{K}] \cap \mathrm{w}[M] = \varnothing$. Предположим противное, т. е. существует $x \in \mathrm{w}[\overline{K}] \cap \mathrm{w}[M]$. Тогда в силу симметричности w существуют такие $y \in \overline{K}$ и $z \in M$, что $(y,\, x) \in \mathrm{w}$ и $(x,\, z) \in \mathrm{w}$. Отсюда следует, что $(y,\, z) \in \mathrm{w}^2 \subset \mathrm{v}$ и, значит, $(y,\, z) \in \mathrm{v} \cap (\overline{K} \times M)$. А это противоречит равенству $\mathrm{v} \cap (\overline{K} \times M) = \varnothing$. ▶

Предложение 2.16. *Пусть равномерная операция предела Λ в X и отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определены счетной системой окружений в $X \times X$. Тогда пространство $(X,\, R)$ имеет фундаментальную систему окружений $V = \{\mathrm{v}_n : n \in \mathbb{N}\}$, состоящую из таких симметричных открытых окружений, что $\mathrm{v}_{n+1}^2 \subset \mathrm{v}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а, значит, в пространстве $(X,\, \Lambda)$ каждая точка имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей, состоящую из открытых окрестностей.*

◀ Пусть операция предела Λ в X и отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определены системой окружений $\{\mathrm{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим систему окружений $\{\mathrm{w}_n : n \in \mathbb{N}\}$, где $\mathrm{w}_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} (\mathrm{u}_i \cap \mathrm{u}_i^{-1})$. Очевидно, что $\mathrm{w}_n^{-1} = \mathrm{w}_n$ и $\mathrm{w}_{n+1} \subset \mathrm{w}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем Λ и R могут быть определены также системой окружений $\{\mathrm{w}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Методом индукции докажем существование такой последовательности натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, что $\mathrm{w}_{i_{n+1}}^2 \subset \mathrm{w}_{i_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмем $i_1 = 1$ и предположим, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ числа $i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_m$ выбраны. Докажем возможность выбора i_{m+1}. Будем исходить от противного, т. е. $\mathrm{w}_{i_m+k}^2 \setminus \mathrm{w}_{i_m} \neq \varnothing$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $(x_k,\ y_k) \in \mathrm{w}_{i_m+k}^2 \setminus \mathrm{w}_{i_m}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое $\xi_k \in X$, что $(x_k,\ \xi_k) \in \mathrm{w}_{i_m+k}$ и $(\xi_k,\ y_k) \in \mathrm{w}_{i_m+k}$. В силу $\mathrm{w}_{n+1} \subset \mathrm{w}_n$, $n \in \mathbb{N}$, последовательности пар $(x_k,\ \xi_k)$ и $(\xi_k,\ y_k)$, $k \in \mathbb{N}$, почти все лежат в каждом окружении w_n, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $(\hat{x},\ \hat{\xi}) \in R$ и $(\hat{\xi},\ \hat{y}) \in R$ для $\hat{x} = (x_k : k \in \mathbb{N})$, $\hat{\xi} = (\xi_k : k \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_k : k \in \mathbb{N})$. Отсюда получаем $(\hat{x},\ \hat{y}) \in R$, что невозможно, поскольку $(\hat{x}_k,\ \hat{y}_k) \notin \mathrm{w}_{i_m}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает существование такого $k_0 \in \mathbb{N}$, что $\mathrm{w}_{i_m+k_0}^2 \setminus \mathrm{w}_{i_m} = \varnothing$. Положим $i_{m+1} = i_m + k_0$. Тогда $\mathrm{w}_{i_{m+1}}^2 \subset \mathrm{w}_{i_m}$. Тем самым существование требуемой последовательности $(i_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ доказано. Очевидно, полученная система окружений $\{\mathrm{w}_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию предложения 2.15. Поэтому в $(X,\ \Lambda) \times (X,\ \Lambda)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ внутренность $\mathrm{v}_n = \mathrm{w}_{i_n}^{\circ}$ является открытым окружением пространства $(X,\ R)$, причем $\mathrm{v}_{n+1}^2 \subset \mathrm{w}_{i_n}$. Поскольку v_{n+1}^2 открыто, оно содержится в $\mathrm{w}_{i_n}^{\circ}$, т. е. $\mathrm{v}_{n+1}^2 \subset \mathrm{v}_n$. Докажем, что система $V = \{\mathrm{v}_n : n \in \mathbb{N}\}$ симметричных открытых окружений является фундаментальной системой окружений пространства $(X,\ R)$. Предположим противное. Тогда существует такое окружение u пространства $(X,\ R)$, что $\mathrm{v}_n \setminus \mathrm{u} \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $(x_n,\ y_n) \in \mathrm{v}_n \setminus \mathrm{u}$, $n \in \mathbb{N}$. В силу $\mathrm{v}_{i+1} \subset \mathrm{v}_i$, $i \in \mathbb{N}$, последовательность пар $(x_n,\ y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении v_i, $i \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{x},\ \hat{y}) \in R$. Однако это невозможно, поскольку $(x_n,\ y_n) \notin \mathrm{u}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает, что V является фундаментальной системой окружений пространства $(X,\ R)$. ▶

§ 3. Подпространства пространства с секвенциальной равномерностью. Прямое произведение пространств с секвенциальной равномерностью

1. Пусть X_1 — непустое подмножество пространства с секвенциальной равномерностью (X, R), а $R_1 = R \cap (X_1^{\mathbb{N}} \times X_1^{\mathbb{N}})$. Легко проверяется, что подмножество $R_1 \subset X_1^{\mathbb{N}} \times X_1^{\mathbb{N}}$ определяет в $X_1^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности, а в X_1 операцию предела Λ_1, являющуюся ограничением на X_1 операции предела Λ пространства (X, R). Пространство с секвенциальной равномерностью (X_1, R_1) называется *подпространством* пространства (X, R) и указывается записью $(X_1, R_1) \subset (X, R)$. Отношение R_1 называется *ограничением* отношения R на $X_1^{\mathbb{N}}$. Очевидно, всякое отношение секвенциальной равномерности в $X_1^{\mathbb{N}}$ есть ограничение на $X_1^{\mathbb{N}}$ некоторого отношения секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$. Полная система окружений U пространства (X, R) индуцирует в $X_1 \times X_1$ полную систему окружений U_1 подпространства (X_1, R_1), т. е. U_1 есть система всех множеств $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u} \cap (X_1 \times X_1)$, где $\mathrm{u} \in U$. Однако полная система открытых окружений W_1 подпространства (X_1, R_1) может отличаться от системы W', индуцированной в $X_1 \times X_1$ полной системой открытых окружений W пространства (X, R), причем $W' \subset W_1$ (равенство $W' = W_1$ имеет место, например, когда подмножество X_1 замкнуто). Если V — некоторая система окружений в $X \times X$, определяющая отношение секвенциальной равномерности R пространства (X, R), то она индуцирует в $X_1 \times X_1$ систему окружений V', определяющую отношение секвенциальной равномерности R_1 подпространства (X_1, R_1).

Если $(X_1, R_1) \subset (X, R)$, $(X_2, R_2) \subset (X, R)$ и $X_2 \subset X_1$, то $(X_2, R_2) \subset (X_1, R_1)$, а если $(X_1, R_1) \subset (X, R)$ и $(X_2, R_2) \subset \subset (X_1, R_1)$, то $(X_2, R_2) \subset (X, R)$.

2. Рассмотрим семейство пространств с секвенциальной равномерностью $((X_i, R_i) : i \in I)$, имеющих полные системы окружений U_i, $i \in I$, полные системы открытых окружений W_i, $i \in I$, и операции предела Λ_i, $i \in I$. Пусть

$$X = \prod_{i \in I} X_i,$$

а $R \subset X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$ — подмножество всех пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x}=(x^{(n)}:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}=(y^{(n)}:n\in\mathbb{N})$ элементов $x^{(n)}=(x_i^{(n)}:i\in I)$ и $y^{(n)}=(y_i^{(n)}:i\in I)$ из X, для которых при каждом $i\in I$ пара $(\hat{x}_i,\ \hat{y}_i)$ последовательностей $\hat{x}_i=(x_i^{(n)}:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}_i=(y_i^{(n)}:n\in\mathbb{N})$ в X_i принадлежит подмножеству $R_i\subset X_i^{\mathbb{N}}\times X_i^{\mathbb{N}}$. Легко проверить, что R определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности, а в X операцию предела Λ пространства

$$(X,\ \Lambda)=\prod_{i\in I}(X_i,\ \Lambda_i).$$

Полученное пространство с секвенциальной равномерностью $(X,\ R)$ называется *прямым произведением* семейства пространств $((X_i,\ R_i):i\in I)$ и записывается в виде

$$(X,\ R)=\prod_{i\in I}(X_i,\ R_i).$$

Пусть $(\mathrm{u}_i:i\in I)$ — такое семейство окружений $\mathrm{u}_i\in U_i$, что $\mathrm{u}_i=X_i\times X_i$ для всех $i\in I$, кроме конечного числа значений. Рассмотрим подмножество $\mathrm{u}\subset X\times X$ таких пар $(x,\ y)$ элементов $x=(x_i:i\in I)$ и $y=(y_i:i\in I)$ из X, что $(x_i,\ y_i)\in\mathrm{u}_i$ для всех $i\in I$. Меняя всевозможным образом семейство $(\mathrm{u}_i:i\in I)$, получим некоторую систему V множеств u. Система V удовлетворяет условиям теоремы 2.10 и как система окружений в $X\times X$ определяет отношение секвенциальной равномерности R прямого произведения $(X,\ R)$. Фильтр в $X\times X$, имеющий базу V, может отличаться от полной системы окружений U пространства $(X,\ R)$. Рассмотрим еще такое семейство $(\mathrm{w}_i:i\in I)$ открытых окружений $\mathrm{w}_i\in W_i$, что $\mathrm{w}_i=X_i\times X_i$ для всех $i\in I$, кроме конечного числа значений. Обозначим через w множество таких пар $(x,\ y)$ элементов $x=(x_i:i\in I)$ и $y=(y_i:i\in I)$ из X, что $(x_i,\ y_i)\in\mathrm{w}_i$ для всех $i\in I$. Меняя всевозможным образом семейство $(\mathrm{w}_i:i\in I)$, получим некоторую систему W' множеств w, удовлетворяющую условиям теоремы 2.10. Система окружений W' тоже определяет отношение секвенциальной равномерности R прямого произведения $(X,\ R)$ и может отличаться от полной системы открытых окружений W пространства $(X,\ R)$, причем $W'\subset W$. Фильтры в $X\times X$, имеющие базы W' и W соответственно, тоже могут быть различными.

Прямое произведение двух пространств $(X_1,\ R_1)$ и $(X_2,\ R_2)$ записывается в виде $(X_1,\ R_1)\times(X_2,\ R_2)$.

По аналогии с предложением 1.16 доказывается

Предложение 2.17. *Пусть (X, R) — прямое произведение конечного или счетного семейства пространств с секвенциальной равномерностью $((X_i, R_i) : i \in I)$, каждое из которых имеет конечную или счетную фундаментальную систему окружений. Тогда пространство (X, R) тоже имеет конечную или счетную фундаментальную систему окружений.* ▶

§ 4. Фундаментальные последовательности. Предкомпактные множества. Полные пространства с секвенциальной равномерностью

Определение 2.3. *В пространстве с секвенциальной равномерностью (X, R) последовательность $\hat{x}$ называется R-фундаментальной (короче — фундаментальной), если $(\hat{x}, \hat{x}') \in \in R$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$.*

Подпоследовательность фундаментальной последовательности фундаментальна.

Теорема 2.16. *Пусть (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, а V — некоторая система его окружений, определяющая отношение R. В (X, R) последовательность $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого $\mathrm{v} \in V$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $(x_n, x_m) \in \mathrm{v}$ для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$.*

◀ Пусть последовательность $\hat{x}$ фундаментальна в (X, R), а $\mathrm{v} \in V$. Предположим для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие натуральные числа $i_n \geqslant n$ и $j_n \geqslant n$, что $(x_{i_n}, x_{j_n}) \notin \mathrm{v}$. Тогда, очевидно, последовательности чисел i_n и j_n, $n \in \mathbb{N}$, с указанным свойством могут быть выбраны строго возрастающими. Поэтому $(\hat{x}', \hat{x}'') \notin R$ для $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{x}$ и $\hat{x}'' = (x_{j_n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{x}$. С другой стороны, в силу фундаментальности $\hat{x}$ имеем $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$, $(\hat{x}, \hat{x}'') \in R$ и, значит, $(\hat{x}', \hat{x}'') \in R$. Полученное противоречие доказывает существование такого $n_0 \in \mathbb{N}$, что $(x_n, x_m) \in \mathrm{v}$ для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$.

Пусть, обратно, последовательность $\hat{x}$ такая, что для каждого $\mathrm{v} \in V$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого $(x_n, x_m) \in \mathrm{v}$ при всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$. Рассмотрим произвольную ее подпоследовательность $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, $(x_n, x_{i_n}) \in \mathrm{v}$ для всех $n \geqslant n_0$. Поэтому $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$ и, значит, последовательность $\hat{x}$ фундаментальна. ▶

Предложение 2.18. *В пространстве с секвенциальной равномерностью (X, R) любая сходящаяся последовательность фундаментальна. Если же фундаментальная последователь-*

ность обладает сходящейся подпоследовательностью, то она сама сходится. Кроме того, если $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и одна из последовательностей $\hat{x}$, $\hat{y}$ фундаментальна, то другая тоже фундаментальна.

◀ Пусть последовательность $\hat{x}$ сходится и $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Очевидно, $\Lambda(\hat{x}) \cap \Lambda(\hat{x}') = \Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$, где Λ — операция предела пространства (X, R). Поэтому в силу теоремы 2.11 $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Значит, последовательность $\hat{x}$ фундаментальна.

Пусть фундаментальная последовательность $\hat{x}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{x}'$. Поскольку $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$, в силу теоремы 2.11 имеем $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x}') \neq \varnothing$, т. е. $\hat{x}$ сходится.

Пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$, а последовательность $\hat{x}$ фундаментальна. Рассмотрим произвольное $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$. Очевидно, $(\hat{x}', \hat{y}') \in R$. В силу фундаментальности $\hat{x}$ имеем $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Поэтому в силу симметричности и транзитивности отношения R последовательно получаем $(\hat{x}, \hat{y}') \in R$ и $(\hat{y}, \hat{y}') \in R$. Следовательно, последовательность $\hat{y}$ фундаментальна. ▶

Определение 2.4. *В пространстве с секвенциальной равномерностью (X, R) множество M называется R-предкомпактным (короче — предкомпактным), если любая последовательность в M обладает фундаментальной подпоследовательностью.*

Определение 2.5. *Пространство с секвенциальной равномерностью называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.*

Подмножество предкомпактного множества и объединение конечного числа предкомпактных множеств предкомпактны. Кроме того, секвенциально квазикомпактное множество предкомпактно, причем в случае полного пространства верно и обратное утверждение.

Если последовательность точек подпространства $(X_1, R_1) \subset \subset (X, R)$ R-фундаментальна, то она R_1-фундаментальна. Следовательно, если подмножество в X_1 R-предкомпактно, то оно R_1-предкомпактно. Кроме того, если (X_1, R_1) полно, а (X, R) имеет операцию предела Λ, то $\overline{X}_1 = X_1^+ = \bigcup\{\Lambda(\dot{x}) : x \in X_1\}$, а подпространство $(\overline{X}_1, R_1') \subset (X, R)$ полно. Очевидно, замкнутое подпространство полного пространства полно.

В прямом произведении (X, R) семейства пространств с секвенциальной равномерностью $((X_i, R_i) : i \in I)$ последовательность $\hat{x}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ последовательность $\hat{x}_i = pr_i(\hat{x})$ фундаментальна в (X_i, R_i). При этом (X, R) полно тогда и только тогда, когда каждое $(X_i,\, R_i)$ полно. Кроме того, если в $(X,\, R)$ множество M предкомпактно, то для каждого $i\in I$ проекция $pr_i(M)$ предкомпактна в $(X_i,\, R_i)$, а если I конечно или счетно, то из предкомпактности всех проекций $pr_i(M)$, $i\in I$, в соответствующих пространствах следует предкомпактность M в $(X,\, R)$.

Теорема 2.17. *Пусть Λ — равномерная операция предела в X, а R' и R'' — соответственно сильнейшее и слабейшее отношения секвенциальной равномерности, определяющие Λ. Тогда пространство $(X,\, R')$ полно, а $(X,\, R'')$ предкомпактно. Более того, каждая последовательность в $(X,\, R'')$ либо фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью. При этом если в пространстве с секвенциальной равномерностью $(X,\, R)$, имеющем операцию предела Λ, каждая последовательность либо фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью, то $R=R''$.*

◄ Рассмотрим фундаментальную в $(X,\, R')$ последовательность $\hat{x}=(x_1,\, x_2,\, \ldots)$ и докажем, что она сходится. Предположим $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{x}'=(x_{m_n}:n\in\mathbb{N})$, для которой $\Lambda(\dot{x}_{m_n})=\Lambda(\dot{x}_{m_1})$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда в силу указанного в теореме 1.3 свойства 4) операций предела имеет место $\Lambda(\hat{x}')=\Lambda(\dot{x}_{m_1})$ Значит, $\hat{x}'$ сходится и в силу предложения 2.18 $\hat{x}$ тоже сходится. Предположим теперь, что $\hat{x}$ не обладает указанного типа подпоследовательностью. Тогда $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{x}''=(x_{k_n}:n\in\mathbb{N})$, для которой множества $\Lambda(\dot{x}_{k_n})$, $n\in\mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Разобьем произвольным образом $\hat{x}''$ на две подпоследовательности $\hat{y}\prec\hat{x}''$ и $\hat{z}\prec\hat{x}''$. В силу фундаментальности $\hat{x}$ имеем $(\hat{y},\, \hat{z})\in R'$. Из приведенного в доказательстве теоремы 2.13 построения отношения R' следует существование такого $(\hat{y}',\, \hat{z}')\prec(\hat{y},\, \hat{z})$, что $\Lambda(\hat{y}')=\Lambda(\hat{z}')\neq\varnothing$ (с учетом следствия 1.1 это вытекает также из утверждения теоремы 2.13, что полная система окружений пространства $(X,\, R')$ совпадает с системой всех окрестностей диагонали $\Delta(X)$ в $(X,\, \Lambda)\times(X,\, \Lambda))$. Таким образом, фундаментальная последовательность $\hat{x}$ обладает сходящимися подпоследовательностями $\hat{y}'$, $\hat{z}'$ и поэтому она сама сходится.

Докажем, что в пространстве $(X,\, R'')$ каждая последовательность либо фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\hat{\xi}$ в $(X,\, R'')$, которая не фундаментальна и не обладает сходящейся подпоследовательностью. Обозначим через P_1 множество всех $(\hat{x},\, \hat{y})$, где $\hat{x}\prec\hat{\xi}$ и $\hat{y}\prec\hat{\xi}$. Очевидно, $P_1^{-1} = P_1$, $P_1^2 = P_1$, $P_1 \setminus R'' \neq \varnothing$ и $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{y}) = \varnothing$ для любого $(\hat{x}, \hat{y}) \in P_1$. Пусть $P = R'' \cup P_1$. Множество P обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1), 2), 4) и 5), а множество $P_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} P^n$ может не обладать лишь свойством 3). Обозначим через R_0 множество таких $(\hat{x}, \hat{y}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$ из P_0. Имеют место $R'' \subset P \subset P_0 \subset R_0$ и $R'' \neq P$. Множество R_0 обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—6) и, следовательно, определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности. Нетрудно убедиться, что $(\hat{x}, \dot{x}) \in R_0$ выполняется для $x \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in X$ тогда и только тогда, когда $x \in \Lambda(\hat{x})$. Поэтому отношение R_0 определяет в X операцию предела Λ. Однако это противоречит условию теоремы о том, что R'' есть слабейшее отношение секвенциальной равномерности, определяющее Λ. Следовательно, в (X, R'') каждая последовательность либо фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью. Отсюда вытекает также предкомпактность (X, R'').

Пусть в пространстве с секвенциальной равномерностью (X, R), имеющем операцию предела Λ, каждая последовательность либо фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью. Докажем, что тогда $R = R''$. Рассмотрим произвольные пары $(\hat{x}, \hat{y}) \in R''$ и $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$. Очевидно, существует такая пара $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$, что одна из последовательностей $\hat{x}''$ и $\hat{y}''$ либо сходится, либо не обладает сходящейся подпоследовательностью. Если $\hat{x}''$ или $\hat{y}''$ сходится, то в силу $(\hat{x}'', \hat{y}'') \in R''$ имеем $\Lambda(\hat{x}'') = \Lambda(\hat{y}'') \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $(\hat{x}'', \hat{y}'') \in R$. Если же одна из последовательностей $\hat{x}''$ и $\hat{y}''$ не обладает сходящейся подпоследовательностью, то в силу $(\hat{x}'', \hat{y}'') \in R''$ другая тоже не обладает сходящейся подпоследовательностью. Пусть $\hat{x}'' = (x_1'', x_2'', \ldots)$ и $\hat{y}'' = (y_1'', y_2'', \ldots)$. Рассмотрим последовательность $\hat{z} = (z_1, z_2, \ldots)$, где $z_{2n-1} = x_n''$ и $z_{2n} = y_n''$, $n \in \mathbb{N}$. По условию, $\hat{z}$ либо R-фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью. Однако второй случай не имеет места, так как $\hat{x}''$ и $\hat{y}''$ не обладают сходящимися подпоследовательностями. Поэтому последовательность $\hat{z}$ фундаментальна в (X, R). Отсюда в силу $\hat{x}'' \prec \hat{z}$ и $\hat{y}'' \prec \hat{z}$ следует, что $(\hat{x}'', \hat{y}'') \in R$. Таким образом, если $(\hat{x}, \hat{y}) \in R''$, то для каждой пары $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует пара $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$ из R. Но тогда $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и, значит, $R'' \subset R$. Учитывая также $R \subset R''$, получим $R = R''$. ▶

Следствие 2.4. *Если секвенциально равномерное пространство* (X, Λ) *секвенциально компактно, то существует лишь одно отношение секвенциальной равномерности* R *в* $X^{\mathbb{N}}$, *определяющее операцию предела* Λ. *При этом пространство* (X, R) *полно.* ▶

Из предложения 2.13 и теоремы 2.17 вытекает

Следствие 2.5. *Если отношение секвенциальной равномерности* R *в* $X^{\mathbb{N}}$ *определено конечной системой окружений в* $X\times X$, *то пространство* (X, R) *полно.* ▶

§ 5. Равномерные непрерывности

Определение 2.6. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ — *пространства с секвенциальной равномерностью, а* $G\subset X$. *Функция* $f: G\to Y$ *называется* $(R, \widetilde{R})$-*секвенциально равномерно непрерывной (короче — секвенциально равномерно непрерывной) на* $G'\subset G$, *если для любых* $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})\in G^{\mathbb{N}}$ *и* $\hat{x}'=(x'_n : n\in\mathbb{N})\in {G'}^{\mathbb{N}}$, *таких, что* $(\hat{x}, \hat{x}')\in R$, *последовательности* $\hat{y}=(f(x_n): n\in\mathbb{N})$ *и* $\hat{y}'=(f(x'_n): n\in\mathbb{N})$ *находятся в отношении* $(\hat{y}, \hat{y}')\in\widetilde{R}$. *При этом если функция* f *секвенциально равномерно непрерывна на* G, *то она просто называется секвенциально равномерно непрерывной.*

В прямом произведении (X, R) семейства пространств с секвенциальной равномерностью $((X_i, R_i): i\in I)$ отношение R является слабейшим отношением секвенциальной равномерности, при котором каждое проектирующее отображение $pr_i: X\to X_i$ (R, R_i)-секвенциально равномерно непрерывно.

Теорема 2.18. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ — *пространства с секвенциальной равномерностью,* $G\subset X$, *а* $\widetilde{V}$ — *некоторая система окружений пространства* $(Y, \widetilde{R})$, *определяющая отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$. *Функция* $f: G\to Y$ *секвенциально равномерно непрерывна на* $G'\subset G$ *тогда и только тогда, когда для каждого* $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ *существует такое окружение* u *пространства* (X, R), *что* $(f(x), f(x'))\in\widetilde{\mathrm{v}}$ *для всех* $(x, x')\in \mathrm{u}\cap(G\times G')$.

◀ Пусть функция f секвенциально равномерно непрерывна на G', а $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$. Обозначим через v множество тех $(x, x')\in G\times G'$, для которых $(f(x), f(x'))\in\widetilde{\mathrm{v}}$. Покажем, что множество $\mathrm{u}= =\mathrm{v}\cup((X\times X)\setminus(G\times G'))$ является окружением для пространства $(X,\,R)$. Рассмотрим произвольную последовательность пар $(x_n,\,x'_n)\in(X\times X)\backslash\mathrm{u}=(G\times G')\backslash\mathrm{v}$, $n\in\mathbb{N}$. Положим $y_n=f(x_n)$ и $y'_n=f(x'_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда $(y_n,\,y'_n)\notin\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и, значит, $(\hat{y},\,\hat{y}')\notin\widetilde{R}$ для $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}'=(y'_n:n\in\mathbb{N})$. Отсюда в силу секвенциально равномерной непрерывности f на G' следует, что $(\hat{x},\,\hat{x}')\notin R$, где $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{x}'=(x'_n:n\in\mathbb{N})$. Поэтому построенное множество u является окружением пространства $(X,\,R)$. При этом $(f(x),\,f(x'))\in\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $(x,\,x')\in\mathrm{u}\cap(G\times G')=\mathrm{v}$.

Пусть, обратно, для каждого $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ существует такое окружение u пространства $(X,\,R)$, что $(f(x),\,f(x'))\in\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех пар $(x,\,x')\in\mathrm{u}\cap(G\times G')$. Рассмотрим такие $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}'=(x'_n:n\in\mathbb{N})\in G'^{\mathbb{N}}$, что $(\hat{x},\,\hat{x}')\in R$. Обозначим $y_n=f(x_n)$ и $y'_n=f(x'_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Из $(\hat{x},\,\hat{x}')\in R$ следует, что каждое окружение u пространства $(X,\,R)$ содержит все $(x_n,\,x'_n)$, $n\in\mathbb{N}$, кроме конечного их числа. Но тогда в силу сделанного предположения каждое $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ содержит все $(y_n,\,y'_n)$, $n\in\mathbb{N}$, кроме конечного их числа. Отсюда следует, что $(\hat{y},\,\hat{y}')\in\widetilde{R}$, где $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}'=(y'_n:n\in\mathbb{N})$. Значит, функция f секвенциально равномерно непрерывна на G'. ▶

Предложение 2.19. *Пусть $(X,\,R)$ и $(Y,\,\widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, а $G\subset X$. Если функция $f:G\to Y$ секвенциально равномерно непрерывна на $M\subset G$, то она секвенциально непрерывна на $G\cap M^+$ и секвенциально равномерно непрерывна на любом таком $H\subset G$, что каждое $\hat{x}\in H^{\mathbb{N}}$ находится в отношении $(\hat{x},\,\hat{x}')\in R$ с некоторым $\hat{x}'\in M^{\mathbb{N}}$.* ▶

Теорема 2.19. *Пусть $(X,\,R)$ и $(Y,\,\widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, $G\subset X$, а $f:G\to Y$ — некоторая функция. Тогда*

а) если функция f секвенциально непрерывна на секвенциально компактном $H\subset G$, то она секвенциально равномерно непрерывна на $G\cap\overline{H}$;

б) если функция f секвенциально непрерывна, то она секвенциально равномерно непрерывна на каждом $M\subset G$, секвенциально квазикомпактном в подпространстве с носителем G.

◀ (а) Сначала докажем секвенциально равномерную непрерывность f на H. Пусть $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\xi}=(\xi_n:n\in\mathbb{N})\in H^{\mathbb{N}}$ такие, что $(\hat{x},\,\hat{\xi})\in R$, а $\hat{y}=(f(x_n):n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(f(\xi_n):n\in\mathbb{N})$. Докажем, что $(\hat{y}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. С этой целью достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}', \hat{\eta}') \prec (\hat{y}, \hat{\eta})$ существует $(\hat{y}'', \hat{\eta}'') \prec (\hat{y}', \hat{\eta}')$ из $\widetilde{R}$. Пусть $(\hat{x}', \hat{\xi}') \prec (\hat{x}, \hat{\xi})$ соответствует $(\hat{y}', \hat{\eta}')$. Поскольку H секвенциально компактно, существует такое $(\hat{x}'', \hat{\xi}'') \prec (\hat{x}', \hat{\xi}')$, что последовательность $\hat{\xi}''$ сходится к некоторой точке $x \in H$. Так как $(\hat{x}'', \hat{\xi}'') \in R$, то $\hat{x}''$ тоже сходится к x. Пусть $(\hat{y}'', \hat{\eta}'') \prec (\hat{y}', \hat{\eta}')$ соответствует $(\hat{x}'', \hat{\xi}'')$. В силу секвенциальной непрерывности f в точке x последовательности $\hat{y}''$ и $\hat{\eta}''$ сходятся к $f(x)$. Поэтому $(\hat{y}'', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$. Таким образом, $(\hat{y}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$ и, значит, функция f секвенциально равномерно непрерывна на H. Но тогда в силу утверждения е) теоремы 2.11 из предложения 2.19 вытекает секвенциально равномерная непрерывность f на $G \cap \overline{H}$.

Утверждение б) доказывается аналогично. ▶

Предложение 2.20. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, $G \subset X$, а функция $f : G \to Y$ секвенциально равномерно непрерывна на некотором $G' \subset G$. Тогда для фундаментальной последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в G' последовательность $(f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна, а для предкомпактного $M \subset G'$ множество $f(M)$ предкомпактно.* ▶

Определение 2.7. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные системы открытых окружений W и $\widetilde{W}$ соответственно, а $G \subset X$. Функция $f : G \to Y$ называется $(W, \widetilde{W})$-равномерно непрерывной на $G' \subset G$, если для каждого $\widetilde{\mathrm{w}} \in \widetilde{W}$ существует такое $\mathrm{w} \in W$, что $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{w}}$ для всех $(x, x') \in \mathrm{w} \cap (G \times G')$. При этом если функция f $(W, \widetilde{W})$-равномерно непрерывна на G, то она просто называется $(W, \widetilde{W})$-равномерно непрерывной.*

Понятие $(W, \widetilde{W})$-равномерной непрерывности функции, вообще говоря, не инвариантно относительно подпространств. Введем еще два понятия равномерной непрерывности функции, инвариантных относительно подпространств.

Определение 2.8. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, а $G \subset X$. Функция $f : G \to Y$ называется $(R, \widetilde{R})$-равномерно непрерывной (короче — равномерно непрерывной) на $G' \subset G$, если для каждого $X_1 \subset G$, имеющего непустое пересечение с G', и каждого открытого ок-*

ружения $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ *подпространства* $(Y_1, \widetilde{R}_1) \subset (Y, \widetilde{R})$ *с носителем* $Y_1 = f(X_1)$ *существует такое открытое окружение* w_1 *подпространства* $(X_1, R_1) \subset (X, R)$, *что* $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{w}}_1$ *для всех* $(x, x') \in \mathrm{w}_1 \cap (G \times G')$. *При этом если функция* f *равномерно непрерывна на* G, *то она просто называется равномерно непрерывной.*

Это определение эквивалентно следующему: функция $f: G \to Y$ называется $(R, \widetilde{R})$-равномерно непрерывной на $G' \subset G$, если для каждого $Y_1 \subset Y$, имеющего непустое пересечение с $f(G')$, и каждого открытого окружения $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ подпространства $(Y_1, \widetilde{R}_1) \subset (Y, \widetilde{R})$ существует такое открытое окружение w_1 подпространства $(X_1, R_1) \subset (X, R)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1)$, что $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{w}}_1$ для всех $(x, x') \in \mathrm{w}_1 \cap (G \times G')$.

Определение 2.9. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространства с секвенциальной равномерностью, а* $G \subset X$. *Функция* $f: G \to Y$ *называется* $(R, \widetilde{R})$*-усиленно равномерно непрерывной (короче — усиленно равномерно непрерывной) на* $G' \subset G$, *если для каждого* $G_1 \subset G$, *имеющего непустое пересечение с* G', *и каждого открытого окружения* $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ *подпространства* $(Y_1, \widetilde{R}_1) \subset (Y, \widetilde{R})$ *с носителем* $Y_1 = f(G_1)$ *существует такое открытое окружение* w_1 *подпространства* $(X_1, R_1) \subset (X, R)$ *с носителем* $X_1 = G_1 \cup (X \backslash G)$, *что* $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{w}}_1$ *для всех* $(x, x') \in \mathrm{w}_1 \cap (G \times G')$. *При этом если функция* f *усиленно равномерно непрерывна на* G, *то она просто называется усиленно равномерно непрерывной.*

Это определение эквивалентно следующему: функция $f: G \to Y$ называется $(R, \widetilde{R})$-усиленно равномерно непрерывной на $G' \subset G$, если для каждого $Y_1 \subset Y$, имеющего непустое пересечение с $f(G')$, и каждого открытого окружения $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ подпространства $(Y_1, \widetilde{R}_1) \subset (Y, \widetilde{R})$ существует такое открытое окружение w_1 подпространства $(X_1, R_1) \subset (X, R)$ с носителем $X_1 = f^{-1}(Y_1) \cup (X \backslash G)$, что $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{w}}_1$ для всех $(x, x') \in \mathrm{w}_1 \cap (G \times G')$.

Если функция $f: G \to Y$ $(R, \widetilde{R})$-усиленно равномерно непрерывна на $G' \subset G$, то она $(R, \widetilde{R})$-равномерно непрерывна на G' и $(W, \widetilde{W})$-равномерно непрерывна на G'.

Теорема 2.20. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные системы* *открытых окружений W и $\widetilde{W}$ соответственно, а $G' \subset G \subset X$. Если функция $f : G \to Y$ $(R, \widetilde{R})$-равномерно непрерывна на G' или $(W, \widetilde{W})$-равномерно непрерывна на G', то она $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывна на G'. Обратно, если функция f $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывна, то она $(R, \widetilde{R})$-равномерно непрерывна, причем в случае замкнутой области определения G функция f $(R, \widetilde{R})$-усиленно равномерно непрерывна.*

◀ Пусть функция f $(R, \widetilde{R})$-равномерно непрерывна на G', а последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N}) \in G'^{\mathbb{N}}$ такие, что $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Положим $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y}' = (f(x'_n) : n \in \mathbb{N}) \in G'^{\mathbb{N}}$. Пусть $Y_1 = f(G)$, а $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ — открытое окружение подпространства $(Y_1, \widetilde{R}_1) \subset (Y, \widetilde{R})$. По условию, существует такое открытое окружение w_1 подпространства $(G, R') \subset (X, R)$, что $(f(x_n), f(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{w}}_1$ для всех $(x, x') \in \mathrm{w}_1 \cap (G \times G')$. Поскольку $(x_n, x'_n) \in G \times G'$ для всех $n \in \mathbb{N}$, из $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$ следует, что $(\hat{x}, \hat{x}') \in R'$. Поэтому w_1, а следовательно, и $\mathrm{w}_1 \cap (G \times G')$ содержат все (x_n, x'_n), $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного их числа. Но тогда $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ содержит все $(f(x_n), f(x'_n))$, $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного их числа. Однако в силу теоремы 2.12 полная система открытых окружений подпространства $(Y_1, \widetilde{R}_1)$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}_1$. Поэтому $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}_1$ и, следовательно, $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$. Значит, функция f $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывна на G'.

Аналогично доказывается, что если функция f $(W, \widetilde{W})$-равномерно непрерывна на G', то она $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывна на G'.

Пусть, обратно, функция f $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывна. Рассмотрим произвольное непустое подмножество $X_1 \subset G$ и произвольное открытое окружение $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ подпространства $(Y_1, \widetilde{R}_1) \subset (Y, \widetilde{R})$ с носителем $Y_1 = f(X_1)$. Обозначим через w_1 множество тех $(x, x') \in X_1 \times X_1$, для которых $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{w}}_1$. Покажем, что w_1 является открытым окружением подпространства $(X_1, R_1) \subset (X, R)$. С этой целью рассмотрим последовательность точек $(x_n, x'_n) \in (X_1 \times X_1) \setminus \mathrm{w}_1$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к $(x_0, x'_0) \in X_1 \times X_1$ в $(X_1, R_1) \times (X_1, R_1)$. Обозначим $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = f(x'_0)$ и $y_n = f(x_n)$, $y'_n = f(x'_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим также последовательности $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$, $\hat{x}'=(x'_n : n\in\mathbb{N})$, $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}'=(y'_n : n\in\mathbb{N})$. Имеем, что $(\hat{x},\, \dot{x}_0)\in R$ и $(\hat{x}',\, \dot{x}'_0)\in R$. Отсюда в силу $(R,\, \widetilde{R})$-секвенциально равномерной непрерывности f получаем $(\hat{y},\, \dot{y}_0)\in\widetilde{R}$ и $(\hat{y}',\, \dot{y}'_0)\in\widetilde{R}$. Следовательно, в $(Y_1,\, \widetilde{R}_1)$ последовательности $\hat{y}$ и $\hat{y}'$ сходятся соответственно к y_0 и y'_0. Но тогда в $(Y_1,\, \widetilde{R}_1)\times(Y_1,\, \widetilde{R}_1)$ последовательность пар $(\hat{y}_n,\, \hat{y}'_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к $(y_0,\, y'_0)$. Однако $(y_n,\, y'_n)\notin\widetilde{\mathrm{w}}_1$, $n\in\mathbb{N}$, и, кроме того, $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ является открытым окружением. Поэтому $(y_0,\, y'_0)\notin\widetilde{\mathrm{w}}_1$ и, значит, $(x_0,\, x'_0)\notin\mathrm{w}_1$. Отсюда следует, что w_1 является открытой окрестностью диагонали $\Delta(X_1)$ в $(X_1,\, R_1)\times(X_1,\, R_1)$. Теперь докажем, что w_1 является окружением подпространства $(X_1,\, R_1)$. Для любой последовательности пар $\bigl(x_1^{(n)},\, x_2^{(n)}\bigr)\in(X_1\times X_1)\backslash\mathrm{w}_1$, $n\in\mathbb{N}$, имеем $\bigl(y_1^{(n)},\, y_2^{(n)}\bigr)\in(Y_1\times Y_1)\backslash\widetilde{\mathrm{w}}_1$, $n\in\mathbb{N}$, где $y_i^{(n)}=f\bigl(x_i^{(n)}\bigr)$, $i=1,\, 2$. Положим $\hat{x}_i=\bigl(x_i^{(n)} : n\in\mathbb{N}\bigr)$ и $\hat{y}_i=\bigl(y_i^{(n)} : n\in\mathbb{N}\bigr)$, $i=1,\, 2$. Очевидно, $(\hat{y}_1,\, \hat{y}_2)\notin\widetilde{R}_1$ и, значит, $(\hat{y}_1,\, \hat{y}_2)\notin\widetilde{R}$. Отсюда в силу $(R,\, \widetilde{R})$-секвенциально равномерной непрерывности f следует, что $(\hat{x}_1,\, \hat{x}_2)\notin R$ и, значит, $(\hat{x}_1,\, \hat{x}_2)\notin R_1$. Поэтому w_1 является открытым окружением подпространства $(X_1,\, R_1)$. Учитывая, что $(f(x),\, f(x'))\in\widetilde{\mathrm{w}}_1$ для всех $(x,\, x')\in\mathrm{w}_1$, получим $(R,\, \widetilde{R})$-равномерную непрерывность функции f.

Предположим теперь, что функция f $(R,\, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывна и ее область определения G замкнута в $(X,\, R)$. Рассмотрим произвольное $Y_1\subset Y$, имеющее непустое пересечение с $f(G)$, и произвольное открытое окружение $\widetilde{\mathrm{w}}_1$ подпространства $(Y_1,\, \widetilde{R}_1)\subset(Y,\, \widetilde{R})$. Обозначим через v множество таких $(x,\, x')\in G\times G'$, что $(f(x),\, f(x'))\in\widetilde{\mathrm{w}}_1$. Положим $X_1= =f^{-1}(Y_1)\cup(X\backslash G)$ и $\mathrm{w}_1=\mathrm{v}\cup((X_1\times X_1)\backslash(G\times G))$. Докажем, что множество w_1 является открытым окружением подпространства $(X_1,\, R_1)\subset(X,\, R)$. С этой целью рассмотрим произвольную сходящуюся в $(X_1,\, R_1)\times(X_1,\, R_1)$ последовательность пар $(x_n,\, x'_n)\in(X_1\times X_1)\backslash\mathrm{w}_1=(X_1\times X_1)\cap(G\times G)\backslash\mathrm{v}$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть пара $(x_0,\, x'_0)\in X_1\times X_1$ есть предел указанной последовательности. В силу замкнутости $G\times G$ в $(X,\, R)\times(X,\, R)$ имеем, что $(x_0,\, x'_0)\in$ $\in(X_1\times X_1)\cap(G\times G)$. Используя $(R,\, \widetilde{R})$-секвенциально равномерную непрерывность f и повторяя сделанные выше рассуждения, получим, что $(x_0,\, x'_0)\notin\mathrm{v}$. Поэтому $(x_0,\, x'_0)\notin\mathrm{w}_1$ и, значит, w_1 открыто в $(X_1,\, R_1)\times(X_1,\, R_1)$. При помощи сделанных выше рассуждений легко доказывается также то, что w_1 является окружением подпространства (X_1, R_1). Однако для открытого окружения w_1 подпространства (X_1, R_1) имеем, что $(f(x), f(x'))\in\widetilde{\mathrm{w}}_1$ для всех $(x, x')\in \mathrm{w}_1\cap(G\times G)=\mathrm{v}$. Значит, функция f $(R, \widetilde{R})$-усиленно равномерно непрерывна. ▶

Предложение 2.21. *Пусть $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а f — отображение множества X в Y. Тогда существует слабейшее отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$, при котором f секвенциально равномерно непрерывно. При этом R есть множество всех пар $(\hat{x}, \hat{\xi})$ таких последовательностей $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}=(\xi_n : n\in\mathbb{N})$ в X, что $(\hat{y}, \hat{\eta})\in\widetilde{R}$ для $\hat{y}=(f(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(f(\xi_n) : n\in\mathbb{N})$. Кроме того, полная система окружений пространства (X, R) есть фильтр в $X\times X$, для которого в качестве базы служит система всех $\mathrm{u}\subset X\times X$, каждое из которых получается из некоторого окружения $\widetilde{\mathrm{u}}$ пространства $(Y, \widetilde{R})$ с помощью равенства*

$$\mathrm{u} = \{(x, \xi)\in X\times X : (f(x), f(\xi))\in\widetilde{\mathrm{u}}\} = \bigcup_{(y,\,\eta)\in\widetilde{\mathrm{u}}} f^{-1}(y)\times f^{-1}(\eta). \tag{1}$$

◀ Легко проверяется, что указанное в предложении подмножество $R\subset X^{\mathbb{N}}\times X^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.9 и, следовательно, определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности. Непосредственно из определения R следует, что R является слабейшим отношением секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, при котором f секвенциально равномерно непрерывно.

Пусть $\widetilde{\mathrm{u}}$ — окружение пространства $(Y, \widetilde{R})$, а $\mathrm{u}\subset X\times X$ — подмножество, определенное равенством (1). Докажем, что u является окружением пространства (X, R). Рассмотрим произвольную последовательность пар $(x_n, \xi_n)\in(X\times X)\setminus\mathrm{u}$, $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, $(f(x_n), f(\xi_n))\notin\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому $(\hat{y}, \hat{\eta})\notin\widetilde{R}$ для $\hat{y}=(f(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(f(\xi_n) : n\in\mathbb{N})$. Но тогда, согласно определению R, $(\hat{x}, \hat{\xi})\notin R$ для $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}=(\xi_n : n\in\mathbb{N})$. Поэтому u является окружением для (X, R).

Пусть, обратно, u_0 является окружением пространства (X, R). Обозначим через u множество таких $(x, \xi)\in\mathrm{u}_0$, что $f^{-1}(f(x))\times f^{-1}(f(\xi))\subset\mathrm{u}_0$. Докажем, что u является окружением пространства (X, R). Предположим противное. Тогда найдется такая последовательность пар $(x_n, \xi_n)\in(X\times X)\setminus\mathrm{u}$, $n\in\mathbb{N}$, что

$(\hat{x}, \hat{\xi}) \in R$ для $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$. Согласно определению u, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $(x'_n, \xi'_n) \in (X \times X) \setminus \mathrm{u}_0$, что $f(x'_n) = f(x_n)$ и $f(\xi'_n) = f(\xi_n)$. Отсюда, согласно определению R, получаем $(\hat{x}', \hat{\xi}') \in R$ для $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi}' = (\xi'_n : n \in \mathbb{N})$, так как $(\hat{y}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$ для $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N}) = (f(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (f(\xi_n) : n \in \mathbb{N}) = (f(\xi'_n) : n \in \mathbb{N})$. С другой стороны, $(\hat{x}', \hat{\xi}') \notin R$, так как $(x'_n, \xi'_n) \notin \mathrm{u}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает, что u является окружением пространства (X, R). Теперь докажем, что множество $\widetilde{\mathrm{u}} = \{(f(x), f(\xi)) : (x, \xi) \in \mathrm{u}\}$ является окружением пространства $(Y, \widetilde{R})$. Рассмотрим произвольную последовательность пар $(y_n, \eta_n) \in (Y \times Y) \setminus \widetilde{\mathrm{u}}$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем некоторые точки $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $\xi_n \in f^{-1}(\eta_n)$ и рассмотрим также последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$. Из определения множества u следует, что $f^{-1}(f(x)) \times f^{-1}(f(\xi)) \subset \mathrm{u}$ для всех $(x, \xi) \in \mathrm{u}$. Поэтому $(x_n, \xi_n) \in (X \times X) \setminus \mathrm{u}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, значит, $(\hat{x}, \hat{\xi}) \notin R$. Но тогда, согласно определению R, $(\hat{y}, \hat{\eta}) \notin \widetilde{R}$ для $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N}) = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N}) = (f(\xi_n) : n \in \mathbb{N})$. Это означает, что $\widetilde{\mathrm{u}}$ является окружением пространства $(Y, \widetilde{R})$. Очевидно, u получается из $\widetilde{\mathrm{u}}$ с помощью равенства (1), причем $\mathrm{u} \subset \mathrm{u}_0$. ▶

Следствие 2.6. *Пусть $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, f — отображение множества X в Y, а R — слабейшее отношение секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, при котором f секвенциально равномерно непрерывно. Если каждое окружение $\widetilde{\mathrm{u}}$ пространства $(Y, \widetilde{R})$ содержит такое окружение $\widetilde{\mathrm{v}}$, что $\widetilde{\mathrm{v}}^2 \subset \widetilde{\mathrm{u}}$, то каждое окружение u пространства (X, R) тоже содержит окружение v, для которого $\mathrm{v}^2 \subset \mathrm{u}$. При этом если $(Y, \widetilde{R})$ имеет конечную (счетную) фундаментальную систему окружений, то (X, R) тоже имеет конечную (счетную) фундаментальную систему окружений.* ▶

По аналогии с предложением 1.48 легко можно доказать, что если (X, Λ) — пространство с операцией предела, а f — отображение X в множество Y, то существует сильнейшая равномерная операция предела $\widetilde{\Lambda}$ в Y, при которой f секвенциально непрерывно. Если же (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, то существует сильнейшее отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$ в $Y^{\mathbb{N}}$, при которой f секвенциально равномерно непрерывно. Это доказывается как следующее

Предложение 2.22. *Пусть $(X,\, R)$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а f — отображение X на множество Y. Тогда существует сильнейшее отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$ в $Y^{\mathbb{N}}$, при котором f секвенциально равномерно непрерывно. Если каждое окружение* u *пространства $(X,\, R)$ содержит такое окружение* v, *что* $\mathrm{v}^2\subset \mathrm{u}$, *то полная система окружений пространства $(Y,\, \widetilde{R})$ есть система всех $\widetilde{\mathrm{u}}\subset Y\times Y$, каждое из которых получается из некоторого окружения* u *пространства $(X,\, R)$ с помощью равенства*

$$\widetilde{\mathrm{u}}=\{(f(x),\, f(\xi)) : (x,\, \xi)\in \mathrm{u}\}, \tag{2}$$

причем каждое окружение $\widetilde{\mathrm{u}}$ пространства $(Y,\, \widetilde{R})$ содержит такое окружение $\widetilde{\mathrm{v}}$, что $\widetilde{\mathrm{v}}^2\subset \widetilde{\mathrm{u}}$. Если же $(X,\, R)$ имеет конечную (счетную) фундаментальную систему окружений, то $(Y,\, \widetilde{R})$ имеет конечную (конечную или счетную) фундаментальную систему окружений.

◀ Обозначим через E множество всех таких отношений секвенциальной равномерности R' в $Y^{\mathbb{N}}$, для которых отображение f $(R,\, R')$-секвенциально равномерно непрерывно. Очевидно, $Y^{\mathbb{N}}\times Y^{\mathbb{N}}\in E$. Поэтому $E\neq\varnothing$. Положим $\widetilde{R}=\bigcap\limits_{R'\in E} R'$. Легко проверить, что подмножество $\widetilde{R}\subset Y^{\mathbb{N}}\times Y^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.9 и, значит, определяет отношение секвенциальной равномерности в $Y^{\mathbb{N}}$. Пусть $(\hat{x},\, \hat{\xi})\in R$, где $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}=(\xi_n : n\in\mathbb{N})$. Рассмотрим пару $(\hat{y},\, \hat{\eta})$ последовательностей $\hat{y}=(f(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(f(\xi_n) : n\in\mathbb{N})$ в Y. Для каждого $R'\in E$ в силу $(R,\, R')$-секвенциально равномерной непрерывности f имеем $(\hat{y},\, \hat{\eta})\in R'$. Поэтому $(\hat{y},\, \hat{\eta})\in\widetilde{R}$ и, следовательно, отображение f $(R,\, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывно, т. е. $\widetilde{R}\in E$. Из определения $\widetilde{R}$ ясно, что оно является сильнейшим отношением секвенциальной равномерности в $Y^{\mathbb{N}}$, при котором отображение f $(R,\, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывно.

Пусть каждое окружение u пространства $(X,\, R)$ содержит такое окружение v, что $\mathrm{v}^2\subset \mathrm{u}$, а $\widetilde{U}$ — система всех $\widetilde{\mathrm{u}}\subset Y\times Y$, каждое из которых получается из некоторого окружения u пространства $(X,\, R)$ с помощью равенства (2). Очевидно, что если $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$, то $\Delta(Y) \subset \widetilde{\mathrm{u}}$ и $\widetilde{\mathrm{u}}^{-1} \in \widetilde{U}$. Кроме того, в силу условия, наложенного на полную систему окружений U пространства (X, R), каждое $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ содержит такое $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{U}$, что $\widetilde{\mathrm{v}}^2 \subset \widetilde{\mathrm{u}}$. Поэтому $\widetilde{U}$ является системой окружений в $Y \times Y$, определяющей некоторое отношение секвенциальной равномерности R' в $Y^{\mathbb{N}}$. Пусть $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in R$, где $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$. Рассмотрим пару $(\hat{y}, \hat{\eta})$ последовательностей $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (f(\xi_n) : n \in \mathbb{N})$ в Y. Так как последовательность пар (x_n, ξ_n), $n \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом $\mathrm{u} \in U$, то в силу определения $\widetilde{U}$ последовательность пар $(f(x_n), f(\xi_n))$, $n \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$. Поэтому $(\hat{y}, \hat{\eta}) \in R'$ и, следовательно, отображение f (R, R')-секвенциально равномерно непрерывно. Отсюда в силу теоремы 2.18 вытекает, что каждое окружение $\widetilde{\mathrm{u}}$ пространства (Y, R') получается из некоторого $\mathrm{u} \in U$ с помощью равенства (2). А это означает, что $\widetilde{U}$ является полной системой окружений пространства (Y, R'). Из определения $\widetilde{R}$ следует, что $\widetilde{R} \subset R'$. Однако в силу теоремы 2.18 и $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерной непрерывности f каждое окружение $\widetilde{\mathrm{u}}$ пространства $(Y, \widetilde{R})$ тоже получается из некоторого $\mathrm{u} \in U$ с помощью равенства (2). Поэтому полная система окружений пространства $(Y, \widetilde{R})$ содержится в $\widetilde{U}$. Отсюда следует, что $R' \subset \widetilde{R}$ и, значит, $R' = \widetilde{R}$.

Если фильтр U имеет конечную (счетную) базу, то в силу предложений 2.13 и 2.16 каждое $\mathrm{u} \in U$ содержит такое $\mathrm{v} \in U$, что $\mathrm{v}^2 \subset \mathrm{u}$. Поэтому фильтр $\widetilde{U}$ является полной системой окружений пространства $(Y, \widetilde{R})$ и, очевидно, имеет конечную (конечную или счетную) базу. ►

§ 6. Фактор-пространство секвенциально равномерного пространства. Фактор-пространство пространства с секвенциальной равномерностью

1. Пусть (X, Λ) — секвенциально равномерное пространство. Определим в X отношение эквивалентности, считая две точки x и y из X эквивалентными, если $\Lambda(\dot{x}) = \Lambda(\dot{y})$. Обозначим через $\varPhi$ разбиение X, порожденное этим отношением эквивалентности. В силу теоремы 2.13 $\varPhi = \{\Lambda(\dot{x}) : x \in X\}$, а для любой сходящейся в (X, Λ) последовательности $\hat{x}$ множество $\Lambda(\hat{x})$ является элементом из $\varPhi$. Пусть $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N}) \in \varPhi^{\mathbb{N}}$. Выберем некоторые

$x_n \in \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, и рассмотрим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$. Обозначим через $\hat{\Phi}$ множество тех $\hat{\varphi} \in \Phi^{\mathbb{N}}$, для каждого из которых выбранная последовательность $\hat{x}$ сходится в (X, Λ). Множество $\hat{\Phi}$ не зависит от выбора $\hat{x}$. Действительно, для данного $\hat{\varphi}$ вместе с $\hat{x}$ рассмотрим другую последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ точек $y_n \in \varphi_n$. Пусть R — отношение секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, определяющее в X операцию предела Λ. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из равенств $\Lambda(\dot{x}_n) = \Lambda(\dot{y}_n) = \varphi_n$ следует, что $(\dot{x}_n,\, \dot{y}_n) \in R$. Поэтому в силу указанного в теореме 2.9 свойства 4) отношений секвенциальной равномерности имеем $(\hat{x},\, \hat{y}) \in R$. Но тогда в силу теоремы 2.11 $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{y})$ и, значит, множество $\hat{\Phi}$ определено корректно. Отображение $\widetilde{\lambda} : \hat{\Phi} \to \Phi$ определим следующим образом. Для $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N}) \in \hat{\Phi}$ выберем некоторые $x_n \in \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $\widetilde{\lambda}(\hat{\varphi}) = \varphi = \Lambda(\hat{x})$, где $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$. Очевидно, это определение $\widetilde{\lambda}$ корректно, т. е. не зависит от выбора $\hat{x}$. Легко проверяется, что $\widetilde{\lambda}$ обладает указанными в теореме 1.5 свойствами и, следовательно, является операцией однозначного предела в Φ. Построенное пространство $(\Phi,\, \widetilde{\lambda})$ называется *фактор-пространством* секвенциально равномерного пространства (X, Λ). При этом отображение $\pi : X \to \Phi$, сопоставляющее каждому $x \in X$ элемент $\varphi \in \Phi$, для которого $x \in \varphi$, т. е. $\pi(x) = \Lambda(\dot{x}) = \varphi$, называется *фактор-отображением.* Непосредственно из определения $\widetilde{\lambda}$ следует, что $\widetilde{\lambda}$ является сильнейшей операцией предела в Φ, при которой фактор-отображение π секвенциально непрерывно.

Пусть $(U_x : x \in X)$ — семейство полных систем окрестностей секвенциально равномерного пространства $(X,\, \Lambda)$. В силу теоремы 2.11 каждая окрестность точки $x \in X$ является окрестностью множества $\Lambda(\dot{x}) = \varphi \in \Phi$. Поэтому в силу теоремы 1.72 в фактор-пространстве $(\Phi,\, \widetilde{\lambda})$ полная система $\widetilde{U}_\varphi$ окрестностей точки $\varphi \in \Phi$ есть множество всех $\widetilde{u} \subset \Phi$, прообраз $\pi^{-1}(\widetilde{u})$ каждого из которых является окрестностью некоторого $x \in \varphi$ в $(X,\, \Lambda)$. Кроме того, $\widetilde{U}_\varphi$ есть система всех множеств $\pi(u)$, где u — окрестность некоторой точки $x \in \varphi$. Секвенциальная топология $\widetilde{\tau}$ в $(\Phi,\, \widetilde{\lambda})$ есть система всех $\widetilde{v} \subset \Phi$, для которых $\pi^{-1}(\widetilde{v}) \in \tau$, где τ — секвенциальная топология пространства $(X,\, \Lambda)$. Заметим, что $v = \pi^{-1}(\pi(v))$ для любого $v \in \tau$. Поэтому в рассматриваемом случае $\widetilde{\tau} = \{\pi(v) : v \in \tau\}$. Значит, фактор-отображение π открыто.

2. Введем теперь понятие фактор-пространства пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\,R)$, имеющего операцию предела Λ. Пусть, как и выше, $\Phi=\{\Lambda(\dot{x}):x\in X\}$. Рассмотрим множество $\widetilde{R}$ таких пар $(\hat{\varphi},\,\hat{\psi})$ последовательностей $\hat{\varphi}=(\varphi_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\psi}=(\psi_n:n\in\mathbb{N})$ в Φ, что $(\hat{x},\,\hat{y})\in R$ для последовательностей $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ некоторых $x_n\in\varphi$ и $y_n\in\psi_n$. Очевидно, $\widetilde{R}$ не зависит от выбора $\hat{x}$ и $\hat{y}$. Легко проверяется, что $\widetilde{R}$ обладает указанными в теореме 2.9 свойствами и, следовательно, определяет в $\Phi^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности. Построенное пространство с секвенциальной равномерностью $(\Phi,\,\widetilde{R})$ называется *фактор-пространством* пространства $(X,\,R)$. Если $\widetilde{\lambda}$ — операция предела фактор-пространства $(\Phi,\,\widetilde{R})$, то пространство с операцией предела $(\Phi,\,\widetilde{\lambda})$ является фактор-пространством секвенциально равномерного пространства $(X,\,\Lambda)$. Из определения $\widetilde{R}$ следует, что оно является сильнейшим отношением секвенциальной равномерности в $\Phi^{\mathbb{N}}$, при котором фактор-отображение $\pi:X\to\Phi$ $(R,\,\widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывно.

Последовательность $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ в $(X,\,R)$ фундаментальна тогда и только тогда, когда в фактор-пространстве $(\Phi,\,\widetilde{R})$ фундаментальна последовательность $\hat{\varphi}=(\varphi_n:n\in\mathbb{N})$ элементов $\varphi_n=\pi(x_n)$. Пространство $(X,\,R)$ полно тогда и только тогда, когда полно $(\Phi,\,\widetilde{R})$. Кроме того, в $(X,\,R)$ множество M предкомпактно тогда и только тогда, когда $\pi(M)$ предкомпактно в $(\Phi,\,\widetilde{R})$. Если U и $\widetilde{U}$ — полные системы окружений пространств $(X,\,R)$ и $(\Phi,\,\widetilde{R})$ соответственно, то для любого $\mathrm{u}\in U$ множество $\{(\pi(x),\,\pi(y)):(x,\,y)\in\mathrm{u}\}$ является окружением из $\widetilde{U}$, а для любого $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ множество $\{(x,\,y)\in X\times X:(\pi(x),\,\pi(y))\in\widetilde{\mathrm{u}}\}$ является окружением из U. Такая же связь есть между полными системами открытых окружений W и $\widetilde{W}$ этих пространств, причем для любого $\mathrm{w}\in W$ множество $\{(\varphi,\,\psi)\in\Phi\times\Phi:\pi^{-1}(\varphi)\times\pi^{-1}(\psi)\subset\mathrm{w}\}$ является открытым окружением из $\widetilde{W}$ и совпадает с множеством $\{(\pi(x),\,\pi(y)):(x,\,y)\in\mathrm{w}\}$.

Пространство с секвенциальной равномерностью имеет конечную (счетную) фундаментальную систему окружений тогда и только тогда, когда его фактор-пространство имеет конечную (счетную) фундаментальную систему окружений.

§ 7. Пополнение пространства с секвенциальной равномерностью

Определение 2.10. *Будем говорить, что пространство с секвенциальной равномерностью* (X, R) *изоморфно пространству с секвенциальной равномерностью* (X', R')*, если существует секвенциально равномерно непрерывное биективное отображение* $f: X \to X'$*, имеющее секвенциально равномерно непрерывное обратное отображение* f^{-1}*. При этом* f *называется равномерным изоморфизмом* (X, R) *на* (X', R')*.*

Определение 2.11. *Пополнением неполного пространства с секвенциальной равномерностью* (X, R) *называется всякое полное пространство с секвенциальной равномерностью* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$*, удовлетворяющее условиям*

1) $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ *содержит секвенциально всюду плотное подпространство* $(\widetilde{X}_0, \widetilde{R}_0)$*, изоморфное* (X, R)*;*

2) последовательности $\hat{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ *и* $\hat{y}' = (y_1', y_2', \ldots)$ *точек из* $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \setminus \widetilde{X}_0$ *находятся в отношении* $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$ *тогда и только тогда, когда* $y_n = y_n'$ *для всех* $n \geqslant m$ *при некотором* $m \in \mathbb{N}$*;*

3) если $\hat{y}_0 \in \widetilde{X}_0^{\mathbb{N}}$*,* $\hat{y}_1 \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ *и* $(\hat{y}_0, \hat{y}_1) \in \widetilde{R}$*, то множество* $[\hat{y}_1]$ *конечно;*

4) в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ *множество пределов каждой сходящейся последовательности целиком содержится либо в* $\widetilde{X}_0$*, либо в* $\widetilde{X}_1$*.*

В дальнейшем, говоря о пополнении $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ пространства с секвенциальной равномерностью $(X, R) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$, будем считать, что в качестве подпространства $(\widetilde{X}_0, \widetilde{R}_0) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$, о котором говорится в определении 2.11 , служит само пространство (X, R). Кроме того, полное пространство с секвенциальной равномерностью считается своим пополнением.

Предложение 2.23. *Пусть* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ *— пополнение неполного пространства с секвенциальной равномерностью* $(X, R) \subset \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$*,* $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \setminus X$*, а* Λ *и* $\widetilde{\Lambda}$ *— операции предела пространств* (X, R) *и* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ *соответственно. Тогда*

а) X *открыто, а произвольное* $M \subset \widetilde{X}_1$ *замкнуто в* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$*;*

б) если $\hat{y} \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$ *и* $\widetilde{X}_1 \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \neq \varnothing$*, то* $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ *— одноточечное множество, а, следовательно, если* $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ *и* $\Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$*, то* $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x})$*;*

в) если $(X,\, R)$ имеет операцию однозначного предела, то $\widetilde{\Lambda}$ тоже является операцией однозначного предела;

г) если $\widetilde{X}_1$ бесконечно, то $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ не имеет конечной или счетной фундаментальной системы окружений.

◀ (а) Пусть $\hat{x} \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$. Докажем, что $X \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{x}) = \varnothing$. Предположим противное. Тогда существует $x \in X \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$. Так как $x \in X$ и $(\dot{x},\, \hat{x}) \in \widetilde{R}$, то, согласно условияю 3) определения 2.11, множество $[\hat{x}]$ конечно. Поэтому $\hat{x}$ обладает стационарной подпоследовательностью $\dot{x}' \prec \hat{x}$, где $x' \in \widetilde{X}_1$. Однако $(\dot{x},\, \dot{x}') \in \widetilde{R}$ и, значит, $x \in \widetilde{\Lambda}(\dot{x})$, $x' \in \widetilde{\Lambda}(\dot{x})$. А это противоречит условию 4) определения 2.11. Следовательно, $X \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{x}) = \varnothing$. Отсюда следует, что $\widetilde{X}_1$ замкнуто, а X открыто в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$. Из условия 2) определения 2.11 вытекает, что подпространство $(\widetilde{X}_1,\, \widetilde{R}_1) \subset (\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ имеет операцию однозначного предела, по которой сходятся лишь почти стационарные последовательности. Поэтому любое $M \subset \widetilde{X}_1$ замкнуто в $(\widetilde{X}_1,\, \widetilde{R}_1)$, а следовательно, и в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$, так как $\widetilde{X}_1$ замкнуто в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$.

(б) Пусть $\hat{y} \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$ и $\widetilde{X}_1 \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \neq \varnothing$. Рассмотрим произвольные точки y и y' из $\widetilde{X}_1 \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Имеем, что $(\dot{y},\, \dot{y}') \in \widetilde{R}$. Поэтому в силу условия 2) определения 2.11 $y = y'$. Отсюда следует, что $\widetilde{X}_1 \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ состоит из одной точки. Однако в силу условия 4) определения 2.11 $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \subset \widetilde{X}_1$ и, значит, $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ есть одноточечное множество.

(в) Пусть $(X,\, R)$ имеет операцию однозначного предела Λ. Рассмотрим сходящуюся в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ последовательность $\hat{y} \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$. Если $\widetilde{X}_1 \cap \widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \neq \varnothing$, то в силу б) $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ есть одноточечное множество. Если же $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \subset X$, то для произвольного $y \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ имеют место равенства $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) = \widetilde{\Lambda}(\dot{y}) = \Lambda(\dot{y}) = \{y\}$, т. е. $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ опять состоит из одной точки. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}$ является операцией однозначного предела.

(г) Пусть $\widetilde{X}_1$ бесконечно. Допустим $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ имеет фундаментальную систему окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{v}}_n : n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, можно считать $\widetilde{\mathrm{v}}_{n+1} \subset \widetilde{\mathrm{v}}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\hat{y} = (y^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ попарно различных точек множества $\widetilde{X}_1$. Согласно условию 1) определения 2.11, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность точек $x_i^{(n)} \in X$, $i \in \mathbb{N}$, сходящаяся в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ к $y^{(n)}$. Значит, для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность точек $\bigl(x_i^{(n)}, y^{(n)}\bigr)$, $i \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в любом окружении из $\widetilde{V}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $i_n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\bigl(x_{i_n}^{(n)}, y^{(n)}\bigr) \in \widetilde{\mathrm{v}}_n$. В силу $\widetilde{\mathrm{v}}_{k+1} \subset \widetilde{\mathrm{v}}_k$, $k \in \mathbb{N}$, последовательность точек $\bigl(x_{i_n}^{(n)}, y^{(n)}\bigr)$, $n \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении из $\widetilde{V}$. Поэтому $(\hat{x}, \hat{y}) \in \widetilde{R}$, где $\hat{x} = \bigl(x_{i_n}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\bigr)$. Отсюда в силу условия 3) определения 2.11 следует, что множество $[\hat{y}]$ конечно. Однако это противоречит выбору $\hat{y}$. Следовательно, $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ не имеет конечной или счетной фундаментальной системы окружений. ▶

Теорема 2.21. *Всякое неполное пространство с секвенциальной равномерностью* (X, R) *допускает пополнение, причем любые два его пополнения изоморфны.*

◀ В множестве всех фундаментальных в (X, R) последовательностей определим отношение эквивалентности, считая две фундаментальные последовательности $\hat{x}'$ и $\hat{x}''$ эквивалентными, если $(\hat{x}', \hat{x}'') \in R$. Обозначим через $\widetilde{X}_1$ множество полученных классов эквивалентности, не содержащих стационарные последовательности, а значит, и сходящиеся последовательности. Положим $\widetilde{X} = X \cup \widetilde{X}_1$. Тогда, очевидно, $R \subset \widetilde{X}^{\mathbb{N}} \times \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$. Пусть P_1 — множество всех $(\hat{x}, \dot{y})$ и $(\dot{y}, \hat{x})$, где $y \in \widetilde{X}_1$, а $\hat{x}$ — расходящаяся фундаментальная последовательность в (X, R), принадлежащая классу y. Положим $P = R \cup P_1 \cup \Delta(\widetilde{X}_1^{\mathbb{N}})$, где $\Delta(\widetilde{X}_1^{\mathbb{N}})$ — диагональ произведения $\widetilde{X}_1^{\mathbb{N}} \times \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$, т. е. множество всех пар $(\hat{y}, \hat{y})$, $\hat{y} \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$. Легко проверить, что подмножество $P \subset \widetilde{X}^{\mathbb{N}} \times \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$ обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1), 2), 5) и 6). Рассмотрим множество $\widetilde{R}$ таких $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}} \times \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{y}_1', \hat{y}_2') \prec (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ существует $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \prec (\hat{y}_1', \hat{y}_2')$ из P. Нетрудно убедиться, что $\widetilde{R}$ обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—6) и, следовательно, определяет в $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности. Очевидно, $\widetilde{R} \cap (X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}) = R$, а множество $\widetilde{R}_1 = \widetilde{R} \cap (\widetilde{X}_1^{\mathbb{N}} \times \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}})$ определяет в $\widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ сильнейшее отношение секвенциальной равномерности, т. е. последовательности $\hat{y}' = (y_n' : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y}'' = (y_n'' : n \in \mathbb{N})$ из $\widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ находятся в отношении $(\hat{y}', \hat{y}'') \in \widetilde{R}_1$ тогда и только тогда, когда $y_n' = y_n''$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Кроме того, последовательности $\hat{y}_0 \in X^{\mathbb{N}}$ и

$\hat{y}_1 \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ могут находиться в отношении $(\hat{y}_0, \hat{y}_1) \in \widetilde{R}$ лишь тогда, когда множество $[\hat{y}_1]$ конечно. При этом $(\dot{x}, \dot{y}) \notin \widetilde{R}$ для любых $x \in X$ и $y \in \widetilde{X}_1$, согласно построению $\widetilde{R}$. Отсюда следует, что в пространстве $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ множество пределов сходящейся последовательности целиком содержится либо в X, либо в $\widetilde{X}_1$.

Докажем, что пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ полно. Пусть $\widetilde{\Lambda}$ — его операция предела. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Если $\hat{y}$ обладает такой подпоследовательностью $\hat{y}' = (y_{m_n} : n \in \mathbb{N})$, что $\widetilde{\Lambda}(\dot{y}_{m_n}) = \widetilde{\Lambda}(\dot{y}_{m_1})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то в силу указанного в теореме 1.3 свойства 4) операций предела имеет место равенство $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}') = \widetilde{\Lambda}(\dot{y}_{m_1})$ и, значит, $\hat{y}'$ сходится. Поэтому $\hat{y}$ тоже сходится. Предположим, что $\hat{y}$ не обладает указанного типа подпоследовательностью. Тогда $\hat{y}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y}'' = (y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, для которой множества $\widetilde{\Lambda}(\dot{y}_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Заметим, что последовательность, составленная из попарно различных элементов множества $\widetilde{X}_1$, не фундаментальна в подпространстве $(\widetilde{X}_1, \widetilde{R}_1) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$, а значит, и в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Поэтому $\hat{y}''$ может содержать лишь конечное число членов из $\widetilde{X}_1$. Удалением из $\hat{y}''$ этих членов получаем подпоследовательность $\hat{x} \prec \hat{y}$ в X, которая фундаментальна в подпространстве $(X, R) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Если $\hat{x}$ сходится в (X, R), то сходится также в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ и, занчит, $\hat{y}$ тоже сходится в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Если же $\hat{x}$ не сходится в (X, R), то $\hat{x}$ принадлежит некоторому классу $y \in \widetilde{X}_1$. В этом случае $(\hat{x}, \dot{y}) \in P_1 \subset \widetilde{R}$. А это означает, что $y \in \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ и, следовательно, $\hat{y}$ сходится в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Тем самым полнота $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ доказана.

Таким образом, построенное пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ удовлетворяет всем условиям определения 2.11 с $(\widetilde{X}_0, \widetilde{R}_0) = (X, R)$ и, следовательно, является пополнением пространства (X, R).

Теперь докажем, что любое пополнение (X', R') пространства (X, R) изоморфно построенному пополнению $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Очевидно, без нарушения общности можно считать, что для пространства (X', R') в качестве секвенциально всюду плотного подпространства, о котором говорится в определении 2.11, служит (X, R). Рассмотрим подпространство $(X_1', R_1') \subset (X', R')$

с носителем $X_1' = X' \setminus X$. Для произвольного $z \in X_1'$ существует последовательность $\hat{x}$ в X, сходящаяся к z в (X', R'). В силу предложения 2.23 z является единственным пределом для $\hat{x}$. Последовательность $\hat{x}$ фундаментальна в (X', R'), а значит, и в (X, R). Но тогда она фундаментальна также в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ и в силу полноты $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ сходится к некоторому $y \in \widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \setminus X$, так как $\hat{x}$ не сходится в (X, R). При этом y является единственным пределом для $\hat{x}$ в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Заметим, что y не зависит от выбора последовательности $\hat{x}$ в X, сходящейся к z в (X', R'). Действительно, пусть $\hat{x}'$ — некоторая последовательность в X, сходящаяся к z в (X', R'). Тогда имеем $(\hat{x}, \dot{z}) \in R'$, $(\dot{z}, \hat{x}') \in R'$ и, значит, $(\hat{x}, \hat{x}') \in R'$. Отсюда получаем $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$ и $(\hat{x}, \hat{x}') \in \widetilde{R}$. Однако $(\dot{y}, \hat{x}) \in \widetilde{R}$ и поэтому $(\dot{y}, \hat{x}') \in \widetilde{R}$. Следовательно, $\hat{x}'$ сходится к y в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Сопоставляя каждому $z \in X_1'$ построенное указанным образом $y \in \widetilde{X}_1$, получим биективное отображение $f_1 : X_1' \to \widetilde{X}_1$. Определим биективное отображение $f : X' \to \widetilde{X}$, положив $f(z) = f_1(z)$ при $z \in X_1'$ и $f(z) = z$ при $z \in X$. Докажем, что отображение f $(R', \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывно. Рассмотрим произвольную пару $(\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in R'$ последовательностей $\hat{z}_i = (z_i^{(n)} : n \in \mathbb{N})$, $i = 1, 2$, в X'. Пусть $\hat{y}_i = (y_i^{(n)} : n \in \mathbb{N})$, $i = 1, 2$, где $y_i^{(n)} = f(z_i^{(n)})$. Покажем, что $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in \widetilde{R}$. Очевидно, достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}_1', \hat{y}_2') \prec (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$ существует $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \prec (\hat{y}_1', \hat{y}_2')$ из $\widetilde{R}$. Рассмотрим некоторое $(\hat{y}_1', \hat{y}_2') \prec$ $\prec (\hat{y}_1, \hat{y}_2)$. Существует $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \prec (\hat{y}_1', \hat{y}_2')$, для которого выполняется один из следующих случаев:

1) $\hat{y}_1'' \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y}_2'' \in X^{\mathbb{N}}$; 2) $\hat{y}_1'' \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y}_2'' \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$;

3) $\hat{y}_1'' \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y}_2'' \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$; 4) $\hat{y}_1'' \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y}_2'' \in X^{\mathbb{N}}$.

Пусть пара $(\hat{z}_1'', \hat{z}_2'') \prec (\hat{z}_1, \hat{z}_2)$ соответствует паре $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'')$. Очевидно, $(\hat{z}_1'', \hat{z}_2'') \in R'$. В первом случае $\hat{y}_1'' = \hat{z}_1''$, $\hat{y}_2'' = \hat{z}_2''$ и $(\hat{z}_1'', \hat{z}_2'') \in R$. Поэтому $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \in R$ и, следовательно, $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \in \widetilde{R}$. Во втором случае $\hat{z}_1''$ и $\hat{z}_2''$ являются последовательностями в X_1', причем каждый член последоавтельности $\hat{z}_1''$ совпадает с соответствующим членом последовательности $\hat{z}_2''$, начиная с некоторого номера. Но тогда этим свойством обладают также $\hat{y}_1''$ и $\hat{y}_2''$. Поэтому $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \in \widetilde{R}$. В третьем случае $\hat{y}_1'' = \hat{z}_1''$, а $\hat{z}_2''$ есть последовательность в X_1', для которой множество $[\hat{z}_2'']$ конечно.

Отсюда следует, что $[\hat{y}_2'']$ тоже конечно и, значит, $\hat{y}_2''$ обладает стационарной подпоследовательностью. Учитывая это, без нарушения общности можно считать, что $\hat{y}_2''$ и $\hat{z}_2''$ являются стационарными последовательностями в $\widetilde{X}_1$ и X_1' соответствнно. Пусть $\hat{z}_2'' = \dot{z}$ и $\hat{y}_2'' = \dot{y}$, где $z \in X_1'$ и $y = f(z)$. Из $(\hat{z}_1'', \dot{z}) \in R'$ следует, что $\hat{z}_1''$ сходится к z в (X', R'). Согласно построению отображения f, последовательность $\hat{y}_1''$ сходится к y в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Поэтому $(\hat{y}_1'', \dot{y}) \in \widetilde{R}$, т. е. $(\hat{y}_1'', \hat{y}_2'') \in \widetilde{R}$. В четвертом случае эта принадлежность доказывается аналогично. Тем самым $(\hat{y}_1, \hat{y}_2) \in \widetilde{R}$ и, значит, f секвенциально равномерно непрерывно. Аналогично доказывается секвенциально равномерная непрерывность обратного отображния f^{-1}. Следовательно, f является равномерным изоморфизмом (X', R') на $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. ▶

Из теоремы 2.17 вытекает

Предложение 2.24. *Пусть Λ — равномерная операция предела в множестве X, а R'' — слабейшее отношение секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, определяющее Λ. Если пространство (X, R'') не полно, а $(\widetilde{X}, \widetilde{R}'')$ — такое его пополнение, что $(X, R'') \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R}'')$, то множество $\widetilde{X} \backslash X$ одноточечно, а $(\widetilde{X}, \widetilde{R}'')$ секвенциально компактно.* ▶

Предложение 2.25. *Пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ — пополнение неполного пространства с секвенциальной равномерностью $(X, R) \subset \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$, имеющего такую систему окружений V, определяющую отношение секвенциальной равномерности R, что для каждого $\mathrm{v} \in V$ существуют $\mathrm{u} \in V$ и $\mathrm{w} \in V$, удовлетворяющие включениям $\mathrm{u}^2 \subset \mathrm{v}$ и $\mathrm{w}^{-1} \subset \mathrm{v}$. Тогда система $V' = \{\mathrm{v}^+ : \mathrm{v} \in V\}$, где квазизамыкание взято в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$, является такой системой окружений в $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$, что для каждого $\widetilde{\mathrm{v}} \in V'$ существуют $\widetilde{\mathrm{u}} \in V'$ и $\widetilde{\mathrm{w}} \in V'$, удовлетворяющие включениям $\widetilde{\mathrm{u}}^2 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ и $\widetilde{\mathrm{w}}^{-1} \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. При этом V' определяет в $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}$ такое отношение секвенциальной равномерности R', что*

а) $(X, R) \subset (\widetilde{X}, R')$ и $\widetilde{R} \subset R'$, причем если множество $\widetilde{X}_1 = = \widetilde{X} \backslash X$ конечно, то $R' = \widetilde{R}$;

б) в пространстве $(\widetilde{X}, R')$ множество пределов произвольной сходящейся последовательности $\hat{x}$ целиком содержится либо в X, либо в $\widetilde{X}_1$, причем $\hat{x}$ может иметь в $\widetilde{X}_1$ лишь один предел;

в) если Λ' *и* $\widetilde{\Lambda}$ *— операции предела пространств* $(\widetilde{X}, R')$ *и* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ *соответственно, то* $\Lambda'(\hat{x}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ *для всех* $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$*;*

г) если (X, R) *имеет операцию однозначного предела, то* $(\widetilde{X}, R')$ *и* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ *хаусдорфовы;*

д) если $(\widetilde{X}, R')$ *— пространство Фреше–Урысона, то таково и* $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$*.*

◀ Для $\mathrm{v} \in V$ выберем $\mathrm{u} \in V$ так, чтобы $\mathrm{u}^3 \subset \mathrm{v}$. Докажем, что $\mathrm{u}^+ \circ \mathrm{u}^+ \subset \mathrm{v}^+$ в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Пусть $(x, y) \in \mathrm{u}^+ \circ \mathrm{u}^+$. Тогда найдутся такое $z \in \widetilde{X}$, что $(x, z) \in \mathrm{u}^+$ и $(z, y) \in \mathrm{u}^+$, а также последовательности пар $(x_n, \xi_n) \in \mathrm{u}$ и $(\eta_n, y_n) \in \mathrm{u}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящиеся в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$ к (x, z) и (z, y) соответственно. Так как последовательности $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $\hat{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$ сходятся к z в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$, то $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$ и, значит, $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in R$. Отсюда следует существование такого $m \in \mathbb{N}$, что $(\xi_n, \eta_n) \in \mathrm{u}$ для всех $n \geqslant m$. Но тогда $(x_n, y_n) \in \mathrm{u}^3$ для всех $n \geqslant m$. Однако последовательность пар (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}$, сходится к (x, y) в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Поэтому $(x, y) \in (\mathrm{u}^3)^+ \subset \mathrm{v}^+$ и, значит, $\mathrm{u}^+ \circ \mathrm{u}^+ \subset \mathrm{v}^+$.

Очевидно, в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$ имеют место $\Delta(\widetilde{X}) \subset (\Delta(X))^+$ и $(H^+)^{-1} = (H^{-1})^+$ для любого $H \subset X \times X$. Однако для каждого $\mathrm{v} \in V$ имеет место $\Delta(X) \subset \mathrm{v}$ и существует такое $\mathrm{w} \in V$, что $\mathrm{w}^{-1} \subset \mathrm{v}$. Поэтому $\Delta(\widetilde{X}) \subset \mathrm{v}^+$ и $(\mathrm{w}^+)^{-1} \subset \mathrm{v}^+$.

Таким образом, для каждого $\widetilde{\mathrm{v}} \in V'$ имеет место $\Delta(\widetilde{X}) \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ и существуют такие $\widetilde{\mathrm{u}} \in V'$ и $\widetilde{\mathrm{w}} \in V'$, что $\widetilde{\mathrm{u}}^2 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ и $\widetilde{\mathrm{u}}^{-1} \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Поэтому система V' подмножеств в $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.10 и, следовательно, является системой окружений, определяющей некоторое отношение секвенциальной равномерности R' в $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}$.

(а) Докажем, что $(X, R) \subset (\widetilde{X}, R')$. Для каждого $\mathrm{v} \in V$ имеет место $(X \times X) \cap \mathrm{v}^+ = (\mathrm{v})_0^+$, где v^+ и $(\mathrm{v})_0^+$ — квазизамыкания окружения v в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$ и $(X, R) \times (X, R)$ соответственно. При этом существует такое $\mathrm{u} \in V$, что $\mathrm{u}^3 \subset \mathrm{v}$. В силу теоремы 2.14 $(\mathrm{u})_0^+ \subset \mathrm{u}^3 \subset \mathrm{v}$. Поэтому $\{(\mathrm{v})_0^+ : \mathrm{v} \in V\}$ является системой окружений в $X \times X$, определяющей отношение секвенциальной равномерности R, и индуцируется в $X \times X$ системой $V' = \{\mathrm{v}^+ : \mathrm{v} \in V\}$. Отсюда следует, что $R = R' \cap (X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}})$ и $(X, R) \subset (\widetilde{X}, R')$.

Докажем включение $\widetilde{R} \subset R'$. Рассмотрим пару $(\hat{x}, \hat{y}) \in \widetilde{R}$ последовательностей $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\hat{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ в $\widetilde{X}$. Если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, то $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и, значит, $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$. Если же $\hat{x} \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$, где $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \backslash X$, то $x_n = y_n$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Поэтому $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$. Пусть $\hat{x} \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$, а $\hat{y} = \dot{y}$ для некоторого $y \in \widetilde{X}_1$. Из $(\hat{x}, \dot{y}) \in \widetilde{R}$ следует, что последовательность $\hat{x}$ сходится к y в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ и, следовательно, фундаментальна в (X, R). Поэтому для каждого $\mathrm{v} \in V$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $(x_n, x_{n+k}) \in \mathrm{v}$ для всех $n \geqslant n_0$ и $k \in \mathbb{N}$. Однако для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность пар (x_n, x_{n+k}), $k \in \mathbb{N}$, сходится к (x_n, y) в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Но тогда $(x_n, y) \in \mathrm{v}^+$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда следует, что $(\hat{x}, \dot{y}) \in R'$, т. е. $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$. Если же $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, а $\hat{x}$ — стационарная последовательность в $\widetilde{X}_1$, то аналогично доказывается, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$. В общем случае для каждого $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$, для которого имеет место один из рассмотренных выше случаев. Поскольку $(\hat{x}'', \hat{y}'') \in \widetilde{R}$, имеем также $(\hat{x}'', \hat{y}'') \in R'$, а потому, и $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$. Тем самым включение $\widetilde{R} \subset R'$ доказано.

Докажем, что если $\widetilde{X}_1$ конечно, то $\widetilde{R} = R'$. Пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$. Если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, то $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и, значит, $(\hat{x}, \hat{y}) \in \widetilde{R}$. Если же $\hat{x} \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in \widetilde{X}_1^{\mathbb{N}}$, то в силу конечности $\widetilde{X}_1$ множества $[\hat{x}]$ и $[\hat{y}]$ конечны. Поэтому для каждого $(\hat{x}', \hat{y}') \prec (\hat{x}, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'', \hat{y}'') \prec (\hat{x}', \hat{y}')$, где $\hat{x}''$ и $\hat{y}''$ — стационарные последовательности. Пусть $(\dot{x}, \dot{y}) \prec (\hat{x}, \hat{y})$, где $x \in \widetilde{X}_1$ и $y \in \widetilde{X}_1$. Тогда существуют $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ из $X^{\mathbb{N}}$, сходящиеся в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ к x и y соответственно. Из $(\hat{\xi}, \dot{x}) \in \widetilde{R}$ и $(\dot{y}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$ в силу $\widetilde{R} \subset R'$ получаем $(\hat{\xi}, \dot{x}) \in R'$ и $(\dot{y}, \hat{\eta}) \in R'$. Поскольку $(\hat{x}, \hat{y}) \in R'$, имеем также $(\dot{x}, \dot{y}) \in R'$ и поэтому $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in R'$. Отсюда следует, что $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in R$ и, значит, $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Но тогда множества пределов последовательностей $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ совпадают и целиком содержатся в $\widetilde{X}_1$. Кроме того, в силу предложения 2.23 каждая из последовательностей $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ имеет лишь один предел в $\widetilde{X}_1$. Поэтому $x = y$. А это означает, что каждый член последовательности $\hat{x}$ совпадает с соответствующим членом последовательности $\hat{y}$, начиная с некоторого номера. Следовательно, $(\hat{x}, \hat{y}) \in \widetilde{R}$. Пусть теперь $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} = \dot{y}$, где $y \in \widetilde{X}_1$. Выберем последовательность $\hat{\eta} \in X^{\mathbb{N}}$, сходящуюся к y в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$. Тогда $(\dot{y},\, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$ и, значит, $(\dot{y},\, \hat{\eta}) \in R'$. Отсюда, поскольку $(\hat{x},\, \dot{y}) \in R'$, получаем $(\hat{x},\, \hat{\eta}) \in R'$. Но тогда $(\hat{x},\, \hat{\eta}) \in R$ и, следовательно, $(\hat{x},\, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Поэтому $\hat{x}$ тоже сходится к y в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$. А это означает, что $(\hat{x},\, \dot{y}) \in \widetilde{R}$, т. е. $(\hat{x},\, \hat{y}) \in \widetilde{R}$. Если же $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, а $\hat{x}$ — стационарная последовательность в $\widetilde{X}_1$, то в силу симметричности отношений R, $\widetilde{R}$ и R' получаем опять $(\hat{x},\, \hat{y}) \in \widetilde{R}$. В общем случае для каждого $(\hat{x}',\, \hat{y}') \prec (\hat{x},\, \hat{y})$ существует $(\hat{x}'',\, \hat{y}'') \prec (\hat{x}',\, \hat{y}')$, для которого выполняется один из рассмотренных выше случаев. Поскольку $(\hat{x}'',\, \hat{y}'') \in R'$, имеем также $(\hat{x}'',\, \hat{y}'') \in \widetilde{R}$, а потому, и $(\hat{x},\, \hat{y}) \in \widetilde{R}$. Тем самым имеет место $R' \subset \widetilde{R}$, которое с учетом $\widetilde{R} \subset R'$ дает $\widetilde{R} = R'$.

(б) Пусть $\hat{x}$ — сходящаяся последовательность в $(\widetilde{X},\, R')$, а $x \in \widetilde{X}$ и $y \in \widetilde{X}$ — ее пределы. Тогда $(\dot{x},\, \dot{y}) \in R'$. Выберем последовательности $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ в X, сходящиеся в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ к x и y соответственно. Имеем также $(\hat{\xi},\, \dot{x}) \in \widetilde{R}$, $(\dot{y},\, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$, а значит, и $(\hat{\xi},\, \dot{x}) \in R'$, $(\dot{y},\, \hat{\eta}) \in R'$. Отсюда с учетом $(\dot{x},\, \dot{y}) \in R'$ получаем $(\hat{\xi},\, \hat{\eta}) \in R'$, из которого следует, что $(\hat{\xi},\, \hat{\eta}) \in R$ и $(\hat{\xi},\, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Поэтому в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ множества пределов последовательностей $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ совпадают и целиком содержатся либо в X, либо в $\widetilde{X}_1$. Отсюда вытекает, что x и y принадлежат либо X, либо $\widetilde{X}_1$. При этом если $x \in \widetilde{X}_1$ и $y \in \widetilde{X}_1$, то в силу предложения 2.23 $x = y$.

(в) Из $\widetilde{R} \subset R'$ следует $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$. Докажем, что если $\hat{x} \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$, то $\Lambda'(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$. Пусть $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $x \in \Lambda'(\hat{x})$. Тогда $(\hat{x},\, \dot{x}) \in R'$. Выберем $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$ так, чтобы $x \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Имеем $(\dot{x},\, \hat{y}) \in \widetilde{R}$ и, значит, $(\dot{x},\, \hat{y}) \in R'$. Поэтому $(\hat{x},\, \hat{y}) \in R'$. Отсюда последовательно получаем $(\hat{x},\, \hat{y}) \in R$ и $(\hat{x},\, \hat{y}) \in \widetilde{R}$. Следовательно, $x \in \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$. Тем самым включение $\Lambda'(\hat{x}) \subset \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ и вместе с ним равенство $\widetilde{\Lambda}(\hat{x}) = \Lambda'(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ доказаны.

(г) Пусть пространство $(X,\, R)$ имеет операцию однозначного предела Λ. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $\hat{x}$ в $(\widetilde{X},\, R')$ и точку $x \in \Lambda'(\hat{x})$. Если $x \in \widetilde{X}_1$, то в силу б) x является единственным пределом для $\hat{x}$. Если же $x \in X$, то $\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda'(\dot{x}) \subset X$. Поэтому $\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda'(\dot{x}) = \{x\}$ и, значит, Λ' является операцией однозначного предела. Но тогда в силу предложения 2.15 $(\widetilde{X},\, R')$ хаусдорфово. Поскольку $\widetilde{R}\subset R'$, пространство $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ тоже хаусдорфово.

(д) Пусть $(\widetilde{X},\, R')$ является пространством Фреше–Урысона. Из в) следует, что квазизамыкание M^+ произвольного $M\subset X$ в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ совпадает с квазизамыканием множества M в $(\widetilde{X},\, R')$. Поэтому в силу $\widetilde{R}\subset R'$ множество M^+ замкнуто в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$, т. е. $M^+=\overline{M}$. Кроме того, согласно предложению 2.23, любое подмножество множества $\widetilde{X}_1$ замкнуто в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$. Но тогда для любого множества M в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ имеют место равенства

$$M^+ = (M\cap X)^+\cup(M\setminus X)^+ = \overline{M\cap X}\cup\overline{M\setminus X} = \overline{M}.$$

Значит, $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ является пространством Фреше–Урысона. ►

Теорема 2.22. *Пусть $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ — пополнение неполного пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\, R)\subset(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$, имеющего счетную фундаментальную систему окружений $V=\{\mathrm{v}_n : n\in\mathbb{N}\}$. Тогда $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})\times(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ является пространством Фреше–Урысона. Кроме того, система $V'=\{\mathrm{v}_n^+ : n\in\mathbb{N}\}$, где квазизамыкание взято в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})\times(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$, является системой окружений в $\widetilde{X}\times\widetilde{X}$, определяющей такое отношение секвенциальной равномерности R' в $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}$, что пространство $(\widetilde{X},\, R')$ полно и для нее V' является счетной фундаментальной системой окружений. При этом для пространств $(\widetilde{X},\, R')$ и $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ справедливы все утверждения предложения 2.25.*

◄ В силу предложения 2.16 можно считать, что счетная фундаментальная система окружений $V=\{\mathrm{v}_n : n\in\mathbb{N}\}$ пространства $(X,\, R)$ состоит из симметричных открытых окружений, удовлетворяющих включению $\mathrm{v}_{n+1}^3\subset \mathrm{v}_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Кроме того, из предложений 1.35, 1.37 и 2.16 следует, что $(X,\, R)$ и $(X,\, R)\times(X,\, R)$ являются пространствами Фреше–Урысона. Докажем, что $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})\times(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ тоже является пространством Фреше–Урысона. В силу предложения 2.23 любое $H\subset \widetilde{X}_1\times\widetilde{X}_1$, где $\widetilde{X}_1=\widetilde{X}\setminus X$, замкнуто в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})\times(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$.

Пусть $H\subset X\times\widetilde{X}_1$. Тогда в $(\widetilde{X},\, \widetilde{R})\times(\widetilde{X},\, \widetilde{R})$ имеют место $H^+\subset(H^+)^+\subset\widetilde{X}\times\widetilde{X}_1$ и $(H^+)^+=H^+\cup(H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1))^+$. Докажем, что $(H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1))^+\subset H^+$. Пусть $(x,\,y)\in(H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1))^+$. Из предложения 2.23 следует, что в $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$ последовательность точек из $\widetilde{X}_1$ сходится лишь тогда, когда она почти стационарна. Поэтому существует последовательность точек $(x^{(n)},\,y)\in\in H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1)$, $n\in\mathbb{N}$, сходящаяся к $(x,\,y)$ в $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})\times(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$. Кроме того, для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует также последовательность точек $(\xi^{(n)},\,y)\in H$, $i\in\mathbb{N}$, сходящаяся к $(x^{(n)},\,y)$. Отсюда вытекает, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ последовательность точек $\xi_i^{(n)}\in X$, $i\in\mathbb{N}$, сходится в $(X,\,R)$ к точке $x^{(n)}\in X$. Следовательно, для каждого $n\in\mathbb{N}$ последовательность точек $\big(\xi_i^{(n)},\,x^{(n)}\big)\in X\times X$, $i\in\mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении пространства $(X,\,R)$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ выберем $i_n\in\mathbb{N}$ так, чтобы $\big(\xi_{i_n}^{(n)},\,x^{(n)}\big)\in \mathrm{v}_n$. Из $\mathrm{v}_{n+1}\subset\mathrm{v}_n$, $n\in\mathbb{N}$, следует, что последовательность точек $\big(\xi_{i_n}^{(n)},\,x^{(n)}\big)\in X\times X$, $n\in\mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении из V. А это означает, что последовательности $\hat{x}=(x^{(n)}:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}=\big(\xi_{i_n}^{(n)}:n\in\mathbb{N}\big)$ находятся в отношении $(\hat{\xi},\,\hat{x})\in R\subset\widetilde{R}$. Однако $\hat{x}$ сходится к x в $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$. Поэтому из $(\hat{\xi},\,\hat{x})\in\widetilde{R}$ следует, что $\hat{\xi}$ тоже сходится к x в $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$. Тем самым последовательность точек $\big(\xi_{i_n}^{(n)},\,y\big)\in H$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к $(x,\,y)$ в $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})\times(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$. Отсюда вытекает, что $(x,\,y)\in H^+$. Значит, $(H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1))^+\subset H^+$. Полученное включение показывает, что $(H^+)^+=H^+$, т. е. в $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})\times(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$ для любого $H\subset X\times\widetilde{X}_1$ имеет место равенство $H^+=\overline{H}$. Аналогично доказывается, что это равенство выполняется также в случае $H\subset\widetilde{X}_1\times X$.

Рассмотрим случай $H\subset X\times X$. Имеет место равенство $(H^+)^+=H^+\cup H_1$, где

$$H_1=(H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1))^+\cup(H^+\cap(\widetilde{X}_1\times X))^+\cup(H^+\cap(X\times X))^+.$$

Докажем включение $H_1\subset H^+$. Пусть $(x,\,y)\in H_1$. Предположим $(x,\,y)\in(H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1))^+$. Тогда существует последовательность точек $(x^{(n)},\,y)\in H^+\cap(X\times\widetilde{X}_1)$, $n\in\mathbb{N}$, которая сходится к $(x,\,y)$. Кроме того, для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует последовательность точек $\big(\xi_i^{(n)},\,\eta_i^{(n)}\big)\in H$, $i\in\mathbb{N}$, сходящаяся к $(x^{(n)},\,y)$. Учитывая, что $x^{(n)}\in X$, $n\in\mathbb{N}$, повторением сделанных выше рассуждений можно доказать существование последовательности натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, для которой последовательность точек $\xi_{i_n}^{(n)} \in X$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к x. Следовательно, последовательность точек $\big(\xi_{i_n}^{(n)}, \eta_{i_n}^{(n)}\big) \in H$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к (x, y). Поэтому $(x, y) \in H^+$. Аналогично доказывается, что в случае $(x, y) \in$ $\in (H^+ \cap (\widetilde{X}_1 \times X))^+$ тоже $(x, y) \in H^+$. Предположим теперь, что $(x, y) \in (H^+ \cap (X \times X))^+$. Тогда существует последовательность точек $(x^{(n)}, y^{(n)}) \in H^+ \cap (X \times X)$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к (x, y). Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность точек $\big(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)}\big) \in H$, $i \in \mathbb{N}$, сходящаяся к $(x^{(n)}, y^{(n)})$. Очевидно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $i_n \in \mathbb{N}$, что $\big(\xi_{i_n}^{(n)}, x^{(n)}\big) \in \mathrm{v}_n$ и $\big(\eta_{i_n}^{(n)}, y^{(n)}\big) \in \mathrm{v}_n$. Отсюда повторением сделанных выше рассуждений получаем, что последовательности $\big(\xi_{i_n}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big)$ и $\big(\eta_{i_n}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\big)$ сходятся к x и y соответственно. Поэтому последовательность точек $\big(\xi_{i_n}^{(n)}, \eta_{i_n}^{(n)}\big) \in H$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к (x, y) и, значит, $(x, y) \in H^+$. Тем самым включение $H_1 \subset H^+$ доказано. Но тогда $(H^+)^+ = H^+$, т. е. $H^+ = \overline{H}$.

Из доказанных утверждений следует, что в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$ для произвольного $H \subset \widetilde{X} \times \widetilde{X}$ имеет место $H^+ = \overline{H}$. А это означает, что $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$ является пространством Фреше–Урысона. Отсюда вытекает, что $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ тоже является пространством Фреше–Урысона.

В силу предложения 2.25 система $V' = \{\mathrm{v}_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$, где $\mathrm{v}_n \in V$, а квазизамыкание взято в $(\widetilde{X}, \widetilde{R}) \times (\widetilde{X}, \widetilde{R})$, является системой окружений в $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$, определяющей некоторое отношение секвенциальной равномерности R' в $\widetilde{X}^{\mathbb{N}}$. Так как $\mathrm{v}_{n+1}^+ \subset \mathrm{v}_n^+$, $n \in \mathbb{N}$, то V' является фундаментальной системой окружений пространства $(\widetilde{X}, R')$. Очевидно, для $(\widetilde{X}, R')$ и $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ справедливы все утверждения предложения 2.25.

Докажем полноту пространства $(\widetilde{X}, R')$. Рассмотрим в $(\widetilde{X}, R')$ произвольную фундаментальную последовательность $\hat{x} = (x^{(n)} : n \in \mathbb{N})$. В силу $\widetilde{R} \subset R'$ сходящаяся в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ последовательность сходится и в $(\widetilde{X}, R')$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность точек $\xi_i^{(n)} \in X$, $i \in \mathbb{N}$, сходящаяся к $x^{(n)}$ в $(\widetilde{X}, R')$. Но тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность точек $\bigl(x^{(n)}, \xi_i^{(n)}\bigr)$, $i \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении из V'. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $i_n \in \mathbb{N}$, что $\bigl(x^{(n)}, \xi_{i_n}^{(n)}\bigr) \in \mathrm{v}_n^+$. В силу $\mathrm{v}_{k+1}^+ \subset \mathrm{v}_k^+$, $k \in \mathbb{N}$, последовательность точек $\bigl(x^{(n)}, \xi_{i_n}^{(n)}\bigr)$, $n \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении из V'. А это означает, что $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in R'$, где $\hat{\xi} = \bigl(\xi_{i_n}^{(n)} : n \in \mathbb{N}\bigr)$. Отсюда в силу фундаментальности $\hat{x}$ следует фундаментальность $\hat{\xi}$ в $(\widetilde{X}, R')$. Но тогда последовательность $\hat{\xi}$ фундаментальна в (X, R), а значит, и в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. В силу полноты $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ последовательность $\hat{\xi}$ сходится в нем. Поэтому $\hat{\xi}$ сходится и в $(\widetilde{X}, R')$. Из $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in R'$ следует, что $\hat{x}$ тоже сходится в $(\widetilde{X}, R')$ и, значит, $(\widetilde{X}, R')$ полно. ►

Теорема 2.23. *Пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ и $(\widetilde{X}', \widetilde{R}')$ — пополнения пространств с секвенциальной равномерностью $(X, R) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{R})$ и $(X', R') \subset (\widetilde{X}', \widetilde{R}')$ соответственно, а функция $f : X \to X'$ секвенциально равномерно непрерывна. Тогда существует секвенциально равномерно непрерывная функция $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$, удовлетворяющая равенству $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, причем если пространство (X', R') имеет операцию однозначного предела, то такая функция $\widetilde{f}$ единственна. Кроме того, функция $\widetilde{f}$ единственна также в случае, когда f является равномерным изоморфизмом (X, R) на (X', R'), причем в этом случае $\widetilde{f}$ является равномерным изоморфизмом $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$ на $(\widetilde{X}', \widetilde{R}')$.*

◄ Очевидно, нужно рассматривать случай $X \neq \widetilde{X}$. Пусть $x \in \widetilde{X} \backslash X$. Существует последовательность $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ в X, сходящаяся к x в $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$. Из фундаментальности $\hat{x}$ в (X, R) и секвенциально равномерной непрерывности f следует, что последовательность точек $f(x_n) \in X'$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна в (X', R'), а значит, и в $(\widetilde{X}', \widetilde{R}')$. В силу полноты $(\widetilde{X}', \widetilde{R}')$ указанная последовательность сходится. Пусть M_x — множество пределов в $(\widetilde{X}', \widetilde{R}')$ последовательности точек $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Легко убедиться, что M_x не зависит от выбора сходящейся к x последовательности $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Выберем некоторое $y_x \in M_x$ и определим функцию $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ следующим образом: $\widetilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in X$

и $\widetilde{f}(x)=y_x$ при $x\in\widetilde{X}\setminus X$. Докажем, что построенная функция $\widetilde{f}$ секвенциально равномерно непрерывна. Рассмотрим произвольную пару $(\hat{\xi},\,\hat{\eta})\in\widetilde{R}$ последовательностей $\hat{\xi}=(\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots)$ и $\hat{\eta}=(\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots)$ в $\widetilde{X}$. Обозначим $\zeta_n=\widetilde{f}(\xi_n)$, $\vartheta_n=\widetilde{f}(\eta_n)$, $n\in\mathbb{N}$, и рассмотрим также последовательности $\hat{\zeta}=(\zeta_1,\,\zeta_2,\,\ldots)$, $\hat{\vartheta}=$ $=(\vartheta_1,\,\vartheta_2,\,\ldots)$ в $\widetilde{X}'$. Если $\hat{\xi}\in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\eta}\in X^{\mathbb{N}}$, то в силу секвенциально равномерной непрерывности f имеем $(\hat{\zeta},\,\hat{\vartheta})\in R'$ и, значит, $(\hat{\zeta},\,\hat{\vartheta})\in\widetilde{R}'$. Если же $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ принадлежат $(\widetilde{X}\setminus X)^{\mathbb{N}}$, то $\xi_n=\eta_n$ для всех $n\geqslant m$ при некотором $m\in\mathbb{N}$. Поэтому $\zeta_n=\vartheta_n$ для всех $n\geqslant m$ и, следовательно, $(\hat{\zeta},\,\hat{\vartheta})\in\widetilde{R}'$. Пусть $\hat{\xi}\in X^{\mathbb{N}}$, а $\hat{\eta}=\dot{\eta}$, где $\eta\in\widetilde{X}\setminus X$. Из $(\hat{\xi},\,\dot{\eta})\in\widetilde{R}$ следует, что $\hat{\xi}$ сходится к η. Согласно построению $\widetilde{f}$, последовательность $\hat{\zeta}$ сходится в $(\widetilde{X}',\,\widetilde{R}')$ к точке $\widetilde{f}(\eta)=y_\eta$. Поэтому $(\hat{\zeta},\,\dot{y}_\eta)\in\widetilde{R}'$. Отсюда с учетом $\hat{\vartheta}=\dot{y}_\eta$ получаем $(\hat{\zeta},\,\hat{\eta})\in\widetilde{R}'$. Если же $\hat{\eta}\in X^{\mathbb{N}}$, а $\hat{\xi}$ — стационарная последовательность в $\widetilde{X}\setminus X$, то в силу симметричности отношений секвенциальной равномерности опять $(\hat{\zeta},\,\hat{\vartheta})\in\widetilde{R}'$. В общем случае для каждого $(\hat{\xi}',\,\hat{\eta}')\prec(\hat{\xi},\,\hat{\eta})$ существует $(\hat{\xi}'',\,\hat{\eta}'')\prec(\hat{\xi}',\,\hat{\eta}')$, для которого имеет место один из рассмотренных выше случаев. Поэтому для каждого $(\hat{\zeta}',\,\hat{\vartheta}')\prec(\hat{\zeta},\,\hat{\vartheta})$ существует $(\hat{\zeta}'',\,\hat{\vartheta}'')\prec(\hat{\zeta}',\,\hat{\vartheta}')$ из $\widetilde{R}'$. Отсюда следует, что $(\hat{\zeta},\,\hat{\vartheta})\in\widetilde{R}'$ и, значит, функция $\widetilde{f}$ секвенциально равномерно непрерывна. Ясно, что если $(X,\,R)$ имеет операцию однозначного предела, то функция $\widetilde{f}$ единственна.

Если f является равномерным изоморфизмом $(X,\,R)$ на $(X',\,R')$, то для каждого $x\in\widetilde{X}\setminus X$ указанное выше множество M_x удовлетворяет включению $M_x\subset\widetilde{X}'\setminus X'$ и, следовательно, состоит из одного элемента. Поэтому требуемая функция $\widetilde{f}$ единственна. Докажем, что $\widetilde{f}$ является равномерным изоморфизмом $(\widetilde{X},\,\widetilde{R})$ на $(\widetilde{X}',\,\widetilde{R}')$.

Пусть $\widetilde{f}(x)=\widetilde{f}(\xi)$ для некоторых x и ξ из $\widetilde{X}$. Как было отмечено, если $z\in\widetilde{X}\setminus X$, то $\widetilde{f}(z)\in\widetilde{X}'\setminus X'$. Поэтому возможны два случая: либо $x\in X$ и $\xi\in X$, либо $x\in\widetilde{X}\setminus X$ и $\xi\in\widetilde{X}\setminus X$. Так как f является равномерным изоморфизмом, то в первом случае $x=\xi$. Во втором случае выберем последовательности $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}=(\xi_n:n\in\mathbb{N})$ в X, сходящиеся к x и ξ соответственно. В силу секвенциально равномерной непрерывности $\widetilde{f}$ последовательности $\hat{y}=(f(x_n):n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(f(\xi_n):n\in\mathbb{N})$ сходятся к одному и тому же пределу. Поэтому $(\hat{y},\,\hat{\eta})\in\widetilde{R}'$ и, значит, $(\hat{y},\,\hat{\eta})\in R'$. Но тогда $(\hat{x},\,\hat{\xi})\in R$. Отсюда следует, что $x=\xi$. Тем самым отображение $\widetilde{f}$ взаимно однозначное.

Пусть $y\in\widetilde{X}'\backslash X'$. Выберем сходящуюся к y последовательность $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ в X'. Последовательность $(f^{-1}(y_n):n\in\mathbb{N})$, будучи фундаментальной, сходится к некоторому $x\in\widetilde{X}$. Но тогда $\hat{y}$ сходится к $\widetilde{f}(x)$. Поэтому $y=\widetilde{f}(x)$, причем $x\in\widetilde{X}\backslash X$. Значит, $\widetilde{f}$ отображает $\widetilde{X}$ на $\widetilde{X}'$. Тем самым отображение $\widetilde{f}$ биективное.

Остается доказать, что обратное отображение $\widetilde{f}^{-1}$ секвенциально равномерно непрерывно. Рассмотрим пару $(\hat{y},\,\hat{\eta})\in\widetilde{R}'$ последовательностей $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(\eta_n:n\in\mathbb{N})$ в $\widetilde{X}'$. Нужно доказать, что последовательности $\hat{x}=\big(\widetilde{f}^{-1}(y_n):n\in\mathbb{N}\big)$ и $\hat{\xi}=\big(\widetilde{f}^{-1}(\eta_n):n\in\mathbb{N}\big)$ находятся в отношении $(\hat{x},\,\hat{\xi})\in\widetilde{R}$. Очевидно, достаточно доказать, что для каждого $(\hat{x}',\,\hat{\xi}')\prec(\hat{x},\,\hat{\xi})$ существует $(\hat{x}'',\,\hat{\xi}'')\prec(\hat{x}',\,\hat{\xi}')$ из $\widetilde{R}$. Рассмотрим некоторое $(\hat{x}',\,\hat{\xi}')\prec(\hat{x},\,\hat{\xi})$. Существует $(\hat{x}'',\,\hat{\xi}'')\prec(\hat{x}',\,\hat{\xi}')$, для которого выполняется один из следующих случаев:

1) $\hat{x}''\in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\xi}''\in X^{\mathbb{N}}$; 2) $\hat{x}''\in(\widetilde{X}\backslash X)^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\xi}''\in(\widetilde{X}\backslash X)^{\mathbb{N}}$;
3) $\hat{x}''\in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\xi}''\in(\widetilde{X}\backslash X)^{\mathbb{N}}$; 4) $\hat{x}''\in(\widetilde{X}\backslash X)^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\xi}''\in X^{\mathbb{N}}$.

Пусть пара $(\hat{y}'',\,\hat{\eta}'')\prec(\hat{y},\,\hat{\eta})$ соответствует паре $(\hat{x}'',\,\hat{\xi}'')$. Имеем, что $(\hat{y}'',\,\hat{\eta}'')\in\widetilde{R}'$. В первом случае $\hat{y}''\in {X'}^{\mathbb{N}}$, $\hat{\eta}''\in {X'}^{\mathbb{N}}$ и $(\hat{y}'',\,\hat{\eta}'')\in R'$. Отсюда, учитывая, что f является равномерным изоморфизмом, получим $(\hat{x}'',\,\hat{\xi}'')\in R$, т. е. $(\hat{x}'',\,\hat{\xi}'')\in\widetilde{R}$. Во втором случае $\hat{y}''\in(\widetilde{X}'\backslash X')^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\eta}''\in(\widetilde{X}'\backslash X')^{\mathbb{N}}$. Поэтому каждый член последовательности $\hat{y}''$ совпадает с соответствующим членом последовательности $\hat{\eta}''$, начиная с некоторого номера. Но тогда этим свойством обладают также $\hat{x}''$ и $\hat{\xi}''$. Следовательно, $(\hat{x}'',\,\hat{\xi}'')\in\widetilde{R}$. В третьем случае $\hat{y}''\in {X'}^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\eta}''\in(\widetilde{X}'\backslash X')^{\mathbb{N}}$. Поэтому множество $[\hat{\eta}'']$ конечно. Отсюда получаем, что $[\hat{\xi}'']$ тоже конечно и, значит, $\hat{\xi}''$ обладает стационарной подпоследовательностью. Учитывая это, без нарушения общности можно считать, что $\hat{\xi}''$ и $\hat{\eta}''$ являются стационарными последовательностями. Пусть $\hat{\xi}''=\dot{\xi}$ и $\hat{\eta}''=\dot{\eta}$, где $\xi\in\widetilde{X}\setminus X$ и $\eta\in\widetilde{X}'\setminus X'$. Из $(\hat{y}'',\dot{\eta})\in\widetilde{R}'$ следует, что $\hat{y}''$ сходится к η. Последовательность $\hat{x}''$, будучи фундаментальной, сходится к некоторому $\xi'\in\widetilde{X}$. Но тогда $\widetilde{f}(\xi')=\eta=\widetilde{f}(\xi)$. Поэтому $\xi'=\xi$ и, значит, $\hat{x}''$ сходится к ξ. Отсюда вытекает, что $(\hat{x}'',\dot{\xi})\in\widetilde{R}$, т. е. $(\hat{x}'',\hat{\xi}'')\in\widetilde{R}$. В четвертом случае эта принадлежность доказывается аналогично. Тем самым $(\hat{x},\hat{\xi})\in\widetilde{R}$. Следовательно, $\widetilde{f}^{-1}$ секвенциально равномерно непрерывно. ▶

Теорема 2.24. *Пусть (X, R) и $(Y,\widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные системы окружений U и $\widetilde{U}$ соответственно, причем $(Y,\widetilde{R})$ полно и система окружений $\widetilde{V}=\{\widetilde{\mathrm{u}}^3:\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, а для каждого $\mathrm{u}\in U$ существует такое $\mathrm{v}\in U$, что $\mathrm{v}^2\subset\mathrm{u}$. Тогда для всякой секвенциально равномерно непрерывной функции $f:G\to Y$, где $G\subset X$, существует секвенциально равномерно непрерывная функция $\varphi:\overline{G}\to Y$, удовлетворяющая равенству $\varphi(x)=f(x)$ для всех $x\in G$, причем если $(Y,\widetilde{R})$ имеет операцию однозначного предела, то такая функция φ единственна.*

◀ Пусть $x\in\overline{G}\setminus G$. В силу утверждения ж) предложения 2.15 (X, R) является пространством Фреше–Урысона. Следовательно, $\overline{G}=G^+$. Поэтому существует последовательность $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ в G, сходящаяся к x. Из фундаментальности $\hat{x}$ и секвенциально равномерной непрерывности f следует, что последовательность $\hat{y}=(f(x_n):n\in\mathbb{N})$ фундаментальна в $(Y,\widetilde{R})$. Так как $(Y,\widetilde{R})$ полно, то $\hat{y}$ сходится. Пусть M_x — множество пределов последовательности $\hat{y}$. Легко убедиться, что M_x не зависит от выбора сходящейся к x последовательности $\hat{x}\in G^{\mathbb{N}}$. Выберем некоторое $y_x\in M_x$ и определим функцию $\varphi:\overline{G}\to Y$ следующим образом: $\varphi(x)=f(x)$ при $x\in G$ и $\varphi(x)=y_x$ при $x\in\overline{G}\setminus G$. Докажем, что функция φ секвенциально равномерно непрерывна. Рассмотрим произвольную пару $(\hat{\xi},\hat{\xi}')\in R$ последовательностей $\hat{\xi}=(\xi_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}'=(\xi'_n:n\in\mathbb{N})$ в $\overline{G}$. Обозначим $\eta_n=\varphi(\xi_n)$, $\eta'_n=\varphi(\xi'_n)$ и рассмотрим также последовательности $\hat{\eta}=(\eta_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'=(\eta'_n:n\in\mathbb{N})$ в Y. Нужно доказать, что $(\hat{\eta},\hat{\eta}')\in\widetilde{R}$. С этой целью для каждого $n\in\mathbb{N}$ выберем последовательности $\hat{x}_n=(x_{ni}:i\in\mathbb{N})$ и $\hat{x}'_n=(x'_{ni}:i\in\mathbb{N})$ в G так, чтобы

$(\hat{x}_n, \dot{\xi}_n)\in R$ и $(\hat{x}'_n, \dot{\xi}'_n)\in R$. Положим $y_{ni}=f(x_{ni})$, $y'_{ni}=f(x'_{ni})$ и рассмотрим последовательности $\hat{y}_n=(y_{ni}: i\in\mathbb{N})$, $\hat{y}'_n=(y'_{ni}: i\in\mathbb{N})$ в Y. Согласно построению функции φ, для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем $(\hat{y}_n, \dot{\eta}_n)\in\widetilde{R}$ и $(\hat{y}'_n, \dot{\eta}'_n)\in\widetilde{R}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$. В силу секвенциально равномерной непрерывности f для $\widetilde{\mathrm{u}}$ существует такое окружение $\mathrm{u}\in U$, что $(f(x), f(x'))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $(x, x')\in\mathrm{u}\cap(G\times G)$. Выберем симметричное окружение $\mathrm{v}\in U$ так, чтобы $\mathrm{v}^3\subset\mathrm{u}$. Очевидно, существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $(\xi_n, \xi'_n)\in\mathrm{v}$ для всех $n\geqslant m$. Кроме того, для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует такое $i_n\in\mathbb{N}$, что $(x_{ni}, \xi_n)\in\mathrm{v}$, $(x'_{ni}, \xi'_n)\in\mathrm{v}$, $(y_{ni}, \eta_n)\in\widetilde{\mathrm{u}}$ и $(y'_{ni}, \eta'_n)\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $i\geqslant i_n$. Отсюда следует, что $(x_{ni}, x'_{ni})\in\mathrm{v}^3\subset\mathrm{u}$ при $n\geqslant m$ и $i\geqslant i_n$. Поэтому $(y_{ni}, y'_{ni})\in\widetilde{\mathrm{u}}$ при $n\geqslant m$ и $i\geqslant i_n$. Но тогда $(\eta_n, \eta'_n)\in\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n\geqslant m$. Следовательно, $(\hat{\eta}, \hat{\eta}')\in\widetilde{R}$. Утверждение о единственности функции φ очевидно. ►

§ 8. Метризуемость пространства с секвенциальной равномерностью

Метрикой на множестве X называется всякий функционал $\rho: X\times X\to\mathbb{R}_+$, удовлетворяющий условиям

1) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ для всех x и y из X;

2) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ для всех x, y и z из X;

3) $\rho(x, y)=0$ для x и y из X только при $x=y$.

При этом число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

Заметим, что если функционал $\rho: X\times X\to\mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то $\rho(x, y)\geqslant 0$ для всех x и y из X.

Пара (X, ρ), где ρ — метрика на множестве X, называется *пространством с метрикой.* В (X, ρ) вводится операция однозначного предела λ, считая $\lambda(\hat{x})=x$ для $x\in X$ и $\hat{x}=(x_n: n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$, если $\lim\limits_n \rho(x, x_n)=0$, где $\lim$ — классическая операция предела в $\mathbb{R}$.

Пространство с операцией предела (X, λ) называется *метризуемым* или *метрическим* пространством с операцией предела (короче — метрическим пространством), если операция предела λ может быть определена указанным выше образом некоторой метрикой ρ на X.

Метрическое пространство является нормальным пространством Фреше–Урысона (см. главу I, § 10, n° 2). Однако обратное утверждение, вообще говоря, не верно.

Если $(x_{ni} : (n, i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N})$ — такое семейство точек в метрическом пространстве (X, λ), что для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{ni} : i \in \mathbb{N})$ сходится к $\xi_n \in X$, а последовательность $(\xi_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к $x \in X$, то найдется такое $(j_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что для любой последовательности натуральных чисел $i_n \geqslant j_n$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(x_{ni_n} : i \in \mathbb{N})$ сходится к x.

Прямое произведение (X, λ) конечного или счетного семейства $((X_i, \lambda_i) : i \in I)$ метрических пространств является метрическим пространством, а секвенциальная топология пространства (X, λ) является тихоновским произведением секвенциальных топологий пространств (X_i, λ_i), $i \in I$. При этом если для каждого $i \in I$ операция предела λ_i определяется метрикой ρ_i на X_i, то операция предела λ определяется метрикой ρ на X, заданной равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}$$

для произвольных $x = (x_i : i \in I)$ и $y = (y_i : i \in I)$ из X.

Если для конечного или счетного множества I каждая операция предела λ_i, $i \in I$, в X определяется метрикой ρ_i, то операция предела λ в X, являющаяся точной нижней границей в $\mathcal{L}(X)$ системы $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$, определяется метрикой ρ, заданной равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{i\in I} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x, y)}{1 + \rho_i(x, y)}, \quad (x, y) \in X\times X.$$

В пространстве с метрикой (X, ρ) последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ называется *ρ-фундаментальной,* если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\rho(x_n, y_m) < \varepsilon$ для всех натуральных $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$.

Пространство с метрикой (X, ρ) называется *полным,* если в нем любая ρ-фундаментальная последовательность сходится.

Пусть (X, ρ) и (X', ρ') — пространства с метрикой. Отображение $f : X \to X'$ называется *изометрическим,* если $\rho(x, y) = \rho'(f(x), f(y))$ для всех x и y из X. Говорят, что (X, ρ) *изометрично* (X', ρ'), если существует изометрическое отображение X на X'.

Пополнением пространства с метрикой (X, ρ) называется всякое полное пространство с метрикой $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$, которое содержит всюду плотное подпространство $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\rho}_0) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$, изометричное (X, ρ).

Как известно, всякое пространство с метрикой допускает пополнение, причем любые два его пополнения изометричны.

В пространстве с метрикой (X, ρ) для точки $x_0 \in X$ и числа $r > 0$ множество $\{x \in X : \rho(x, x_0) < r\}$ открыто и называется *открытым шаром* с *центром* в точке x_0 и *радиусом* r, а множество $\{x \in X : \rho(x, x_0) \leqslant r\}$ замкнуто и называется *замкнутым шаром* с центром в точке x_0 и радиусом r (замыкание открытого шара может отличаться от соответствующего замкнутого шара).

В пространстве с метрикой (X, ρ) множество M называется *ρ-предкомпактным,* если любая последовательность в M обладает ρ-фундаментальной подпоследовательностью; *ρ-ограниченным,* если $\rho(x, y) < r$ для некоторого $r > 0$ и всех x, y из M; *ρ-вполне ограниченным,* если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное $K \subset X$, что для каждого $x \in M$ найдется $y \in K$, удовлетворяющее неравенству $\rho(x, y) < \varepsilon$ (включение $K \subset X$ можно заменить на $K \subset M$).

Очевидно, ρ-вполне ограниченное множество ρ-ограничено. Кроме того, хорошо известны *теорема Хаусдорфа* о том, что в пространстве с метрикой (X, ρ) множество ρ-предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ρ-вполне ограничено, а также *теорема Бэра* о том, что полное пространство с метрикой является множеством второй категории (см. определение 1.15).

С пространством с метрикой (X, ρ) связывается отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$, состоящее из таких пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в X, что $\lim\limits_n \rho(x_n, y_n) = 0$.

Пусть (X, ρ) — пространство с метрикой, а (X, R) — соответствующее пространство с секвенциальной равномерностью. Последовательность в X ρ-фундаментальна тогда и только тогда, когда она R-фундаментальна, а подмножество в X ρ-предкомпактно тогда и только тогда, когда оно R-предкомпактно. Пространства (X, ρ) и (X, R) имеют одну и ту же операцию предела, причем (X, ρ) полно тогда и только тогда, когда полно (X, R).

Пространство с секвенциальной равномерностью (X, R) называется *метризуемым* или *метрическим,* если R может быть определено указанным выше образом некоторой метрикой на X.

Пополнение метризуемого пространства с секвенциальной равномерностью может не быть метризуемым (в связи с этим см. предложение 2.23, теорему 2.22 и доказанную ниже теорему 2.25, а также пример в главе III, § 16, n° 11). Поэтому пополнение неполного пространства с метрикой (X, ρ), вообще говоря, отличается от пополнения соответствующего пространства с секвенциальной равномерностью (X, R).

Известная из общей топологии теорема о метризуемости равномерного пространства можно сформулировать для пространств с секвенциальной равномерностью следующим образом.

Теорема 2.25. *Пространство с секвенциальной равномерностью (X, R) метризуемо тогда и только тогда, когда отношение секвенциальной равномерности R может быть определено конечной или счетной системой окружений, имеющей пересечение $\Delta(X)$.*

◀ Очевидно, в доказательстве нуждается лишь утверждение о том, что если отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определяется конечной или счетной системой окружений V в $X\times X$, имеющей пересечение $\Delta(X)$, то (X, R) метризуемо. Ясно, что если система окружений V конечна, то $\Delta(X)$ является окружением пространства (X, R) и поэтому R может быть определено метрикой ρ на X, заданной для всех x и y из X равенствами $\rho(x, y)=1$ при $x\neq y$ и $\rho(x, y)=0$ при $x=y$.

Рассмотрим случай, когда R определяется счетной системой окружений $V=\{\mathrm{v}_n : n\in\mathbb{N}\}$, имеющей пересечение $\Delta(X)$ (предполагается, что R не может определяться конечной системой окружений). В силу предложения 2.16 можно считать, что V является фундаментальной системой окружений пространства (X, R), состоящей из симметричных открытых окружений, удовлетворяющих включению $\mathrm{v}_{n+1}^3\subset \mathrm{v}_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$, причем

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{v}_n = \Delta(X). \tag{1}$$

Существование метрики ρ на X, определяющей отношение секвенциальной равномерности R, докажем методом, указанным в [18], с. 18. Определим функционал $g : X\times X\to\mathbb{R}_+$, положив $g(x, x)=0$ для всех $x\in X$, $g(x, y)=1$ для $(x, y)\in(X\times X)\backslash \mathrm{v}_1$ и $g(x, y)=2^{-n}$ для $(x, y)\in \mathrm{v}_n\backslash \mathrm{v}_{n+1}$ при каждом $n\in\mathbb{N}$. Очевидно, $g(x, y)=g(y, x)$ для всех $(x, y)\in X\times X$ и в силу (1) $g(x, y)\neq 0$ при $x\neq y$. Определим также функционал $\rho : X\times X\to\mathbb{R}_+$, положив

$$\rho(x,\,y) = \inf \sum_{i=0}^{n-1} g(z_i,\,z_{i+1}), \quad (x,\,y)\in X\times X, \tag{2}$$

где точная нижняя граница берется по всевозможным $n\in\mathbb{N}$ и семейству $(z_0,\,z_1,\,\ldots,\,z_n)$ в X с $z_0=x$ и $z_n=y$. Очевидно, что

$$\rho(x,\,y) \leqslant g(x,\,y), \quad (x,\,y)\in X\times X. \tag{3}$$

Докажем неравенство

$$g(x,\,y) \leqslant 2\rho(x,\,y), \quad (x,\,y)\in X\times X. \tag{4}$$

В случае $x=y$ неравенство (4) очевидно. В случае $x\neq y$ докажем с помощью индукции по $n\in\mathbb{N}$, что для каждого семейства $(z_0,\,z_1,\,\ldots,\,z_n)$ в X с $z_0=x$ и $z_n=y$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}g(x,\,y) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} g(z_i,\,z_{i+1}). \tag{5}$$

Для $n=1$ это очевидно. Пусть $n>1$ и

$$a = \sum_{i=0}^{n-1} g(z_i,\,z_{i+1}). \tag{6}$$

Очевидно, $a>0$. Если $a\geqslant\frac{1}{2}$, то в силу $g(x,\,y)\leqslant 1$ неравенство (5) верно. Предположим $a<\frac{1}{2}$. Пусть k — наименьшее целое число, удовлетворяющее условиям $0\leqslant k\leqslant n-1$ и

$$\frac{a}{2} < \sum_{i=0}^{k} g(z_i,\,z_{i+1}). \tag{7}$$

Существование k следует из (6). Если $k\neq 0$, то в силу его выбора

$$\frac{a}{2} \geqslant \sum_{i=0}^{k-1} g(z_i,\,z_{i+1}), \tag{8}$$

а если $k\neq n-1$, то с учетом (6) и (7)

$$\frac{a}{2} > \sum_{i=k+1}^{n-1} g(z_i,\,z_{i+1}). \tag{9}$$

В случае $0<k<n-1$ из (6) имеем $g(z_k,\,z_{k+1})\leqslant a$, а с учетом неравенств (8) и (9) по предположению индукции

$$\frac{1}{2}g(x,\,z_k)\leqslant\sum_{i=0}^{k-1}g(z_i,\,z_{i+1})\leqslant\frac{a}{2},\tag{10}$$

$$\frac{1}{2}g(z_{k+1},\,y)\leqslant\sum_{i=k+1}^{n-1}g(z_i,\,z_{i+1})<\frac{a}{2}.\tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем $g(x,\,z_k)\leqslant a$ и $g(z_{k+1},\,y)<a$. Пусть $s\in\mathbb{N}$ — наименьшее число, для которого $2^{-s}\leqslant a$. Тогда $s\geqslant 2$, так как $a<\frac{1}{2}$. Кроме того, $g(x,\,z_k)\leqslant 2^{-s}$, $g(z_k,\,z_{k+1})\leqslant 2^{-s}$ и $g(z_{k+1},\,y)\leqslant\leqslant 2^{-s}$. Поэтому $(x,\,z_k)\in\mathrm{v}_s$, $(z_k,\,z_{k+1})\in\mathrm{v}_s$, и $(z_{k+1},\,y)\in\mathrm{v}_s$. Отсюда следует, что $(x,\,y)\in\mathrm{v}_s^3\subset\mathrm{v}_{s-1}$. В случае $k=0$ из (6) имеем $g(x,\,z_1)\leqslant a$, а с учетом (9) по предположению индукции

$$\frac{1}{2}g(z_1,\,y)\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}g(z_i,\,z_{i+1})<\frac{a}{2}.$$

Следовательно, $g(x,\,z_1)\leqslant 2^{-s}$ и $g(z_1,\,y)\leqslant 2^{-s}$. Но тогда $(x,\,z_1)\in\mathrm{v}_s$ и $(z_1,\,y)\in\mathrm{v}_s$. Поэтому $(x,\,y)\in\mathrm{v}_s^2\subset\mathrm{v}_{s-1}$. Если же $k=n-1$, то из (6) имеем $g(z_{n-1},\,y)\leqslant a$, а с учетом (8) по предположению индукции

$$\frac{1}{2}g(x,\,z_{n-1})\leqslant\sum_{i=0}^{n-2}g(z_i,\,z_{i+1})\leqslant\frac{a}{2}.$$

Поэтому $g(x,\,z_{n-1})\leqslant 2^{-s}$, $g(z_{n-1},\,y)\leqslant 2^{-s}$. Следовательно, $(x,\,z_{n-1})\in\mathrm{v}_s$, $(z_{n-1},\,y)\in\mathrm{v}_s$ и, значит, $(x,\,y)\in\mathrm{v}_s^2\subset\mathrm{v}_{s-1}$. Таким образом, независимо от значения k имеем $(x,\,y)\in\mathrm{v}_{s-1}$. Отсюда вытекает, что $g(x,\,y)\leqslant 2^{1-s}\leqslant 2a$. Полученное неравенство $g(x,\,y)\leqslant 2a$ с учетом (6) совпадает с (5). Из (5) с учетом (2) получаем (4).

Из (2) следует $\rho(x,\,y)=\rho(y,\,x)$ и $\rho(x,\,y)\leqslant\rho(x,\,z)+\rho(z,\,y)$ для любых x, y и z из X. В силу (3) $\rho(x,\,x)=0$ для всех $x\in X$. Из (4) следует, что $\rho(x,\,y)\neq 0$ при $x\neq y$. Поэтому ρ является метрикой на X.

Рассмотрим систему $U'=\{\mathrm{u}_n:n\in\mathbb{N}\}$, где $\mathrm{u}_n=\{(x,\,y)\in\in X\times X:\rho(x,\,y)<2^{-n}\}$. Из (3) следует, что $\mathrm{v}_{n+1}\subset\mathrm{u}_n$, $n\in\mathbb{N}$. Поэтому множества u_n являются окружениями пространства $(X,\,R)$. В силу (4) $\mathrm{u}_n\subset\mathrm{v}_n$, $n\in\mathbb{N}$. А это означает, что U' является фундаментальной системой окружений пространства $(X,\,R)$. Следовательно, построенная метрика ρ определяет отношение секвенциальной равномерности R. ►

Полуметрикой на множестве X называется всякий функционал $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющий условиям

1) $d(x, y) = d(y, x)$ *для всех* x *и* y *из* X*;*

2) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$ *для всех* x*,* y *и* z *из* X*;*

3) $d(x, x) = 0$ *для всех* $x \in X$*.*

При этом число $d(x, y)$ называется *полурасстоянием* между точками x и y.

Пара (X, d), где d — полуметрика на множестве X, называется *пространством с полуметрикой.* В (X, d) вводится операция предела Λ, считая $x \in \Lambda(\hat{x})$ для $x \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$, если $\lim\limits_n d(x_n, x) = 0$. Очевидно, что если полуметрика d определяет операцию предела Λ, по которой стационарная последовательность имеет один предел, то d является метрикой, а Λ — операцией однозначного предела.

Пространство с операцией предела (X, Λ) называется *полуметризуемым* или *полуметрическим* пространством с операцией предела (короче — полуметрическим пространством), если операция предела Λ может быть определена указанным выше образом некоторой полуметрикой d на X.

Полуметрическое пространство является пространством Фреше—Урысона, в котором любые два непересекающихся замкнутых множества имеют непересекающиеся открытые окрестности.

В пространстве с полуметрикой по аналогии с пространством с метрикой вводятся понятия открытого шара, замкнутого шара, фундаментальной последовательности, предкомпактного множества, ограниченного множества и вполне ограниченного множества. Вводятся также понятия полного пространства с полуметрикой и пополнения пространства с полуметрикой.

С пространством с полуметрикой (X, d) связывается отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$, состоящее из таких пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в X, что $\lim\limits_n d(x_n, y_n) = 0$.

Пространство с секвенциальной равномерностью (X, R) называется *полуметризуемым* или *полуметрическим,* если R может быть определено указанным выше образом некоторой полуметрикой d на X.

Пополнение полуметризуемого пространства с секвенциальной равномерностью может не быть полуметризуемым.

Теорема 2.26. *Пространство с секвенциальной равномерностью* (X, R) *полуметризуемо тогда и только тогда, когда отношение секвенциальной равномерности* R *может быть* *определено конечной или счетной системой окружений.*

◀ В доказательстве нуждается лишь утверждение о том, что если отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ определяется конечной или счетной системой окружений V в $X\times X$, то пространство $(X,\, R)$ полуметризуемо. Если система V конечна, то в силу предложения 2.13 пересечение $\mathrm{w}=\bigcap\limits_{\mathrm{v}\in V}\mathrm{v}$ является симметричным открытым окружением пространства $(X,\, R)$, удовлетворяющим равенству $\mathrm{w}^2=\mathrm{w}$, причем R может быть определено одним лишь окружением w. Определим функционал $d: X\times X\to R_+$, положив $d(x,\, y)=0$ для $(x,\, y)\in\mathrm{w}$ и $d(x,\, y)=1$ для $(x,\, y)\in(X\times X)\backslash\mathrm{w}$. Из указанных свойств окружения w следует, что d есть полуметрика на X. При этом, очевидно, d определяет отношение секвенциальной равномерности R.

Рассмотрим случай счетной системы окружений $V=$ $=\{\mathrm{v}_n: n\in\mathbb{N}\}$ (предполагается, что R не может определяться конечной системой окружений). В силу предложения 2.16 можно считать, что V является фундаментальной системой окружений пространства $(X,\, R)$, состоящей из симметричных открытых окружений, удовлетворяющих включению $\mathrm{v}_{n+1}^3\subset\mathrm{v}_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Пересечение системы V обозначим через H. Тогда $\Delta(X)\subset H$, $H^{-1}=H$ и $H^2=H$.

Определим функционал $g: X\times X\to\mathbb{R}_+$, положив $g(x,\, y)=0$ для $(x,\, y)\in H$, $g(x,\, y)=1$ для $(x,\, y)\in(X\times X)\backslash\mathrm{v}_1$ и $g(x,\, y)=2^{-n}$ для $(x,\, y)\in\mathrm{v}_n\backslash\mathrm{v}_{n+1}$ при каждом $n\in\mathbb{N}$. Определим также функционал $d: X\times X\to\mathbb{R}_+$, положив

$$d(x,\, y)=\inf\sum_{i=0}^{n-1}g(z_i,\, z_{i+1}),\quad (x,\, y)\in X\times X,$$

где точная нижняя граница берется по всевозможным $n\in\mathbb{N}$ и семейству $(z_0,\, z_1,\, \ldots,\, z_n)$ в X с $z_0=x$ и $z_n=y$. Имеют место неравенства

$$d(x,\, y)\leqslant g(x,\, y)\leqslant 2d(x,\, y),\quad (x,\, y)\in X\times X.$$

Первое из них очевидно. Для $(x,\, y)\in H$ второе неравенство тоже очевидно. В случае $(x,\, y)\in(X\times X)\backslash H$ второе неравенство доказывается повторением рассуждений, сделанных в доказательстве теоремы 2.25. Из этих неравенств и указанных свойств множества H следует, что d является полуметрикой на X, определяющей отношение секвенциальной равномерности R. ▶

Из теорем 2.25 и 2.26 вытекает

Предложение 2.26. *Пространство с секвенциальной равномерностью полуметризуемо тогда и только тогда, когда его фактор-пространство метризуемо.* ▶

§ 9. Ограниченности и вполне ограниченности множества в пространстве с секвенциальной равномерностью

В предыдущем параграфе с пространством с полуметрикой было ассоциировано пространство с секвенциальной равномерностью. В главе III исследуются линейные пространства с операцией предела, имеющие аналогию с топологическими векторными пространствами, причем в § 11 главы III вкратце рассматриваются также кольца с операцией предела, имеющие аналогию с топологическими кольцами. Как в линейном пространстве, так и в кольце с операцией предела, известным образом вводится понятие ограниченного множества. Кроме того, с каждым из этих пространств ассоциируется пространство с секвенциальной равномерностью. Учитывая это, естественно ввести общее понятие ограниченного множества в пространстве с секвенциальной равномерностью. Однако трудно ввести одно такое понятие ограниченного множества, которое обобщало бы все понятия ограниченного множества, введенные в указанных трех типах пространств (имеется ввиду пространство с полуметрикой, линейное пространство с операцией предела и кольцо с операцией предела). Укажем три различных способа введения понятия ограниченного множества в пространстве с секвенциальной равномерностью (X, R). В одном из них используется некоторая система V окружений пространства (X, R) (в связи с этим см. [16], с. 252); в другом — используется некоторая система $\mathcal{F}$ функционалов $\varphi\colon X\times X\to\mathbb{R}_+$ (например, в случае пространства с полуметрикой (X, d) система $\mathcal{F}$ состоит из единственного функционала d, а в случае линейного пространства с операцией предела система $\mathcal{F}$ строится при помощи функционалов Минковского окрестностей нуля); в третьем — используется некоторая система $\mathcal{B}$ отображений X в себя (например, в случае линейного пространства $\mathcal{B}$ есть система всех отображений, каждое из которых является умножением на число, а в случае кольца с операцией предела, обладающего единицей, $\mathcal{B}$ есть система всех отображений, каждое из которых является умножением на элемент кольца).

Определение 2.12. *Пусть V — некоторая система окружений пространства с секвенциальной равномерностью*

$(X,\,R)$. *Подмножество* $M\subset X$ *называется* V*-ограниченным (или* V*-ограниченным по композиции), если для каждого* $\mathrm{v}\in V$ *существуют такие* $n\in\mathbb{N}$ *и конечное* $K\subset X$*, что* $M\subset \mathrm{v}^n[K]$.

Подмножество V-ограниченного множества, конечное объединение V-ограниченных множеств и квазизамыкание V-ограниченного множества V-ограничены. Если внутренность каждого $\mathrm{v}\in V$ содержит диагональ $\Delta(X)$, то замыкание V-ограниченного множества тоже V-ограничено (это доказывается с использованием предложения 2.4).

Пусть V — некоторая система поглощающих по композиции окружений пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\,R)$, т. е. таких окружений v, что $X\times X=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\mathrm{v}^n$. Тогда в пространстве $(X,\,R)$ для V-ограниченности множества M необходимо и достаточно, чтобы для каждых $\mathrm{v}\in V$ и $x\in X$ существовало такое $n\in\mathbb{N}$, что $M\subset\mathrm{v}^n[x]$. Кроме того, множество M V-ограничено тогда и только тогда, когда для каждого $\mathrm{v}\in V$ существует такое $n\in\mathbb{N}$, что $M\times M\subset\mathrm{v}^n$.

Пусть $(X,\,R)$ и $(Y,\,\widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, U и $\widetilde{U}$ — полные системы окружений, W и $\widetilde{W}$ — полные системы открытых окружений пространств $(X,\,R)$ и $(Y,\,\widetilde{R})$ соответствено, а $f:X\to Y$ — секвенциально равномерно непрерывное отображение. Если в $(X,\,R)$ множество M U-ограничено (W-ограничено), то в $(Y,\,\widetilde{R})$ множество $f(M)$ $\widetilde{U}$-ограничено ($\widetilde{W}$-ограничено).

Пусть U — полная система окружений пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\,R)$, ассоциированного с пространством с метрикой $(X,\,\rho)$. Тогда U-ограниченность подмножества $M\subset X$ эквивалентна следующему: для каждого $r>0$ существуют такие $n\in\mathbb{N}$ и конечное $K\subset X$, что для каждого $x\in M$ найдется семейство $(x_0,\,x_1,\,\ldots,\,x_n)$ в X с $x_0\in K$, $x_n=x$ и $\rho(x_{i-1},\,x_i)<r$, $i=1,\,2,\,\ldots,\,n$. Ясно, что в некоторых случаях U-ограниченность множества эквивалентна его ρ-ограниченности. Аналогично можно охарактеризовать U-ограниченность множества в случае пространства с полуметрикой.

С введенным понятием ограниченного множества связывается следующее понятие вполне ограниченного множества.

Определение 2.13. *Пусть* V *— некоторая система окружений пространства с секвенциальной равномерностью* $(X,\,R)$. *Подмножество* $M\subset X$ *называется* V*-вполне ограниченным, если для каждого* $\mathrm{v}\in V$ *существует такое конечное* $K\subset X$*, что* $M\subset\mathrm{v}[K]$.

Очевидно, V-вполне ограниченное множество V-ограничено. Подмножество V-вполне ограниченного множества и конечное объединение V-вполне ограниченных множеств V-вполне ограничены.

Пусть $(X,\, R)$ и $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, U и $\widetilde{U}$ — полные системы окружений, W и $\widetilde{W}$ — полные системы открытых окружений пространств $(X,\, R)$ и $(Y,\, \widetilde{R})$ соответственно, а $f : X \to Y$ — секвенциально равномерно непрерывное отображение. Если в $(X,\, R)$ множество M U-вполне ограничено (W-вполне ограничено), то в $(Y,\, \widetilde{R})$ множество $f(M)$ $\widetilde{U}$-вполне ограничено ($\widetilde{W}$-вполне ограничено).

Введем еще одно понятие вполне ограниченного множества.

Определение 2.14. *В пространстве с секвенциальной равномерностью $(X,\, R)$ множество M называется R-вполне ограниченным, если каждая последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в M обладает двумя такими подпоследовательностями $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{x}'' = (x_{j_n} : n \in \mathbb{N})$, что $(\hat{x}',\, \hat{x}'') \in R$ и $i_n \neq j_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Теорема 2.27. *В пространстве с секвенциальной равномерностью $(X,\, R)$ множество M R-вполне ограничено тогда и только тогда, когда для каждых $M_1 \subset M$ и окружения* u *пространства $(X,\, R)$ существует такое конечное $K_1 \subset M_1$, что $M_1 \subset \mathrm{u}[K_1]$.*

◀ Пусть множество M R-вполне ограничено. Рассмотрим подмножество $M_1 \subset M$ и симметричное окружение u пространства $(X,\, R)$. Обозначим через E множество таких $K \subset M_1$, что $(x,\, y) \notin \mathrm{u}$ для любых $x \neq y$ из K. Множество E частично упорядочим отношением включения. Очевидно, любое непустое совершенно упорядоченное подмножество множества E имеет точную верхнюю границу. В силу леммы Цорна существует в E максимальный элемент. Любой максимальный элемент множества E является конечным подмножеством множества M_1. Действительно, в противном случае существует такая последовательность $\hat{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots)$ попарно различных точек из M_1, что $(x_n,\, x_m) \notin \mathrm{u}$ для всех натуральных $n \neq m$. А это, очевидно, противоречит условию R-вполне ограниченности M. Пусть K_1 — некоторый максимальный элемент множества E. Тогда для каждого $x \in M_1$ существует такое $y \in K_1$, что $(x,\, y) \in \mathrm{u}$ и $(y,\, x) \in \mathrm{u}$. Следовательно, $M_1 \subset \mathrm{u}[K_1]$.

Пусть, обратно, множество M такое, что для каждых $M_1 \subset \subset M$ и окружения u пространства $(X,\, R)$ существует конечное

$K_1 \subset M_1$, удовлетворяющее включению $M_1 \subset \mathrm{u}[K_1]$. Рассмотрим последовательность $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ в M и докажем существование таких подпоследовательностей $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{x}$ и $\hat{x}'' = (x_{j_n} : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{x}$, что $(\hat{x}', \hat{x}'') \in R$ и $i_n \neq j_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В случае конечного $[\hat{x}]$ существование указанных подпоследовательностей очевидно. Поэтому предположим, что $[\hat{x}]$ бесконечно. Возможны следующие три случая:

1) существуют в $[\hat{x}]$ такие последовательности $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$, что $(\dot{\xi}_n, \dot{\eta}_n) \in R$ и $\xi_n \neq \eta_n$, $\xi_n \neq \xi_m$, $\eta_n \neq \eta_m$ для всех натуральных $n \neq m$;

2) существуют такие $\xi \in [\hat{x}]$ и последовательность $\hat{\eta}$ попарно различных точек из $[\hat{x}]$, что $(\dot{\xi}, \hat{\eta}) \in R$;

3) первые два случая не имеют места, т. е. множество пар $(\xi, \eta) \in ([\hat{x}] \times [\hat{x}]) \setminus \Delta(X)$, для которых $(\dot{\xi}, \dot{\eta}) \in R$, конечно и $(\dot{\xi}, \hat{\eta}) \notin R$ для любых $\xi \in [\hat{x}]$ и последовательности $\hat{\eta}$ попарно различных точек из $[\hat{x}]$.

В первом случае $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in R$ и существует $(\hat{x}', \hat{x}'') \prec (\hat{\xi}, \hat{\eta})$, где $\hat{x}' \prec \hat{x}$ и $\hat{x}'' \prec \hat{x}$. Очевидно, $\hat{x}'$ и $\hat{x}''$ обладают требуемыми свойствами. Во втором случае существует такое $\hat{\eta}' \prec \hat{\eta}$, что $\hat{\eta}' \prec \hat{x}$. Из $(\dot{\xi}, \hat{\eta}') \in R$ следует, что $\hat{\eta}'$ сходится к ξ. Поэтому существуют $\hat{x}' \prec \hat{\eta}'$ и $\hat{x}'' \prec \hat{\eta}'$, обладающие требуемыми свойствами. В третьем случае существует такая подпоследовательность $\hat{y} \prec \hat{x}$ попарно различных точек, что $(\dot{\xi}, \dot{\eta}) \notin R$ для любых $\xi \neq \eta$ из $[\hat{y}]$ и $(\dot{\xi}, \hat{\eta}) \notin R$ для любых $\xi \in [\hat{y}]$ и $\hat{\eta} \in [\hat{y}]^{\mathbb{N}}$. Из условия, наложенного на подмножество $M_1 = [\hat{y}] \subset M$, следует, что множество $H = ([\hat{y}] \times [\hat{y}]) \setminus \Delta(X)$ имеет непустое пересечение с каждым окружением пространства (X, R). Отсюда в силу теоремы 2.8 следует существование такой последовательности точек $(\xi_n, \eta_n) \in H$, $n \in \mathbb{N}$, что $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in R$, где $\hat{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ и $\hat{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \ldots)$. Согласно выбору $\hat{y}$, ни одна из последовательностей $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ не обладает стационарной подпоследовательностью. Поэтому существует $(\hat{x}', \hat{x}'') \prec (\hat{\xi}, \hat{\eta})$, где $\hat{x}' \prec \hat{y}$ и $\hat{x}'' \prec \hat{y}$. Очевидно, $\hat{x}'$ и $\hat{x}''$ обладают требуемыми свойствами. ►

Из теоремы 2.27 следует, что для любой системы V окружений пространства с секвенциальной равномерностью (X, R) R-вполне ограниченное множество V-вполне ограничено.

Подмножество R-вполне ограниченного множества, конечное объединение R-вполне ограниченных множеств и предкомпактное множество R-вполне ограничены.

Предложение 2.27. *Пусть (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\hat{x}$ и $\hat{y}$ — такие последовательности в X, что $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$. Если одно из множеств $[\hat{x}]$ и $[\hat{y}]$ R-вполне ограничено, то таково и другое.* ▶

Предложение 2.28. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, а $G \subset X$. Если функция $f : G \to Y$ секвенциально равномерно непрерывна на R-вполне ограниченном $G' \subset G$, то $f(G')$ $\widetilde{R}$-вполне ограничено.* ▶

Предложение 2.29. *Пусть (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее полную систему окружений U и полную систему открытых окружений W. Если система окружений $V \subset U$ такая, что каждое $\mathrm{u} \in V$ содержит $\mathrm{v} \in V$, для которого $\mathrm{v}^2 \subset \mathrm{u}$, то замыкание V-вполне ограниченного множества V-вполне ограничено, а замыкание V-ограниченного множества V-ограничено. Если же каждое $\mathrm{u} \in U$ содержит такое $\mathrm{v} \in U$, что $\mathrm{v}^2 \subset \mathrm{u}$, то понятия R-вполне ограниченного множества, U-вполне ограниченного множества и W-вполне ограниченного множества попарно эквивалентны, а понятия U-ограниченного множества и W-ограниченного множества тоже эквивалентны.*

◀ Пусть подмножество $M \subset X$ V-вполне ограничено, а для $\mathrm{u} \in V$ окружение $\mathrm{v} \in V$ выбрано так, чтобы $\mathrm{v}^2 \subset \mathrm{u}$. Существует такое конечное $K \subset X$, что $M \subset \mathrm{v}[K]$. Согласно утверждению в) предложения 2.15, каждое окружение из V содержит открытое окружение. Поэтому в силу теоремы 2.15 $\overline{M} \subset \mathrm{v}[M] \subset \mathrm{v}[\mathrm{v}[K]] \subset$ $\subset \mathrm{v}^2[K] \subset \mathrm{u}[K]$. Следовательно, замыкание $\overline{M}$ V-вполне ограничено. Если же M V-ограничено, то для $\mathrm{u} \in V$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и конечное $K' \subset X$, такие, что $M \subset \mathrm{u}^n[K']$. Отсюда получаем $\overline{M} \subset \mathrm{u}[\mathrm{u}^n[K']] \subset \mathrm{u}^{n+1}[K']$. Значит, $\overline{M}$ V-ограничено.

Пусть каждое $\mathrm{u} \in U$ содержит такое $\mathrm{v} \in U$, что $\mathrm{v}^2 \subset \mathrm{u}$. Докажем, что тогда каждое W-вполне ограниченное подмножество $M \subset X$ R-вполне ограничено. Пусть $M_1 \subset M$. С учетом утверждения в) предложения 2.15 для $\mathrm{u} \in U$ выберем симметричное $\mathrm{w} \in W$ так, чтобы $\mathrm{w}^2 \subset \mathrm{u}$. Существует такое конечное $K \subset X$, что $M \subset \mathrm{w}[K]$ и, в частности, $M_1 \subset \mathrm{w}[K]$. Тогда $M_1 \subset \mathrm{w}[K']$ для $K' = K \cap \mathrm{w}[M_1]$. Каждому $y \in K'$ сопоставим такое $z \in M_1$, что $(y, z) \in \mathrm{w}$, и конечное множество выбранных z обозначим через K_1. Для каждого $x \in M_1$ существует такое $y \in K'$, что $(x, y) \in \mathrm{w}$, а для y существует такое $z \in K_1$, что $(y, z) \in \mathrm{w}$. Поэтому $(x, z) \in$ $\in \mathrm{w}^2 \subset \mathrm{u}$ и $(z, x) \in \mathrm{w}^2 \subset \mathrm{u}$. Значит, $M_1 \subset \mathrm{u}[K_1]$. Отсюда в силу теоремы 2.27 получаем R-вполне ограниченность M. ▶

В приведенном ниже определении 2.15 при наличии отношения секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$ секвенциально равномерная непрерывность функционала $\varphi: X\times X \to \mathbb{R}$ понимается в смысле его $(\widetilde{R},\, R_0)$-секвенциально равномерной непрерывности, где $\widetilde{R}$ — отношение секвенциальной равномерности прямого произведения $(X,\, R)\times(X,\, R)$, а R_0 — классическое отношение секвенциальной равномерности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, под ограниченностью функционала φ на $H\subset X\times X$ подразумевается классическая ограниченность числового множества $\varphi(H)$.

Определение 2.15. *Пусть $(X,\, R)$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\mathcal{F}$ — некоторая система функционалов $\varphi: X\times X\to\mathbb{R}_+$, равных нулю на $\Delta(X)$ и секвенциально равномерно непрерывных на $\Delta(X)$, каждый из которых ограничен единицей на некотором окружении пространства $(X,\, R)$. Подмножество $M\subset X$ называется $\mathcal{F}$-ограниченным, если каждый функционал $\varphi\in\mathcal{F}$ ограничен на $M\times M$.*

Подмножество $\mathcal{F}$-ограниченного множества и конечное объединение $\mathcal{F}$-ограниченных множеств $\mathcal{F}$-ограничены. Если каждый функционал из системы $\mathcal{F}$ секвенциально полунепрерывен сверху (см. определение 1.36) в смысле операции предела пространства $(X,\, R)\times(X,\, R)$, то секвенциально квазикомпактное множество $\mathcal{F}$-ограничено.

Определение 2.16. *Пусть $(X,\, R)$ — пространство с секвенциальной равномерностью. Последовательности отображений $B'_n: X\to X$ и $B''_n: X\to X$, $n\in\mathbb{N}$, называются R-эквивалентными, если для любого $x\in X$ последовательности $\hat{\xi}' = (B'_n(x): n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}'' = (B''_n(x): n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\xi}',\, \hat{\xi}'')\in R$.*

Если последовательности $\hat{B}' = (B'_n: n\in\mathbb{N})$ и $\hat{B}'' = (B''_n: n\in\mathbb{N})$ отображений R-эквивалентны и $(\hat{B}'_1,\, \hat{B}''_1)\prec(\hat{B}',\, \hat{B}'')$, то $\hat{B}'_1$ и $\hat{B}''_1$ R-эквивалентны. Обратно, если для любого $(\hat{B}'_1,\, \hat{B}''_1)\prec(\hat{B}',\, \hat{B}'')$ существует пара $(\hat{B}'_2,\, \hat{B}''_2)\prec(\hat{B}'_1,\, \hat{B}''_1)$ R-эквивалентных последовательностей $\hat{B}'_2$ и $\hat{B}''_2$, то $\hat{B}'$ и $\hat{B}''$ тоже R-эквивалентны.

Определение 2.17. *Пусть $(X,\, R)$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\mathcal{B}$ — некоторая система отображений X в себя. Подмножество $M\subset X$ называется $\mathcal{B}$-ограниченным, если для любых $(x_n: n\in\mathbb{N})\in M^{\mathbb{N}}$ и R-эквивалентных последовательностей $(B'_n: n\in\mathbb{N})$ и $(B''_n: n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{B}$ последовательности $\hat{\xi}' = (B'_n(x_n): n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}'' = (B''_n(x_n): n\in\mathbb{N})$ наход-*

ятся в отношении $(\hat{\xi}', \hat{\xi}'') \in R$.

Подмножество $\mathcal{B}$-ограниченного множества, конечное объединение $\mathcal{B}$-ограниченных множеств и конечное множество $\mathcal{B}$-ограничены.

Предложение 2.30. *Пусть* (X, R) *— пространство с секвенциальной равномерностью,* V *— некоторая система окружений этого пространства, определяющая отношение секвенциальной равномерности* R*, а* $\mathcal{B}$ *— некоторая система отображений* X *в себя. Подмножество* $M \subset X$ $\mathcal{B}$*-ограничено тогда и только тогда, когда для каждых окружения* $\mathrm{v} \in V$ *и* R*-эквивалентных последовательностей* $(B'_n : n \in \mathbb{N})$ *и* $(B''_n : n \in \mathbb{N})$ *в* $\mathcal{B}$ *существует такое* $m \in \mathbb{N}$*, что* $(B'_n(x), B''_n(x)) \in \mathrm{v}$ *для всех* $n \geqslant m$ *и* $x \in M$. ►

Теорема 2.28. *Пусть* (X, R) *— пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее полную систему окружений* U *и полную систему открытых окружений* W*, а* $\mathcal{B}$ *— некоторая система секвенциально непрерывных отображений* X *в себя. Тогда*

а) если система окружений $V = \{\mathrm{u}^3 : \mathrm{u} \in U\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* R*, то в* (X, R) *квазизамыкание* $\mathcal{B}$*-ограниченного множества* $\mathcal{B}$*-ограничено;*

б) если система окружений $\{\mathrm{w}^3 : \mathrm{w} \in W\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* R*, то в* (X, R) *замыкание* $\mathcal{B}$*-ограниченного множества* $\mathcal{B}$*-ограничено.*

◄ Пусть подмножество $M \subset X$ $\mathcal{B}$-ограничено, $x \in M^+$ и $\mathrm{v} \in V$. Выберем симметричное окружение $\mathrm{u} \in U$ так, чтобы $\mathrm{u}^3 \subset \mathrm{v}$. Рассмотрим R-эквивалентные последовательности $(B'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(B''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{B}$. Очевидно, для каждого $y \in X$ множество $\mathrm{u}[y]$ является окрестностью точки y. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ в силу секвенциальной непрерывности отображений B'_n и B''_n существует такая окрестность u_n точки x, что $B'_n(u_n) \subset \mathrm{u}[B'_n(x)]$ и $B''_n(u_n) \subset \mathrm{u}[B''_n(x)]$. Однако $M \cap u_n \neq \varnothing$. Пусть $x_n \in M \cap u_n$. Тогда $(B'_n(x_n), B'_n(x)) \in \mathrm{u}$ и $(B''_n(x_n), B''_n(x)) \in \mathrm{u}$. В силу $\mathcal{B}$-ограниченности M существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(B'_n(x_n), B''_n(x_n)) \in \mathrm{u}$ при $n \geqslant m$. Поэтому $(B'_n(x), B''_n(x)) \in \mathrm{u}^3 \subset \mathrm{v}$ для всех $x \in M^+$ и $n \geqslant m$. Отсюда следует $\mathcal{B}$-ограниченность квазизамыкания M^+. Утверждение б) доказывается аналогично. ►

Ясно, что для $\mathcal{B}$-ограниченности множества необходима и достаточна $\mathcal{B}$-ограниченность каждого его счетного подмножества, а для $\mathcal{B}$-ограниченности замыкания (квазизамыкания) множества необходима и достаточна $\mathcal{B}$-ограниченность замыкания (квазизамыкания) каждого счетного подмножества этого множества. Аналогичные утверждения верны также для понятия R-вполне ограниченного множества.

Введенные понятия ограниченности множества $\{x_i : i \in I\}$ будем использовать также для семейства $(x_i : i \in I)$.

§ 10. Функциональные пространства

1. Поточечная и равномерная сходимости. Равностепенно секвенциальная непрерывность. Равностепенно секвенциально равномерная непрерывность. Пространство, точками которого являются отображения одного множества в другое, будем называть *функциональным пространством.*

Определение 2.18. *Пусть X — непустое множество, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — пространство с операцией предела. Будем говорить, что последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ отображений X в Y сходится в точке $x_0 \in X$ к отображению $f : X \to Y$, если последовательность $(f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ сходится к $y_0 = f(x_0)$ в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. При этом если $\hat{f}$ сходится к f в каждой точке из $M \subset X$, то будем говорить, что $\hat{f}$ сходится к f поточечно на M, а f является поточечным пределом последовательности $\hat{f}$ на M.*

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех отображений множества X в Y, т. е. $\mathcal{F} = Y^X$. Отображение $\Lambda_M : \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathcal{F}}$, сопоставляющее каждой последовательности $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ множество ее поточечных пределов на $M \subset X$, является операцией предела в $\mathcal{F}$ и называется операцией предела поточечной сходимости на M, а $(\mathcal{F}, \Lambda_M)$ называется функциональным пространством поточечной сходимости на M. Очевидно, $(\mathcal{F}, \Lambda_M)$ можно представить в виде прямого произведения $(\mathcal{F}, \Lambda_M) = \prod\limits_{x \in X} (Y, \widetilde{\Lambda}_x)$, где $\widetilde{\Lambda}_x = \widetilde{\Lambda}$ при $x \in M$ и $\widetilde{\Lambda}_x$ есть слабейшая операция предела в Y при $x \in X \backslash M$. В частности, $(\mathcal{F}, \Lambda_X) = (Y, \widetilde{\Lambda})^X$. Если G — объединение некоторой системы $\mathfrak{S}$ подмножеств в X, то Λ_G есть точная нижняя граница в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ системы операций предела $\{\Lambda_M : M \in \mathfrak{S}\}$.

Пусть $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $R_M \subset \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ — подмножество таких пар $(\hat{f}, \hat{g})$ последовательностей $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g} = (g_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{F} = Y^X$, что для любой точки $x \in M \subset X$ последовательности $\hat{\xi} = (f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (g_n(x) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Легко проверить, что R_M определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности, а в $\mathcal{F}$ операцию предела Λ_M поточечной сходимости на M и называется отношением секвенциальной равномерности, соответствующим поточечной сходимости на M. Пространство $(\mathcal{F},\, R_M)$ тоже называется функциональным пространством поточечной сходимости на M.

Определение 2.19. *Пусть X — непустое множество, а $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью. Будем говорить, что последовательность $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$ отображений X в Y сходится к отображению $f : X\to Y$ равномерно на $M\subset X$, а f является ее равномерным пределом на M, если для любого $(x_n : n\in\mathbb{N})\in M^{\mathbb{N}}$ последовательности $\hat{\xi}=(f_n(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(f(x_n) : n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\in\widetilde{R}$. Если последовательность $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом множестве из некоторой системы $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X, то будем говорить, что $\hat{f}$ сходится к f равномерно на системе $\mathfrak{S}$, а f является $\mathfrak{S}$-равномерным пределом последовательности $\hat{f}$, причем такую сходимость будем называть $\mathfrak{S}$-равномерной сходимостью.*

Отображение $\Lambda_{\mathfrak{S}} : \mathcal{F}^{\mathbb{N}}\to 2^{\mathcal{F}}$, сопоставляющее каждой последовательности $\hat{f}\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ множество ее $\mathfrak{S}$-равномерных пределов, является операцией предела в $\mathcal{F}$ и называется операцией предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости, а $(\mathcal{F},\, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ называется функциональным пространством $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. В случае, когда система $\mathfrak{S}$ состоит из одного подмножества $M\subset X$, т. е. $\mathfrak{S}=\{M\}$, получается операция предела $\Lambda_{\{M\}}$ равномерной сходимости на M. В общем случае $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ является точной нижней границей в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ системы $\{\Lambda_{\{M\}} : M\in\mathfrak{S}\}$. Если множества из $\mathfrak{S}$ конечны, то $\mathfrak{S}$-равномерная сходимость совпадает с поточечной сходимостью на объединении системы $\mathfrak{S}$.

Пусть $R_{\mathfrak{S}}\subset\mathcal{F}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ — подмножество таких пар $(\hat{f},\, \hat{g})$ последовательностей $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{g}=(g_n : n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{F}$, что для любых $M\in\mathfrak{S}$ и $(x_n : n\in\mathbb{N})\in M^{\mathbb{N}}$ последовательности $\hat{\xi}= =(f_n(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(g_n(x_n) : n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\xi},\, \hat{\eta})\in\widetilde{R}$. Легко проверяется, что $R_{\mathfrak{S}}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности, а в $\mathcal{F}$ операцию предела $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ и называется отношением секвенциальной равномерности, соответствующим $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Пространство $(\mathcal{F},\, R_{\mathfrak{S}})$ тоже называется функциональным пространством $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. В случае, когда система $\mathfrak{S}$ состоит из одного подмножества $M\subset X$, т. е. $\mathfrak{S}=\{M\}$, получается отношение секвенциальной равномерности $R_{\{M\}}$, соответствующее равномерной сходимости на M. В общем случае $R_{\mathfrak{S}} = \bigcap\limits_{M\in\mathfrak{S}} R_{\{M\}}$. Если множества из $\mathfrak{S}$ конечны, то $R_{\mathfrak{S}}$ совпадает с отношением секвенциальной равномерности, соответствующим поточечной сходимости на объединении G системы $\mathfrak{S}$. Если же система $\mathfrak{S}$ конечна, то $R_{\mathfrak{S}}$ совпадает с отношением секвенциальной равномерности, соответствующим равномерной сходимости на G.

Замечание 2.2. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств множества X, $\mathfrak{S}'$ — система всех конечных объединений множеств из $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}''$ — система всех конечных или счетных подмножеств множеств из $\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{S}''' \subset \mathfrak{S}''$ — такая подсистема, что для каждого множества $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ из системы $\mathfrak{S}''$ последовательность $(x_n : n\in\mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(x_{k_n} : n\in\mathbb{N})$, задающей множество $\{x_{k_n} : n\in\mathbb{N}\}$ из системы $\mathfrak{S}'''$. Тогда, как нетрудно убедиться, $R_{\mathfrak{S}} = R_{\mathfrak{S}'} = R_{\mathfrak{S}''} = R_{\mathfrak{S}'''}$. Отсюда следует, что если (X, Λ) — пространство с операцией предела, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_1$ — системы соответственно всех секвенциально квазикомпактных и всех секвенциально компактных подмножеств в X, а $\mathfrak{S}'''$ — система всех таких множеств $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ точек из X, что последовательность $(x_n : n\in\mathbb{N})$ сходится, то $R_{\mathfrak{S}} = R_{\mathfrak{S}_1} = R_{\mathfrak{S}'''}$. Кроме того, если (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\mathfrak{S}'''$ — система всех таких множеств $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ точек из X, что последовательность $(x_n : n\in\mathbb{N})$ фундаментальна, то $R_{\mathfrak{S}} = R_{\mathfrak{S}'''}$.

Замечание 2.3. Пусть (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью; $\mathcal{F} = X^X$; $M\subset X$; $\mathcal{B}\subset\mathcal{F}$; R_X и $R_{\{M\}}$ — отношения секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующие поточечной сходимости на X и равномерной сходимости на M. Тогда R-эквивалентность последовательностей $\hat{B}' = (B'_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{B}'' = (B''_n : n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{B}$ означает $(\hat{B}', \hat{B}'')\in R_X$, а $\mathcal{B}$-ограниченность множества M означает $(\mathcal{B}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{B}^{\mathbb{N}})\cap R_X \subset R_{\{M\}}$.

Предложение 2.31. *Пусть X — непустое множество, $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\widetilde{V}$ — некоторая система окружений пространства $(Y, \widetilde{R})$, определяющая отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$. Последовательность $(f_n : n\in\mathbb{N})$ отображений X в Y тогда и только тогда сходится к отображению $f : X\to Y$ равномерно на $M\subset X$, когда для каждого $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $(f_n(x), f(x))\in\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n\geqslant m$ и $x\in M$.* ►

Теорема 2.29. *Пусть X — непустое множество, $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее полную систему окружений $\widetilde{U}$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X; $\mathcal{F}=Y^X$; $R_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости; $U_{\mathfrak{S}}$ — полная система окружений пространства $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) Если система окружений $\widetilde{V}\subset\widetilde{U}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, а $\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{v}}, M)$ для каждых $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ и $M\in\mathfrak{S}$ — множество таких $(f, g)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, что $(f(x), g(x))\in\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $x\in M$, то $\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{v}}, M)\in U_{\mathfrak{S}}$, причем система окружений $V_{\mathfrak{S}}=\{\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{v}}, M):\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}, M\in\mathfrak{S}\}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности $R_{\mathfrak{S}}$ (в случае $\widetilde{V}=\widetilde{U}$ фильтр в $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, имеющий предбазу $V_{\mathfrak{S}}$, может отличаться от $U_{\mathfrak{S}}$).

б) Если для некоторого $m\in\mathbb{N}$ система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^m: \widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ определяет в $Y^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, то система окружений $\{\mathbf{u}^m:\mathbf{u}\in U_{\mathfrak{S}}\}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности $R_{\mathfrak{S}}$.

в) Если $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую систему окружений $\widetilde{V}$, определяющую отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, что для каждого $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ существует $\widetilde{\mathrm{v}}_1\in\widetilde{V}$, удовлетворяющее включению $\widetilde{\mathrm{v}}_1^2\subset\widetilde{\mathrm{v}}$, то $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$ тоже имеет такую систему окружений $\mathcal{V}$, определяющую отношение секвенциальной равномерности $R_{\mathfrak{S}}$, что для каждого $\mathbf{v}\in\mathcal{V}$ существует $\mathbf{v}_1\in\mathcal{V}$, удовлетворяющее включению $\mathbf{v}_1^2\subset\mathbf{v}$. При этом если $\mathfrak{S}$ покрывает X, а $(Y, \widetilde{R})$ имеет операцию однозначного предела, то пространства $(Y, \widetilde{R})$ и $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$ хаусдорфовы.

г) Если $\mathfrak{S}$ покрывает X и каждое множество из $\mathfrak{S}$ конечно, а $(Y, \widetilde{R})$ хаусдорфово, то $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$ тоже хаусдорфово.

д) Если $\mathfrak{S}$ покрывает X, а $(Y, \widetilde{R})$ отделимо, то $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$ тоже отделимо.

е) Если $\mathfrak{S}$ покрывает X, а $(Y, \widetilde{R})$ имеет операцию однозначного предела, то $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$ тоже имеет операцию однозначного предела.

ж) Если $\widetilde{R}$ определяется полуметрикой $\widetilde{d}$ на Y, а $\mathfrak{S}= =\{M_n:n\in\mathbb{N}\}$, то $R_{\mathfrak{S}}$ может быть определено полуметрикой

d на $\mathcal{F}$, заданной равенством

$$d(f,\, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f,\, g)}{1 + d_n(f,\, g)}, \quad f \in \mathcal{F},\ g \in \mathcal{F},$$

где $d_n(f,\, g) = \sup\limits_{x \in M_n} \widetilde{d}(f(x),\, g(x))$ (в случае $d_n(f,\, g) = \infty$ считается $d_n(f,\, g)(1 + d_n(f,\, g))^{-1} = 1$). При этом если $\widetilde{d}$ является метрикой, а $\mathfrak{S}$ покрывает X, то d является метрикой. ▶

Замечание 2.4. В связи с утверждением а) теоремы 2.29 отметим, что для каждого окружения $\widetilde{\mathrm{u}}$ пространства $(Y,\, \widetilde{R})$ и каждого конечного подмножества $K \subset X$ множество $\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}},\, K)$ таких пар $(f,\, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, для которых $(f(x),\, g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ при всех $x \in K$, является окружением функционального пространства $(\mathcal{F},\, R_X)$ поточечной сходимости на X, причем в случае открытого окружения $\widetilde{\mathrm{u}}$ окружение $\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}},\, K)$ тоже открыто.

Теорема 2.30. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — пространство с операцией предела; $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность секвенциально непрерывных в точке $x_0 \in X$ отображений X в Y; u_{x_0} — окрестность точки x_0. Если последовательность $\hat{f}$ сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на каждом подмножестве $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset u_{x_0}$, для которого последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к x_0, то f секвенциально непрерывно в точке x_0.*

◀ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Рассмотрим сходящуюся к x_0 последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_n \in u_{x_0}$ для всех $n \geqslant m$. В силу предложения 2.31 из равномерной сходимости $\hat{f}$ к f на множестве $\{x_0\} \cup \{x_n : n \geqslant m\}$ следует существование такого $i \in \mathbb{N}$, что $(f_i(x_0),\, f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_i(x_n),\, f(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant m$. Поскольку f_i секвенциально непрерывно в точке x_0, найдется такое $n_0 \geqslant m$, что $(f_i(x_n),\, f_i(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant n_0$. Поэтому $(f(x_n),\, f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда получаем $(\hat{y},\, \dot{y}_0) \in \widetilde{R}$ для $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $y_0 = f(x_0)$. Значит, $\hat{y}$ сходится к y_0 в $(Y,\, \widetilde{R})$, а f секвенциально непрерывно в точке x_0. ▶

Теорема 2.31. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, u_0 — окружение пространства (X, R), а $M \subset X$ и $\mathcal{U} = \mathrm{u}_0[M]$. Если последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ секвенциально равномерно непрерывных на M отображений X в Y сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на $\mathcal{U}$, то f секвенциально равномерно непрерывно на M.*

◀ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Рассмотрим такие последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ в M, что $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Найдется $m \in \mathbb{N}$, для которого $(x_n, x'_n) \in \mathrm{u}_0$, $(x'_n, x_n) \in \mathrm{u}_0$ и, значит, $x_n \in \mathcal{U}$ при всех $n \geqslant m$. В силу предложения 2.31 из равномерной сходимости $\hat{f}$ к f на $\mathcal{U}$ следует существование такого $i \in \mathbb{N}$, что $(f_i(x_n), f(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_i(x'_n), f(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant m$. Поскольку f_i секвенциально равномерно непрерывно на M, найдется такое $n_0 \geqslant m$, что $(f_i(x_n), f_i(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant n_0$. Поэтому $(f(x_n), f(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда следует, что $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$ для $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y}' = (f(x'_n) : n \in \mathbb{N})$. Значит, f секвенциально равномерно непрерывно на M. ▶

Теорема 2.32. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathfrak{S}$ — система всех R-вполне ограниченных подмножеств в X; $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность отображений X в Y, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Если $\hat{f}$ сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$, то f секвенциально равномерно непрерывно на любом множестве из $\mathfrak{S}$.*

◀ Пусть $H_0 \in \mathfrak{S}$, а последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ в H_0 такие, что $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Нужно доказать, что последовательности $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y}' = (f(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$. Положим $H = [\hat{x}] \cup [\hat{x}']$. С учетом предложения 2.27 имеем, что $H \in \mathfrak{S}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Поскольку $\hat{f}$

сходится к f равномерно на H, существует такое $i\in\mathbb{N}$, что $(f_i(x_n),\ f(x_n))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_i(x'_n),\ f(x'_n))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Так как f_i секвенциально равномерно непрерывно на H_0, то существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $(f_i(x_n),\ f_i(x'_n))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n\geqslant m$. Поэтому $(f(x_n),\ f(x'_n))\in\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$ при $n\geqslant m$, т. е. $(\hat{y},\ \hat{y}')\in\widetilde{R}$. ►

Теорема 2.33. *Пусть X — непустое множество; $(Y,\ \widetilde{R})$ — полное пространство с секвенциальной равномерностью; $\mathcal{F}=Y^X$; R_M — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее поточечной сходимости на $M\subset X$. Тогда пространство $(\mathcal{F},\ R_M)$ полно.*

◄ Рассмотрим в $(\mathcal{F},\ R_M)$ фундаментальную последовательность $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$. Согласно определению R_M, для каждого $x\in M$ последовательность $\hat{y}=(f_n(x) : n\in\mathbb{N})$ фундаментальна в $(Y,\ \widetilde{R})$. Так как $(Y,\ \widetilde{R})$ полно, то $\hat{y}$ сходится к некоторому $y\in Y$. Определим отображение $f' : M\to Y$, положив $f'(x)=y$. Пусть $f\in\mathcal{F}$ — отображение, для которого $f'=f|_M$. Ясно, что $\hat{f}$ сходится к f поточечно на M. ►

Теорема 2.34. *Пусть X — непустое множество; $(Y,\ \widetilde{R})$ — полное пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{U}'=\{\widetilde{\mathrm{u}}^2 : \widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X; $\mathcal{F}=Y^X$; $R_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Тогда пространство $(\mathcal{F},\ R_{\mathfrak{S}})$ полно.*

◄ Пусть $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$ — фундаментальная последовательность в $(\mathcal{F},\ R_{\mathfrak{S}})$. Это означает, что для любой ее подпоследовательности $(f_{k_n} : n\in\mathbb{N})$ и любых $M\in\mathfrak{S}$, $(x_n : n\in\mathbb{N})\in M^{\mathbb{N}}$ последовательности $\hat{y}=(f_n(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}'=(f_{k_n}(x_n) : n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y},\ \hat{y}')\in\widetilde{R}$. Отсюда в силу полноты пространства $(Y,\ \widetilde{R})$ следует, что для любой точки $x\in G=\bigcup\limits_{M\in\mathfrak{S}} M$ последовательность $\hat{f}(x)=(f_i(x) : i\in\mathbb{N})$ сходится в $(Y,\ \widetilde{R})$. Рассмотрим такое $f\in\mathcal{F}$, что $f(x)$ для каждого $x\in G$ является пределом последовательности $\hat{f}(x)$ и $f(x)=y_0$ для всех $x\in X\backslash G$, где $y_0\in Y$ — некоторая точка. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{U}'$, причем $\widetilde{\mathrm{v}}=\widetilde{\mathrm{u}}^2$, где $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$. Поскольку для каждого $n\in\mathbb{N}$ последовательность $\hat{f}(x_n)$ сходится к $f(x_n)$, существует такое $i_n \in \mathbb{N}$, что $(f_{i_n}(x_n), f(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$, причем $i_1 < i_2 < \ldots$. В силу фундаментальности $\hat{f}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(f_n(x_n), f_{i_n}(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ при всех $n \geqslant m$. Поэтому $(f_n(x_n), f(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^2 = \widetilde{\mathrm{v}}$ для $n \geqslant m$. Отсюда следует, что последовательности $\hat{y}$ и $\hat{\zeta} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}, \hat{\zeta}) \in \widetilde{R}$. Значит, $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M. ▶

Из теорем 2.30—2.32 и 2.34 вытекают следующие следствия.

Следствие 2.7. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела; $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathcal{U}$ — окрестность подмножества $M \subset X$; $\mathfrak{S}$ — система всех таких подмножеств $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}$, что последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к некоторой точке из M; $R_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Тогда множество $\mathcal{C}_M$ всех секвенциально непрерывных на M отображений X в Y замкнуто в пространстве $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$, а при полном $(Y, \widetilde{R})$ подпространство пространства $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$, имеющее носитель $\mathcal{C}_M$, полно.* ▶

Следствие 2.8. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; u_0 — окружение пространства (X, R), а $M \subset X$ и $\mathcal{U} = \mathrm{u}_0[M]$; $R_{\{\mathcal{U}\}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее равномерной сходимости на $\mathcal{U}$. Тогда множество $\mathfrak{C}_M$ всех секвенциально равномерно непрерывных на M отображений X в Y замкнуто в пространстве $(\mathcal{F}, R_{\{\mathcal{U}\}})$, а при полном $(Y, \widetilde{R})$ подпространство пространства $(\mathcal{F}, R_{\{\mathcal{U}\}})$, имеющее носитель $\mathfrak{C}_M$, полно.* ▶

Следствие 2.9. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathfrak{S}$ — система всех R-вполне ограниченных под-*

множеств в X*;* $R_{\mathfrak{S}}$ *— отношение секвенциальной равномерности в* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$*, соответствующее* $\mathfrak{S}$*-равномерной сходимости;* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ *— множество всех отображений* X *в* Y*, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$*. Тогда множество* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ *замкнуто в пространстве* $(\mathcal{F},\, R_{\mathfrak{S}})$*, а при полном* $(Y,\, \widetilde{R})$ *подпространство пространства* $(\mathcal{F},\, R_{\mathfrak{S}})$*, имеющее носитель* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$*, полно.* ▶

Определение 2.20. *Пусть* $(X,\, \Lambda)$ *— пространство с операцией предела, а* $(Y,\, \widetilde{R})$ *— пространство с секвенциальной равномерностью. Система* F *отображений подмножества* $G \subset X$ *в* Y *называется равностепенно секвенциально непрерывной в точке* $x_0 \in G$*, если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *в* G *и любого* $(f_n : n \in \mathbb{N}) \in F^{\mathbb{N}}$ *последовательности* $\hat{\xi} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ *и* $\hat{\eta} = (f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ *находятся в отношении* $(\hat{\xi},\, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$*. Система* F *называется равностепенно секвенциально непрерывной на* $M \subset G$*, если она равностепенно секвенциально непрерывна в каждой точке из* M*. Если система* F *равностепенно секвенциально непрерывна на* G*, то она просто называется равностепенно секвенциально непрерывной.*

Определение 2.21. *Пусть* $(X,\, R)$ *и* $(Y,\, \widetilde{R})$ *— пространства с секвенциальной равномерностью. Система* F *отображений подмножества* $G \subset X$ *в* Y *называется равностепенно секвенциально равномерно непрерывной на* $M \subset G$*, если для любых* $(f_n : n \in \mathbb{N}) \in F^{\mathbb{N}}$ *и* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$*,* $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N}) \in M^{\mathbb{N}}$*, таких, что* $(\hat{x},\, \hat{x}') \in R$*, последовательности* $\hat{\xi} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ *и* $\hat{\xi}' = (f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ *находятся в отношении* $(\hat{\xi},\, \hat{\xi}') \in \widetilde{R}$*. При этом если система* F *равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на* G*, то она просто называется равностепенно секвенциально равномерно непрерывной.*

Конечная система секвенциально непрерывных (секвенциально равномерно непрерывных) на подмножестве $M \subset X$ отображений X в Y равностепенно секвенциально непрерывна (равностепенно секвенциально равномерно непрерывна) на M.

Если $\{F_i : i \in I\}$ — конечное множество систем отображений X в Y, каждая система из которых равностепенно секвенциально непрерывна (равностепенно секвенциально равномерно непрерывна) на подмножестве $M \subset X$, то объединение $F = \bigcup\limits_{i \in I} F_i$ равностепенно секвенциально непрерывно (равностепенно секвенциально равномерно непрерывно) на M.

Понятия равностепенно секвенциальной непрерывности и равностепенно секвенциально равномерной непрерывности системы отображений $\{f_i : i \in I\}$ будем использовать также для семейства $(f_i : i \in I)$.

Предложение 2.32. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела, $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\widetilde{V}$ — некоторая система окружений пространства $(Y, \widetilde{R})$, определяющая отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$. Система F отображений подмножества $G \subset X$ в Y равностепенно секвенциально непрерывна в точке $x_0 \in G$ тогда и только тогда, когда каждая ее конечная или счетная подсистема равностепенно секвенциально непрерывна в точке x_0. Кроме того, система F равностепенно секвенциально непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда для каждого $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$ существует такая окрестность u_{x_0} точки x_0 в (X, Λ), что $(f(x), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$ и $x \in G \cap u_{x_0}$.*

◀ В доказательстве нуждается второе утверждение. Пусть система отображений F равностепенно секвенциально непрерывна в точке x_0, а $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Обозначим через v множество таких $x \in G$, что $(f(x), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$. Докажем, что множество $u_{x_0} = v \cup (X \backslash G)$ является окрестностью точки x_0 в (X, Λ). Предположим противное. Тогда существует последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в $G \backslash v$, сходящаяся к x_0. Отсюда в силу определения v следует существование такого $(f_n : n \in \mathbb{N}) \in F^{\mathbb{N}}$, что $(f_n(x_n), f_n(x_0)) \notin \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \notin \widetilde{R}$ для $\hat{\xi} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$. А это противоречит условию равностепенно секвенциальной непрерывности системы F в точке x_0. Следовательно, u_{x_0} является окрестностью точки x_0 в (X, Λ). Отсюда с учетом $G \cap u_{x_0} = v$ получаем, что $(f(x), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$ и $x \in G \cap u_{x_0}$. Обратное утверждение очевидно. ▶

Предложение 2.33. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, а $\widetilde{V}$ — некоторая система окружений пространства $(Y, \widetilde{R})$, определяющая отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$. Система F отображений подмножества $G \subset X$ в Y равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на $M \subset G$ тогда и только тогда, когда каждая ее конечная или счетная подсистема равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на каждом конечном* *или счетном подмножестве в M. Кроме того, система F равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на M тогда и только тогда, когда для каждого $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$ существует такое окружение u пространства $(X,\, R)$, что $(f(x),\, f(x')) \in \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$ и $(x,\, x') \in \mathrm{u} \cap (G \times M)$.*

◀ В доказательстве нуждается второе утверждение. Пусть система отображений F равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на $M \subset G$, а $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Обозначим через v множество таких пар $(x,\, x') \in G \times M$, что $(f(x),\, f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $f \in F$. Докажем, что множество $\mathrm{u} = \mathrm{v} \cup ((X \times X) \setminus (G \times M))$ является окружением пространства $(X,\, R)$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность пар $(x_n,\, x'_n) \in \in (X \times X) \setminus \mathrm{u} = (G \times M) \setminus \mathrm{v}$, $n \in \mathbb{N}$, что последовательности $\hat{x} = = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{x},\, \hat{x}') \in R$. Отсюда в силу определения v следует существование такого $(f_n : n \in \mathbb{N}) \in F^{\mathbb{N}}$, что $(f_n(x_n),\, f_n(x'_n)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $(\hat{\xi},\, \hat{\xi}') \notin \widetilde{R}$ для $\hat{\xi} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi}' = (f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$. Это противоречит условию равностепенно секвенциально равномерной непрерывности F на M. Следовательно, u является окружением пространства $(X,\, R)$. Отсюда с учетом $\mathrm{u} \cap (G \times M) = \mathrm{v}$ получаем $(f(x),\, f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $f \in F$ и $(x,\, x') \in \mathrm{u} \cap (G \times M)$. Обратное утверждение очевидно. ▶

Докажем следующее обобщение предложения 2.19.

Предложение 2.34. *Пусть $(X,\, R)$ и $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью. Если система F отображений $G \subset X$ в Y равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на $M \subset G$, то она равностепенно секвенциально непрерывна на $G \cap M^+$ и равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на любом таком $H \subset G$, что каждое $\hat{x} \in H^{\mathbb{N}}$ находится в отношении $(\hat{x},\, \hat{x}') \in R$ с некоторым $\hat{x}' \in M^{\mathbb{N}}$.*

◀ Рассмотрим точку $x_0 \in G \cap M^+$ и сходящуюся к x_0 последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ точек $x_n \in G$, а также последовательность отображений $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$. Существует сходящаяся к x_0 последовательность $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ точек $x'_n \in M$. Ясно, что $(\hat{x},\, \dot{x}_0) \in R$, $(\hat{x}',\, \dot{x}_0) \in R$ и $(\hat{x},\, \hat{x}') \in R$. В силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности F на M для последовательностей $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{y}' = (f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y}_0 = = (f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ имеем, что $(\hat{y},\, \hat{y}') \in \widetilde{R}$ и $(\hat{y}_0,\, \hat{y}') \in \widetilde{R}$. Но тогда $(\hat{y},\, \hat{y}_0) \in \widetilde{R}$. Отсюда следует равностепенно секвенциальная непрерывность F в точке x_0. Второе утверждение очевидно. ▶

Теорема 2.35. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространства с секвенциальной равномерностью, а* F *— некоторая система отображений* $G \subset X$ *в* Y. *Тогда*

а) если система F *равностепенно секвенциально непрерывна на секвенциально компактном* $H \subset G$, *то она равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на* $G \cap \overline{H}$;

б) если система F *равностепенно секвенциально непрерывна, то она равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на каждом* $M \subset G$, *секвенциально квазикомпактном в подпространстве с носителем* G.

◀ Доказательство проводится по аналогии с теоремой 2.19. Приведем его для утверждения б). Пусть $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N}) \in F^{\mathbb{N}}$, $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N}) \in M^{\mathbb{N}}$, причем $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in R$, а $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (f_n(\xi_n) : n \in \mathbb{N})$. Нужно доказать, что $(\hat{y}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. С этой целью достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}', \hat{\eta}') \prec (\hat{y}, \hat{\eta})$ существует $(\hat{y}'', \hat{\eta}'') \prec (\hat{y}', \hat{\eta}')$ из $\widetilde{R}$. Пусть $(\hat{x}', \hat{\xi}') \prec (\hat{x}, \hat{\xi})$ соответствует $(\hat{y}', \hat{\eta}')$. Поскольку M секвенциально квазикомпактно в подпространстве с носителем G, существует такое $(\hat{x}'', \hat{\xi}'') \prec (\hat{x}', \hat{\xi}')$, что последовательность $\hat{\xi}''$ сходится к некоторой точке $x \in G$. Так как $(\hat{x}'', \hat{\xi}'') \in R$, то $\hat{x}''$ тоже сходится к x. Пусть $\hat{\xi}'' = (\xi_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (f_{k_n}(x) : n \in \mathbb{N})$, а $(\hat{y}'', \hat{\eta}'') \prec (\hat{y}', \hat{\eta}')$ соответствует $(\hat{x}'', \hat{\xi}'')$. В силу равностепенно секвенциальной непрерывности F в точке x имеем $(\hat{y}'', \hat{z}) \in \widetilde{R}$ и $(\hat{\eta}'', \hat{z}) \in \widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{y}'', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$. ▶

Теорема 2.36. *Пусть* (X, Λ) *— пространство с операцией предела,* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространство с секвенциальной равномерностью,* $f : X \to Y$ *— некоторое отображение,* $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ *— равностепенно секвенциально непрерывная в точке* $x_0 \in X$ *последовательность отображений* X *в* Y, *а* u_{x_0} *— окрестность точки* x_0. *Тогда*

а) если $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на каждом подмножестве* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset u_{x_0}$, *для которого последовательность* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *сходится к* x_0, *то* f *секвенциально непрерывно в точке* x_0;

б) если полная система окружений $\widetilde{U}$ *пространства* $(Y, \widetilde{R})$ *такая, что система окружений* $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$, *а* $\hat{f}$ *сходится к* f *поточечно на* u_{x_0}, *то* f *секвенциально непрерывно в точке* x_0.

◀ Рассмотрим сходящуюся к x_0 последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $x_n \in u_{x_0}$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Положим $y_0 = f(x_0)$ и $\hat{y} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$. Нужно доказать, что $(\hat{y}, \dot{y}_0) \in \widetilde{R}$.

(а) Пусть $\hat{z} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\zeta} = (f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$. Так как $\hat{f}$ сходится к f равномерно на $\{x_0\} \cup \{x_n : n \geqslant m\}$, то $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$ и $(\hat{\zeta}, \dot{y}_0) \in \widetilde{R}$. В силу равностепенно секвенциальной непрерывности $\hat{f}$ в точке x_0 имеем также $(\hat{z}, \hat{\zeta}) \in \widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{y}, \dot{y}_0) \in \widetilde{R}$.

(б) Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу предложения 2.32 из равностепенно секвенциальной непрерывности $\hat{f}$ в точке x_0 следует существование такого числа $n_0 \geqslant m$, что $(f_i(x_n), f_i(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant n_0$. Так как $\hat{f}$ сходится к f поточечно на u_{x_0}, то для каждого $n \geqslant n_0$ найдется такое $i_n \in \mathbb{N}$, что $(f_i(x_n), f(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_i(x_0), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $i \geqslant i_n$. Поэтому $(f(x_n), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ при $n \geqslant n_0$. Отсюда следует, что $(\hat{y}, \dot{y}_0) \in \widetilde{R}$. ▶

Теорема 2.37. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела, $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная последовательность отображений X в Y, сходящаяся к отображению $f : X \to Y$ поточечно на X. Тогда*

а) если f секвенциально непрерывно, то $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в X;

б) если полная система окружений $\widetilde{U}$ пространства $(Y, \widetilde{R})$ такая, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, то f секвенциально непрерывно и, значит, $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в X.

◀ (а) Рассмотрим секвенциально квазикомпактное подмножество $M \subset X$ и последовательность точек $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$. Нужно доказать, что $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$. С этой целью достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}', \hat{z}') \prec (\hat{y}, \hat{z})$ существует $(\hat{y}'', \hat{z}'') \prec (\hat{y}', \hat{z}')$ из $\widetilde{R}$. Пусть $\hat{y}' = (f_{k_n}(x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z}' = (f(x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$. Поскольку M секвенциально квазикомпактно, последовательность $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(x_{k_{i_n}} : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к некоторой точке $x\in X$. Положим $\hat{y}''=(f_{k_{i_n}}(x_{k_{i_n}}):n\in\mathbb{N})$, $\hat{z}''=$ $=(f(x_{k_{i_n}}):n\in\mathbb{N})$, $\hat{\zeta}=(f_{k_{i_n}}(x):n\in\mathbb{N})$ и $y=f(x)$. Так как $\hat{f}$ сходится к f в точке x, то $(\hat{\zeta},\,\dot{y})\in\widetilde{R}$. В силу секвенциальной непрерывности f и равностепенно секвенциальной непрерывности $\hat{f}$ имеем также $(\hat{z}'',\,\dot{y})\in\widetilde{R}$ и $(\hat{y}'',\,\hat{\zeta})\in\widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{y}'',\,\hat{z}'')\in\widetilde{R}$.

(б) Секвенциальная непрерывность f следует из утверждения б) теоремы 2.36. ►

Теорема 2.38. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ — пространство с операцией предела, $(Y,\,\widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V}=\{\widetilde{\mathrm{u}}^3:\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, а $\hat{f}=(f_n:n\in\mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная последовательность отображений X в Y. Тогда*

а) наибольшее подмножество $H\subset X$, на котором $\hat{f}$ поточечно сходится к секвенциально непрерывному отображению $f:X\to Y$, замкнуто в пространстве $(X,\,\Lambda)$;

б) множество $\widetilde{H}$ тех точек $x\in X$, для которых последовательность $\hat{f}(x)=(f_n(x):n\in\mathbb{N})$ фундаментальна, замкнуто в пространстве $(X,\,\Lambda)$.

◄ Для $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$ выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$.

(а) Пусть $x_0\in H^+$. В силу секвенциальной непрерывности f и равностепенно секвенциальной непрерывности $\hat{f}$ в точке x_0 существует такая окрестность u_{x_0} точки x_0, что $(f(x),\,f(x_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_n(x),\,f_n(x_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $x\in u_{x_0}$ и $n\in\mathbb{N}$. С учетом $H\cap u_{x_0}\neq\varnothing$ выберем некоторое $x\in H\cap u_{x_0}$. Поскольку $\hat{f}$ сходится к f в точке x, существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $(f_n(x),\,f(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n\geqslant m$. Поэтому $(f_n(x_0),\,f(x_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n\geqslant m$. Отсюда вытекает, что $\hat{f}$ сходится к f в точке x_0. Но тогда $x_0\in H$ и, следовательно, H замкнуто.

(б) Пусть $x\in\widetilde{H}^+$. Выберем некоторую последовательность $(x_i:i\in\mathbb{N})$ в $\widetilde{H}$, сходящуюся к x. В силу равностепенно секвенциальной непрерывности $\hat{f}$ в точке x существует такое $i\in\mathbb{N}$, что $(f_j(x_i),\,f_j(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $j\in\mathbb{N}$. По условию, последовательность $\hat{f}(x_i)$ фундаментальна. Поэтому существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $(f_n(x_i), f_k(x_i)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant m$ и $k \geqslant m$. Но тогда $(f_n(x), f_k(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{v}$ для всех $n \geqslant m$ и $k \geqslant m$. Следовательно, последовательность $\hat{f}(x)$ фундаментальна. Отсюда вытекает, что $x \in \widetilde{H}$ и, значит, $\widetilde{H}$ замкнуто. ▶

Теорема 2.39. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела; $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathcal{U}$ — окрестность подмножества $M \subset X$; $\mathfrak{S}$ — система всех таких подмножеств $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}$, что последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к некоторой точке из M; $R_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости; $\mathcal{C}_M$ — множество всех секвенциально непрерывных на M отображений X в Y; $V'_{\mathfrak{S}} = \{\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}}, H) : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}, H \in \mathfrak{S}\}$, где $\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}}, H)$ — окружение подпространства $(\mathcal{C}_M, R'_{\mathfrak{S}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$, состоящее из тех пар $(f, g) \in \mathcal{C}_M \times \mathcal{C}_M$, что $(f(x), g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $x \in H$. Если подмножество $F \subset \mathcal{C}_M$ $V'_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathcal{C}_M, R'_{\mathfrak{S}})$ или $R_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено, то оно равностепенно секвенциально непрерывно на M.*

◀ Пусть F $V'_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathcal{C}_M, R'_{\mathfrak{S}})$. Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in M$ и сходящуюся к x_0 последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x_n \in \mathcal{U}$ для всех $n \geqslant m$. Положим $H = \{x_0\} \cup \{x_n : n \geqslant m\}$. Ясно, что $H \in \mathfrak{S}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу $V'_{\mathfrak{S}}$-вполне ограниченности F для окружения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}}, H)$ пространства $(\mathcal{C}_M, R'_{\mathfrak{S}})$ существует такое конечное подмножество $Q \subset \mathcal{C}_M$, что для каждого $f \in F$ имеет место $(f, g) \in \mathbf{v}$ с некоторым $g \in Q$. Однако конечное множество отображений из $\mathcal{C}_M$ равностепенно секвенциально непрерывно на M. Поэтому существует такая окрестность $u_{x_0} \subset \mathcal{U}$ точки x_0, что $(g(x), g(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $g \in Q$ и $x \in u_{x_0}$. Поскольку $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к x_0, существует такое натуральное $n_0 \geqslant m$, что $x_n \in u_{x_0}$ для всех $n \geqslant n_0$. Для каждого $f \in F$ выберем $g \in Q$ так, чтобы $(f, g) \in \mathbf{v}$, т. е. $(f(x_0), g(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f(x_n), g(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant n_0$. Однако $(g(x_n), g(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ при $n \geqslant n_0$. Поэтому $(f(x_n), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$ и $n \geqslant n_0$. Отсюда следует равностепенно секвенциальная непрерывность F на M.

Если же F $R_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathcal{F},\, R_{\mathfrak{S}})$, то в силу теоремы 2.26 оно $V'_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathcal{C}_M,\, R'_{\mathfrak{S}})$ и, следовательно, равностепенно секвенциально непрерывно на M. ▶

Теорема 2.40. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — пространство с операцией предела; $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью; $\mathcal{U}$ — окрестность подмножества $M\subset X$; $\mathcal{C}_M$ — множество всех секвенциально непрерывных на M отображений X в Y; $\mathfrak{S}$ — система всех таких подмножеств $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}\subset\mathcal{U}$, что последовательность $(x_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к некоторой точке из M; $R'_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{C}_M^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Если подмножество $F\subset\mathcal{C}_M$ секвенциально квазикомпактно в пространстве $(\mathcal{C}_M,\, R'_{\mathfrak{S}})$, то оно равностепенно секвенциально непрерывно на M.*

◀ Рассмотрим точку $x_0\in M$ и сходящуюся к ней последовательность точек $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$. Существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $x_n\in\mathcal{U}$ для всех $n\geqslant m$. Положим $H=\{x_0\}\cup\{x_n : n\geqslant m\}$. Ясно, что $H\in\mathfrak{S}$. Пусть $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$ — последовательность в F. Нужно доказать, что последовательности $\hat{y}=(f_n(x_n) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{z}=(f_n(x_0) : n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y},\, \hat{z})\in\widetilde{R}$. С этой целью достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}',\, \hat{z}')\prec(\hat{y},\, \hat{z})$ существует $(\hat{y}'',\, \hat{z}'')\prec(\hat{y}',\, \hat{z}')$ из $\widetilde{R}$. Пусть $\hat{y}'=(f_{k_n}(x_{k_n}) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{z}'=(f_{k_n}(x_0) : n\in\mathbb{N})$. В силу секвенциальной квазикомпактности F в $(\mathcal{C}_M,\, R'_{\mathfrak{S}})$ последовательность $\hat{f}'=(f_{k_n} : n\in\mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $\hat{f}''=(f_{k_{i_n}} : n\in\mathbb{N})$, сходящейся к некоторому $f\in\mathcal{C}_M$ равномерно на каждом множестве из системы $\mathfrak{S}$ и, в частности, на множестве H. Положим $\hat{y}''=(f_{k_{i_n}}(x_{k_{i_n}}) : n\in\mathbb{N})$, $\hat{z}''=(f_{k_{i_n}}(x_0) : n\in\mathbb{N})$, $\hat{\zeta}=(f(x_{k_{i_n}}) : n\in\mathbb{N})$ и $y_0=f(x_0)$. Так как $(\hat{y}'',\, \hat{\zeta})\in\widetilde{R}$, $(\hat{z}'',\, \dot{y}_0)\in\widetilde{R}$ и $(\hat{\zeta},\, \dot{y}_0)\in\widetilde{R}$, то $(\hat{y}'',\, \hat{z}'')\in\widetilde{R}$. ▶

Теорема 2.41. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — пространство с операцией предела; $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее полную систему окружений $\widetilde{U}$ и полную систему открытых окружений $\widetilde{W}$; $\mathcal{F}=Y^X$; $\mathcal{U}$ — окрестность точки $x_0\in X$; $R_{\mathcal{U}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее поточечной сходимости на $\mathcal{U}$; $F\subset\mathcal{F}$ — равностепенно секвенциально непрерывное в точке $x_0\in X$ подмножество. Тогда*

а) если система окружений $\widetilde{V}=\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ определяет от-

ношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, *то в пространстве* $(\mathcal{F},\, R_{\mathcal{U}})$ *квазизамыкание* F^+ *равностепенно секвенциально непрерывно в точке* x_0;

б) если система окружений $\{\widetilde{\mathrm{w}}^3 : \widetilde{\mathrm{w}} \in \widetilde{W}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$, *то в пространстве* $(\mathcal{F},\, R_{\mathcal{U}})$ *замыкание* $\overline{F}$ *равностепенно секвенциально непрерывно в точке* x_0.

◀ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу предложения 2.32 существует такая окрестность $u_{x_0} \subset \mathcal{U}$ точки x_0, что $(f(x),\, f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $f \in F$ и $x \in u_{x_0}$. Рассмотрим отображение $g \in F^+$ и точку $x \in u_{x_0}$. С учетом замечания 2.4 существует такое $f \in F$, что $(f(x),\, g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f(x_0),\, g(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$. Поэтому $(g(x),\, g(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Следовательно, F^+ равностепенно секвенциально непрерывно в точке x_0. Утверждение б) доказывается аналогично. ▶

Теорема 2.42. *Пусть* $(X,\, \Lambda)$ — *пространство с операцией предела;* $(Y,\, \widetilde{R})$ — *пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений* $\widetilde{U}$, *что система окружений* $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$; F — *равностепенно секвенциально непрерывная система отображений* X *в* Y; $M \subset X$ — *всюду плотное подмножество;* R''_M *и* R''_X — *отношения секвенциальной равномерности в* $F^{\mathbb{N}}$, *соответствующие поточечной сходимости на* M *и поточечной сходимости на* X. *Тогда* $R''_M = R''_X$.

◀ Включение $R''_X \subset R''_M$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g} = (g_n : n \in \mathbb{N})$ — такие последовательности в F, что $(\hat{f},\, \hat{g}) \in R''_M$. Это означает, что для каждого $x \in M$ последовательности $\hat{f}(x) = (f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g}(x) = (g_n(x) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{f}(x),\, \hat{g}(x)) \in \widetilde{R}$. Нужно доказать, что $(\hat{f},\, \hat{g}) \in R''_X$, т. е. $(\hat{f}(x),\, \hat{g}(x)) \in \widetilde{R}$ для каждого $x \in X$. С этой целью обозначим через H множество тех $x \in X$, для которых $(\hat{f}(x),\, \hat{g}(x)) \in \widetilde{R}$, и докажем, что H замкнуто. Рассмотрим точку $x_0 \in H^+$ и сходящуюся к ней последовательность точек $x_i \in H$, $i \in \mathbb{N}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу равностепенно секвенциальной непрерывности в точке x_0 системы F существует такое $i \in \mathbb{N}$, что $(f_n(x_i), f_n(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(g_n(x_i), g_n(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $(\hat{f}(x_i), \hat{g}(x_i)) \in \widetilde{R}$, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(f_n(x_i), g_n(x_i)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \geqslant m$. Поэтому $(f_n(x_0), g_n(x_0)) \in \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n \geqslant m$. Отсюда вытекает, что $(\hat{f}(x_0), \hat{g}(x_0)) \in \widetilde{R}$ и, значит, $x_0 \in H$. Тем самым замкнутость множества H доказана. Так как $M \subset H$ и $\overline{M} = X$, то $H = X$. Следовательно, $(\hat{f}(x), \hat{g}(x)) \in \widetilde{R}$ для всех $x \in X$. ▶

Теорема 2.43. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела; $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью; F — равностепенно секвенциально непрерывная система отображений X в Y; $\mathfrak{S}$ — система всех секвенциально квазикомпактных подмножеств в X; R''_X и $R''_{\mathfrak{S}}$ — отношения секвенциальной равномерности в $F^{\mathbb{N}}$, соответствующие поточечной сходимости на X и $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Тогда $R''_X = R''_{\mathfrak{S}}$.*

◀ Включение $R''_{\mathfrak{S}} \subset R''_X$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g} = (g_n : n \in \mathbb{N})$ — такие последовательности в F, что $(\hat{f}, \hat{g}) \in R''_X$. Это означает, что для каждого $x \in X$ последовательности $\hat{f}(x) = (f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g}(x) = (g_n(x) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{f}(x), \hat{g}(x)) \in \widetilde{R}$. Нужно доказать, что $(\hat{f}, \hat{g}) \in R''_{\mathfrak{S}}$, т. е. для любого $H \in \mathfrak{S}$ и любой последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в H последовательности $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (g_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$. С этой целью достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}', \hat{z}') \prec (\hat{y}, \hat{z})$ существует $(\hat{y}'', \hat{z}'') \prec (\hat{y}', \hat{z}')$ из $\widetilde{R}$. Пусть $\hat{y}' = (f_{k_n}(x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z}' = (g_{k_n}(x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$. В силу секвенциальной квазикомпактности H последовательность $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(x_{k_{i_n}} : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к некоторой точке $x_0 \in X$. Положим $\hat{y}'' = (f_{k_{i_n}}(x_{k_{i_n}}) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{z}'' = (g_{k_{i_n}}(x_{k_{i_n}}) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{\xi} = (f_{k_{i_n}}(x_0) : n \in \mathbb{N})$, и $\hat{\eta} = (g_{k_{i_n}}(x_0) : n \in \mathbb{N})$. Так как система F равностепенно секвенциально непрерывна в точке x_0, то $(\hat{y}'', \hat{\xi}) \in \widetilde{R}$ и $(\hat{z}'', \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Однако в силу $(\hat{f}, \hat{g}) \in R''_X$ имеем также $(\hat{\xi}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{y}'', \hat{z}'') \in \widetilde{R}$. ▶

Из теорем 2.36, 2.37, 2.41 и 2.43 вытекает

Следствие 2.10. *Пусть (X, Λ) — пространство с операцией предела; $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномер-*

ностью; $\mathcal{F} = Y^X$*;* $\mathfrak{S}$ *— система всех секвенциально квазикомпактных подмножеств в* X*;* R_X *и* $R_{\mathfrak{S}}$ *— отношения секвенциальной равномерности в* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$*, соответствующие поточечной сходимости на* X *и* $\mathfrak{S}$*-равномерной сходимости;* $\mathcal{C}$ *— множество всех секвенциально непрерывных отображений* X *в* Y*;* $F \subset \mathcal{C}$ *— равностепенно секвенциально непрерывное подмножество. Тогда*

а) если F *секвенциально компактно (предкомпактно) в пространстве* $(\mathcal{F}, R_X)$*, то оно таково и в подпространстве* $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$*;*

б) если F *секвенциально квазикомпактно в подпространстве* $(\mathcal{C}, R'_X) \subset (\mathcal{F}, R_X)$*, то оно таково и в* $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}})$*;*

в) если полная система окружений $\widetilde{U}$ *пространства* $(Y, \widetilde{R})$ *такая, что система окружений* $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$*, а* F *секвенциально квазикомпактно в* $(\mathcal{F}, R_X)$*, то оно таково и в* $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}})$*;*

г) если полная система открытых окружений $\widetilde{W}$ *пространства* $(Y, \widetilde{R})$ *такая, что система окружений* $\{\widetilde{\mathrm{w}}^3 : \widetilde{\mathrm{w}} \in \widetilde{W}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$*, а* F *секвенциально относительно компактно в* $(\mathcal{F}, R_X)$*, то оно таково и в* $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}})$*, причем замыкание множества* F *в* $(\mathcal{F}, R_X)$ *совпадает с его замыканием в* $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}})$*.* ►

Предложение 2.35. *Пусть* (X, Λ) *— секвенциально компактное пространство с операцией предела;* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространство с секвенциальной равномерностью;* $\mathcal{F} = Y^X$*;* R_X *и* $R_{\{X\}}$ *— отношения секвенциальной равномерности в* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$*, соответствующие поточечной сходимости на* X *и равномерной сходимости на* X*;* $\mathcal{C}$ *— множество всех секвенциально непрерывных отображений* X *в* Y*;* $F \subset \mathcal{C}$ *— некоторое подмножество и* $T = \bigcup\limits_{f \in F} f(X)$*. Тогда*

а) если F *равностепенно секвенциально непрерывно и предкомпактно, секвенциально квазикомпактно или секвенциально компактно в пространстве* $(\mathcal{F}, R_X)$*, то множество* T *соответственно предкомпактно, секвенциально квазикомпактно или секвенциально компактно в* $(Y, \widetilde{R})$*;*

б) если F *секвенциально квазикомпактно, секвенциально компактно или секвенциально относительно компактно в подпространстве* $(\mathcal{C}, R'_{\{X\}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\{X\}})$*, то соответствующим* *свойством обладает также T в $(Y,\, \widetilde{R})$;*

в) если полная система окружений $\widetilde{U}$ пространства $(Y,\, \widetilde{R})$ такая, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, а F предкомпактно, секвенциально квазикомпактно или секвенциально относительно компактно в пространстве $(\mathcal{F},\, R_{\{X\}})$, то соответствующим свойством обладает также T в $(Y,\, \widetilde{R})$;

г) если полная система открытых окружений $\widetilde{W}$ пространства $(Y,\, \widetilde{R})$ такая, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{w}}^3 : \widetilde{\mathrm{w}} \in \widetilde{W}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, а F равностепенно секвенциально непрерывно и секвенциально относительно компактно в $(\mathcal{F},\, R_X)$, то множество T секвенциально относительно компактно в $(Y,\, \widetilde{R})$.

◀ (а) Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в T. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем, что $y_n = f_n(x_n)$ для некоторых $f_n \in F$ и $x_n \in X$.

Пусть F предкомпактно в $(\mathcal{F},\, R_X)$. Поскольку X секвенциально компактно, существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел $i_n,\ n \in \mathbb{N}$, что последовательность $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к некоторой точке $x \in X$, а последовательность $\hat{f}' = (f_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в $(\mathcal{F},\, R_X)$. Положим $\hat{y}' = (y_{i_n} : n \in \mathbb{N}) = (f_{i_n}(x_{i_n}) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z}' = (f_{i_n}(x) : n \in \mathbb{N})$. В силу равностепенно секвенциальной непрерывности F имеем $(\hat{y}',\, \hat{z}') \in \widetilde{R}$. Пусть $(\hat{y}'',\, \hat{z}'') \prec (\hat{y}',\, \hat{z}')$. Тогда $(\hat{y}'',\, \hat{z}'') \in \widetilde{R}$. Так как последовательность $\hat{z}'$ фундаментальна, то $(\hat{z}',\, \hat{z}'') \in \widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{y}',\, \hat{y}'') \in \widetilde{R}$, т. е. последовательность $\hat{y}'$ фундаментальна. Отсюда с учетом $\hat{y}' \prec \hat{y}$ следует предкомпактность T в $(Y,\, \widetilde{R})$.

Пусть теперь F секвенциально квазикомпактно в $(\mathcal{F},\, R_X)$. Тогда последовательность $\hat{f}'$ сходится к некоторому отображению $f \in \mathcal{F}$ поточечно на X. В рассматриваемом случае вместе с $(\hat{y}',\, \hat{z}') \in \widetilde{R}$ имеем $(\hat{z}',\, \dot{y}) \in \widetilde{R}$, где $y = f(x)$. Поэтому $(\hat{y}',\, \dot{y}) \in \widetilde{R}$, т. е. последовательность $\hat{y}'$ сходится к y. Следовательно, T секвенциально квазикомпактно в $(Y,\, \widetilde{R})$.

Если же F секвенциально компактно в $(\mathcal{F},\, R_X)$, то предел f последовательности $\hat{f}'$ можно выбрать из F. Но тогда $y \in T$ и, следовательно, T секвенциально компактно.

(б) Пусть F секвенциально квазикомпактно (секвенциально компактно) в $(\mathcal{C},\, R'_{\{X\}})$, а значит, и в $(\mathcal{F},\, R_X)$. В силу теоремы 2.40 F равностепенно секвенциально непрерывно. Поэтому, согласно а), множество T секвенциально квазикомпактно (секвенциально компактно).

Если же множество F секвенциально относительно компактно в $(\mathcal{C},\, R'_{\{X\}})$, то в подпространстве $(\mathcal{C},\, R'_{\{X\}})$ замыкание $\overline{F}$ секвенциально компактно. Поэтому, как уже было доказано, множество $\widetilde{T} = \bigcup\limits_{f \in \overline{F}} f(X)$ секвенциально компактно в $(Y,\, \widetilde{R})$. В силу утверждения е) теоремы 2.11 множество $\widetilde{T}$ секвенциально относительно компактно и, поскольку $T \subset \widetilde{T}$, множество T тоже секвенциально относительно компактно.

(в) Пусть F предкомпактно в $(\mathcal{F},\, R_{\{X\}})$, а значит, и в $(\mathcal{F},\, R_X)$. В рассматриваемом случае из теоремы 2.39 с учетом теоремы 2.27 следует, что F равностепенно секвенциально непрерывно. Поэтому в силу а) множество T предкомпактно.

Согласно следствию 2.7, в рассматриваемом случае $\mathcal{C}$ замкнуто в $(\mathcal{F},\, R_{\{X\}})$. Поэтому если F секвенциально квазикомпактно (секвенциально относительно компактно) в $(\mathcal{F},\, R_{\{X\}})$, то оно таково и в подпространстве $(\mathcal{C},\, R'_{\{X\}})$. Но тогда в силу б) множество T секвенциально квазикомпактно (секвенциально относительно компактно) в $(Y,\, \widetilde{R})$.

(г) Замыкание $\overline{F}$ секвенциально компактно в $(\mathcal{F},\, R_X)$ и в силу теоремы 2.41 равностепенно секвенциально непрерывно. Поэтому в силу а), множество $\widetilde{T} = \bigcup\limits_{f \in \overline{F}} f(X)$ секвенциально компактно, а значит, и секвенциально относительно компактно. Так как $T \subset \widetilde{T}$, то T секвенциально относительно компактно. ►

Докажем теорему, аналогичную *теореме Асколи* (см. [35], с. 307—311; [46], с. 477—493) и обобщающую классическую *теорему Арцела* (см. [47], с. 70—74).

Теорема 2.44. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — сепарабельное пространство с операцией предела; $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathfrak{S}$ — система всех секвенциально квазикомпактных подмножеств в X; $R_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$,* *соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости; $\mathcal{C}$ — множество всех секвенциально непрерывных отображений X в Y. Тогда для предкомпактности (секвенциальной квазикомпактности) подмножества $F \subset \mathcal{C}$ в пространстве $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$, а значит, и в подпространстве $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$ необходимо и достаточно выполнение условий*

1) для каждого $x \in X$ множество $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ предкомпактно (секвенциально квазикомпактно) в $(Y, \widetilde{R})$;

2) F равностепенно секвенциально непрерывно.

◀ Необходимость условия 1) очевидна, а необходимость условия 2) следует из теоремы 2.39. Докажем их достаточность.

Пусть выполняются условия 1) и 2). Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ в F. Пространство (X, Λ), будучи сепарабельным, содержит всюду плотное конечное или счетное подмножество $M = \{\xi_i : i \in \mathbb{N}\}$, т. е. $\overline{M} = X$.

Пусть для каждого $x \in X$ множество $F(x)$ предкомпактно в $(Y, \widetilde{R})$. В силу предкомпактности множества $\{f_n(\xi_1) : n \in \mathbb{N}\}$ последовательность $(f_n(\xi_1) : n \in \mathbb{N})$ обладает фундаментальной подпоследовательностью $(f_{k_{1n}}(\xi_1) : n \in \mathbb{N})$. Аналогично последовательность $(f_{k_{1n}}(\xi_2) : n \in \mathbb{N})$ обладает фундаментальной подпоследовательностью $(f_{k_{2n}}(\xi_2) : n \in \mathbb{N})$. Продолжая это рассуждение, для каждого $i \in \mathbb{N}$ получим фундаментальную последовательность $(f_{k_{in}}(\xi_i) : n \in \mathbb{N})$, причем $(k_{i+1,n} : n \in \mathbb{N}) \prec (k_{in} : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ последовательность $(f_{k_{nn}}(\xi_i) : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна. Так как $\overline{M} = X$, а F равностепенно секвенциально непрерывно, то в силу утверждения б) теоремы 2.38 для каждого $x \in X$ последовательность $(f_{k_{nn}}(x) : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна. Но тогда из теоремы 2.43 следует, что последовательность $\hat{f}' = (f_{k_{nn}} : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}})$, причем $\hat{f}' \prec \hat{f}$. Значит, множество F предкомпактно в $(\mathcal{C}, R'_{\mathfrak{S}})$.

Рассмотрим теперь случай, когда для каждого $x \in X$ множество $F(x)$ секвенциально квазикомпактно в $(Y, \widetilde{R})$. Очевидно, что в этом случае построенная выше последовательность $\hat{f}' = (f_{k_{nn}} : n \in \mathbb{N})$ в F такая, что для каждого $x \in X$ последовательность $(f_{k_{nn}}(x) : n \in \mathbb{N})$ сходится в $(Y, \widetilde{R})$. Рассмотрим отображение $f : X \to Y$, сопоставляющее каждому $x \in X$ некоторый предел $y \in Y$ последовательности $(f_{k_{nn}}(x) : n \in \mathbb{N})$. Таким образом, последовательность $\hat{f}'$ сходится к f поточечно на X. Но тогда в силу равностепенно секвенциальной непрерывности F

из теоремы 2.36 вытекает, что $f \in \mathcal{C}$, причем в силу теоремы 2.37 $\hat{f}'$ сходится к f равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Отсюда с учетом $\hat{f}' \prec \hat{f}$ следует секвенциальная квазикомпактность множества F в $(\mathcal{C},\, R'_{\mathfrak{S}})$. ►

Теорема 2.45. *Пусть $(X,\, R)$ и $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y,\, \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, u_0 — окружение пространства $(X,\, R)$, а $M \subset X$ и $\mathcal{U} = \mathrm{u}_0[M]$. Если равностепенно секвенциально равномерно непрерывная на M последовательность $\hat{f} = (f_n :\ n \in \mathbb{N})$ отображений X в Y сходится к отображению $f : X \to Y$ поточечно на $\mathcal{U}$, то f секвенциально равномерно непрерывно на M.*

◄ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности $\hat{f}$ на M существует такое симметричное окружение $\mathrm{u} \subset \mathrm{u}_0$ пространства $(X,\, R)$, что $(f_n(x),\, f_n(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $(x,\, x') \in \mathrm{u} \cap (X \times M)$. Так как последовательность $\hat{f}$ сходится к f поточечно на $\mathcal{U}$, то для каждого $(x,\, x') \in \mathrm{u} \cap (X \times M)$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $(f_n(x),\, f(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_n(x'),\, f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$. Поэтому $(f(x),\, f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $(x,\, x') \in \mathrm{u} \cap (X \times M)$. Отсюда в силу теоремы 2.18 следует секвенциально равномерная непрерывность f на M. ►

Теорема 2.46. *Пусть $(X,\, R)$ и $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью; u_0 — окружение пространства $(X,\, R)$, а $M \subset X$ и $\mathcal{U} = \mathrm{u}_0[M]$; $\mathfrak{S}$ — система всех R-вполне ограниченных подмножеств в X; $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность отображений X в Y. Тогда*

а) если последовательность $\hat{f}$ равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на M и сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на $\mathcal{U}$, то f секвенциально равномерно непрерывно на M;

б) если последовательность $\hat{f}$ равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на каждом множестве из $\mathfrak{S}$ и сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$, то f секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$.

◄ (а) Рассмотрим последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X и

$\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ в M, для которых $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(x_n, x'_n) \in \mathrm{u}_0$, $(x'_n, x_n) \in \mathrm{u}_0$ и, значит, $x_n \in \mathcal{U}$ для всех $n \geqslant m$. Положим $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{y}' = (f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{z} = (f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z}' = (f(x'_n) : n \in \mathbb{N})$. Однако $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$, $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$ и $(\hat{y}', \hat{z}') \in \widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{z}, \hat{z}') \in \widetilde{R}$. Следовательно, f секвенциально равномерно непрерывно на M.

(б) Для $M \in \mathfrak{S}$ рассмотрим указанные выше последовательности. Имеем, что $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$ и $(\hat{y}', \hat{z}') \in \widetilde{R}$. В силу предложения 2.27 из $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$ и $[\hat{x}'] \in \mathfrak{S}$ следует, что $[\hat{x}] \in \mathfrak{S}$. Поэтому $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$ и, значит, $(\hat{z}, \hat{z}') \in \widetilde{R}$. Следовательно, f секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. ►

Предложение 2.36. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью. Если последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ отображений $G \subset X$ в Y равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на $M \subset G$ и сходится равномерно на M к секвенциально равномерно непрерывному на M отображению $f : G \to Y$, то она сходится к f равномерно на любом таком $H \subset G$, что каждое $\hat{x} \in H^{\mathbb{N}}$ находится в отношении $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$ с некоторым $\hat{x}' \in M^{\mathbb{N}}$.* ►

Теорема 2.47. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью; U и $\widetilde{U}$ — их полные системы окружений соответственно, причем система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $M \subset X$ — U-вполне ограниченное подмножество; $\mathrm{u}_0 \in U$ и $\mathcal{U} = \mathrm{u}_0[M]$. Если последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ отображений X в Y равностепенно секвенциально равномерно непрерывна на M и сходится к отображению $f : X \to Y$ поточечно на $\mathcal{U}$, то $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M.*

◄ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу теоремы 2.45 отображение f секвенциально равномерно непрерывно на M. Поэтому с учетом равностепенно секвенциально равномерной непрерывности $\hat{f}$ на M существует такое симметричное окружение $\mathrm{u} \subset \mathrm{u}_0$ пространства (X, R), что $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_n(x), f_n(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $(x, x') \in \mathrm{u} \cap (M \times X)$ и $n \in \mathbb{N}$. Поскольку множество M U-вполне ограничено, существует такое конечное $K \subset M$, что для каждого $x \in M$ имеет место $(x, x') \in \mathrm{u}$ с некоторым $x' \in K$. Так как $K \subset \mathcal{U}$ и $\hat{f}$ сходится к f поточечно на K, то в силу конечности K существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(f_n(x'), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $x' \in K$ и $n \geqslant m$. Поэтому

$(f_n(x), f(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $x \in M$ и $n \geqslant m$. Следовательно, $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M. ►

Теорема 2.48. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; u_0 — окружение пространства (X, R), а $M \subset X$ и $\mathcal{U} = u_0[M]$; $R_{\{\mathcal{U}\}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее равномерной сходимости на $\mathcal{U}$; $\mathfrak{C}_M$ — множество всех секвенциально равномерно непрерывных на M отображений X в Y; $V'_{\{\mathcal{U}\}}$ — система тех окружений подпространства $(\mathfrak{C}_M, R'_{\{\mathcal{U}\}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\{\mathcal{U}\}})$, каждое из которых состоит из всех таких пар $(f, g) \in \mathfrak{C}_M \times \mathfrak{C}_M$, что $(f(x), g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для некоторого $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ и всех $x \in \mathcal{U}$. Если подмножество $F \subset \mathfrak{C}_M$ $V'_{\{\mathcal{U}\}}$-вполне ограничено в $(\mathfrak{C}_M, R'_{\{\mathcal{U}\}})$ или $R_{\{\mathcal{U}\}}$-вполне ограничено, то оно равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на M.*

◄ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Рассмотрим окружение $\mathbf{v} \in V'_{\{\mathcal{U}\}}$, соответствующее окружению $\widetilde{\mathrm{u}}$. Если F $V'_{\{\mathcal{U}\}}$-вполне ограничено в $(\mathfrak{C}_M, R'_{\{\mathcal{U}\}})$, то существует такое конечное $Q \subset \mathfrak{C}_M$, что для каждого $f \in F$ имеет место $(f, g) \in \mathbf{v}$ с некоторым $g \in Q$. Однако конечное множество отображений из $\mathfrak{C}_M$ равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на M. Поэтому найдется такое симметричное окружение $\mathrm{u} \subset \mathrm{u}_0$ пространства (X, R), что $(g(x), g(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $g \in Q$ и $(x, x') \in \mathrm{u} \cap (X \times M)$. Для каждого $f \in F$ выберем $g \in Q$ так, чтобы $(f, g) \in \mathbf{v}$. Тогда для любого $(x, x') \in \mathrm{u} \cap (X \times M)$ имеем $(f(x), g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$, $(f(x'), g(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(g(x), g(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$. Отсюда получаем, что $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$ и $(x, x') \in \mathrm{u} \cap (X \times M)$. Следовательно, F равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на M.

Если же F $R_{\{\mathcal{U}\}}$-вполне ограничено, то в силу теоремы 2.27 оно $V'_{\{\mathcal{U}\}}$-вполне ограничено в $(\mathfrak{C}_M, R'_{\{\mathcal{U}\}})$ и, следовательно, равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на M. ►

Теорема 2.49. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(Y, \widetilde{R})$ имеет такую* *полную систему окружений* $\widetilde{U}$, *что система окружений* $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathfrak{S}$ — *система всех* R-*вполне ограниченных подмножеств в* X; $R_{\mathfrak{S}}$ — *отношение секвенциальной равномерности в* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, *соответствующее* $\mathfrak{S}$-*равномерной сходимости;* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ — *множество всех отображений* X *в* Y, *секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$; $V'_{\mathfrak{S}} = \{\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}}, H) : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U},\ H \in \mathfrak{S}\}$, *где* $\mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}}, H)$ — *окружение подпространства* $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$, *состоящее из тех пар* $(f, g) \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}} \times \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$, *что* $(f(x), g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ *для всех* $x \in H$. *Если подмножество* $F \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ $V'_{\mathfrak{S}}$-*вполне ограничено в* $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$ *или* $R_{\mathfrak{S}}$-*вполне ограничено, то оно равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$.

◀ Пусть $H_0 \in \mathfrak{S}$, а последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ в H_0 такие, что $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Рассмотрим произвольную последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ в F. Нужно доказать, что последовательности $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y}' = (f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$. Положим $H = [\hat{x}] \cup [\hat{x}']$. С учетом предложения 2.27 имеем $H \in \mathfrak{S}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Если F $V'_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$, то для окружения $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\widetilde{\mathrm{u}}, H)$ пространства $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$ существует такое конечное подмножество $Q \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$, что для каждого $f \in F$ имеет место $(f, g) \in \mathbf{v}$ с некоторым $g \in Q$, т. е. $(f(x), g(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $x \in H$. Однако конечное множество отображений из $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$ и, в частности, на $[\hat{x}']$. Поэтому существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(g(x_n), g(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $g \in Q$ и $n \geqslant m$. Для каждого f_i, $i \in \mathbb{N}$, выберем $g_i \in Q$ так, чтобы $(f_i, g_i) \in \mathbf{v}$. Тогда $(f_i(x_n), g_i(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f_i(x'_n), g_i(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$. Однако $(g_i(x_n), g_i(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m$. Поэтому $(f_i(x_n), f_i(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant m$. В частности, $(f_n(x_n), f_n(x'_n)) \in \widetilde{\mathrm{v}}$ при $n \geqslant m$. Значит, $(\hat{y}, \hat{y}') \in \widetilde{R}$.

Если же F $R_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$, то в силу теоремы 2.27 оно $V'_{\mathfrak{S}}$-вполне ограничено в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$ и, следовательно, равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. ▶

Теорема 2.50. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ — *пространства с секвенциальной равномерностью;* u_0 — *окружение пространства* (X, R), *а* $M \subset X$ *и* $\mathcal{U} = u_0[M]$; $\mathfrak{C}_M$ — *множество всех* *секвенциально равномерно непрерывных на M отображений X в Y; $R'_{\{\mathcal{U}\}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathfrak{C}_M^{\mathbb{N}}$, соответствующее равномерной сходимости на $\mathcal{U}$. Если подмножество $F \subset \mathfrak{C}_M$ секвенциально квазикомпактно в пространстве $(\mathfrak{C}_M, R'_{\{\mathcal{U}\}})$, то оно равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на M.*

◀ Пусть последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ в M такие, что $(\hat{x}, \hat{x}') \in R$. Существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(x_n, x'_n) \in \mathrm{u}_0$, $(x'_n, x_n) \in \mathrm{u}_0$ и, значит, $x_n \in \mathcal{U}$ для всех $n \geqslant m$. Рассмотрим произвольную последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ в F. Нужно доказать, что последовательности $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$. С этой целью достаточно доказать, что для каждого $(\hat{y}', \hat{z}') \prec (\hat{y}, \hat{z})$ существует $(\hat{y}'', \hat{z}'') \prec (\hat{y}', \hat{z}')$ из $\widetilde{R}$. Пусть $\hat{y}' = (f_{k_n}(x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z}' = (f_{k_n}(x'_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$. В силу секвенциальной квазикомпактности F в $(\mathfrak{C}_M, R'_{\{\mathcal{U}\}})$ последовательность $(f_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(f_{k_{i_n}} : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к некоторому $f \in \mathfrak{C}_M$ равномерно на $\mathcal{U}$. Положим $\hat{y}'' = (f_{k_{i_n}}(x_{k_{i_n}}) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{z}'' = (f_{k_{i_n}}(x'_{k_{i_n}}) : n \in \mathbb{N})$, $\hat{\zeta} = (f(x_{k_{i_n}}) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (f(x'_{k_{i_n}}) : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, имеем $(\hat{y}'', \hat{\zeta}) \in \widetilde{R}$, $(\hat{z}'', \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$ и $(\hat{\zeta}, \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{y}'', \hat{z}'') \in \widetilde{R}$. ▶

Аналогично доказывается

Теорема 2.51. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью; $\mathfrak{S}$ — система всех R-вполне ограниченных подмножеств в X; $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ — множество всех отображений X в Y, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из $\mathfrak{S}$; $R'_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Тогда секвенциально квазикомпактное в пространстве $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$ подмножество равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$.* ▶

Теорема 2.52. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью; $\mathcal{F} = Y^X$; u_0 — окружение пространства (X, R), а $M \subset X$ и $\mathcal{U} = \mathrm{u}_0[M]$; $R_{\mathcal{U}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее поточечной сходимости на $\mathcal{U}$; $F \subset \mathcal{F}$ — равностепенно секвенциально равномерно непрерывное на M подмножество. Тогда* *а) если полная система окружений* $\widetilde{U}$ *пространства* $(Y, \widetilde{R})$ *такая, что система окружений* $\widetilde{V}=\{\widetilde{\mathrm{u}}^3:\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$*, то в пространстве* $(\mathcal{F}, R_{\mathcal{U}})$ *квазизамыкание* F^+ *равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на* M*;*

б) если полная система открытых окружений $\widetilde{W}$ *пространства* $(Y, \widetilde{R})$ *такая, что система окружений* $\{\widetilde{\mathrm{w}}^3:\widetilde{\mathrm{w}}\in\widetilde{W}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$*, то в пространстве* $(\mathcal{F}, R_{\mathcal{U}})$ *замыкание* $\overline{F}$ *равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на* M*.*

◀ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$. В силу предложения 2.33 существует такое симметричное окружение $\mathrm{u}\subset u_0$ пространства (X, R), что $(f(x), f(x'))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $f\in F$ и $(x, x')\in\mathrm{u}\cap(X\times M)$. Рассмотрим отображение $g\in F^+$ и пару $(x, x')\in\mathrm{u}\cap(X\times M)$. Так как $x\in\mathrm{u}[M]\subset\mathcal{U}$ и $x'\in M\subset\mathcal{U}$, то с учетом замечания 2.4 существует такое $f\in F$, что $(f(x), g(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ и $(f(x'), g(x'))\in\widetilde{\mathrm{u}}$. Поэтому $(g(x), g(x'))\in\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$. Следовательно, F^+ равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на M. Утверждение б) доказывается аналогично. ▶

Теорема 2.53. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные системы окружений* U *и* $\widetilde{U}$ *соответственно, причем система окружений* $\widetilde{V}=\{\widetilde{\mathrm{u}}^3:\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$*;* $\mathfrak{S}$ *— некоторая система* U*-вполне ограниченных подмножеств в* X*, покрывающая* X*;* F *— система отображений* X *в* Y*, равностепенно секвенциально равномерно непрерывная на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$*;* R''_X *и* $R''_{\mathfrak{S}}$ *— отношения секвенциальной равномерности в* $F^{\mathbb{N}}$*, соответствующие поточечной сходимости на* X *и* $\mathfrak{S}$*-равномерной сходимости. Тогда* $R''_X=R''_{\mathfrak{S}}$*.*

◀ Включение $R''_{\mathfrak{S}}\subset R''_X$ очевидно. Докажем обратное включение. Пусть $\hat{f}=(f_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{g}=(g_n:n\in\mathbb{N})$ — такие последовательности в F, что $(\hat{f}, \hat{g})\in R''_X$. Это означает, что для каждого $x\in X$ последовательности $\hat{f}(x)=(f_n(x):n\in\mathbb{N})$ и $\hat{g}(x)= =(g_n(x):n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{f}(x), \hat{g}(x))\in\widetilde{R}$. Нужно доказать, что $(\hat{f}, \hat{g})\in R''_{\mathfrak{S}}$, т. е. для любого $H\in\mathfrak{S}$ и любой последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в H последовательности $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (g_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$. Пусть $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. В силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности F на H существует такое окружение $\mathrm{u} \in U$, что $(f(x), f(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $f \in F$ и $(x, x') \in \mathrm{u} \cap (H \times X)$. Поскольку H U-вполне ограничено, существует такое конечное $K \subset X$, что для каждого $x \in H$ имеет место $(x, x') \in \mathrm{u}$ с некоторым $x' \in K$. Так как $(\hat{f}(x'), \hat{g}(x')) \in \widetilde{R}$ для каждого $x' \in K$, то в силу конечности K существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(f_n(x'), g_n(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $x' \in K$ и $n \geqslant m$. Однако для каждого $x \in H$ и всех $n \in \mathbb{N}$ имеют место $(f_n(x), f_n(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(g_n(x), g_n(x')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ с некоторым $x' \in K$. Поэтому $(f_n(x), g_n(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $x \in H$ и $n \geqslant m$. В частности, $(f_n(x_n), g_n(x_n)) \in \widetilde{\mathrm{v}}$ при $n \geqslant m$. Значит, $(\hat{y}, \hat{z}) \in \widetilde{R}$. ▶

Из теорем 2.45, 2.47, 2.52 и 2.53 вытекает

Следствие 2.11. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные системы окружений U и $\widetilde{U}$ соответственно, причем система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система U-вполне ограниченных подмножеств в X, покрывающая X; R_X и $R_{\mathfrak{S}}$ — отношения секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующие поточечной сходимости на X и $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости; $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ — множество всех отображений X в Y, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из $\mathfrak{S}$; $F \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ — подмножество, равностепенно секвенциально равномерно непрерывное на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Тогда*

а) если F предкомпактно, секвенциально квазикомпактно или секвенциально компактно в пространстве $(\mathcal{F}, R_X)$, то оно обладает соответствующим свойством также в подпространстве $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}}) \subset (\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$;

б) если полная система открытых окружений $\widetilde{\widetilde{W}}$ пространства $(Y, \widetilde{R})$ такая, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{w}}^3 : \widetilde{\mathrm{w}} \in \widetilde{\widetilde{W}}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$, а F секвенциально относительно компактно в $(\mathcal{F}, R_X)$, то оно таково и в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$, причем замыкание множества F в $(\mathcal{F}, R_X)$ совпадает с его замыканием в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}, R'_{\mathfrak{S}})$. ▶

Предложение 2.37. *Пусть (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$— пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные систе-*

мы окружений U *и* $\widetilde{U}$ *соответственно;* $\mathfrak{C}$ *— множество всех секвенциально равномерно непрерывных отображений* X *в* Y*;* $R'_{\{X\}}$ *— отношение секвенциальной равномерности в* $\mathfrak{C}^{\mathbb{N}}$*, соответствующее равномерной сходимости на* X*;* $V'_{\{X\}}$ *— система тех окружений пространства* $(\mathfrak{C},\, R'_{\{X\}})$*, каждое из которых состоит из всех таких пар* $(f,\, g)\in\mathfrak{C}\times\mathfrak{C}$*, что* $(f(x),\, g(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ *для некоторого* $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ *и всех* $x\in X$*;* $F\subset\mathfrak{C}$ *— некоторое подмножество и* $T=\bigcup\limits_{f\in F} f(X)$*. Тогда*

а) если X U*-вполне ограничено, а* F $V_{\{X\}}$*-вполне ограничено, то* T $\widetilde{U}'$*-вполне ограничено, где* $\widetilde{U}'=\{\widetilde{\mathrm{u}}^2:\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$*;*

б) если X *предкомпактно в* $(X,\, R)$*, а* F *секвенциально квазикомпактно в* $(\mathfrak{C},\, R'_{\{X\}})$ *или же* F *предкомпактно в* $(\mathfrak{C},\, R'_{\{X\}})$ *и равностепенно секвенциально равномерно непрерывно, то* T *предкомпактно в* $(Y,\, \widetilde{R})$*.*

◀ (а) Пусть $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{U}'$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^2\subset\widetilde{\mathrm{v}}$. Рассмотрим окружение $\mathbf{v}\in V'_{\{X\}}$, соответствующее окружению $\widetilde{\mathrm{u}}$. Поскольку F $V'_{\{X\}}$-вполне ограничено, существует такое конечное $Q\subset\mathfrak{C}$, что для каждого $f\in F$ имеет место $(f,\, g)\in\mathbf{v}$ с некоторым $g\in Q$. Однако конечное множество отображений из $\mathfrak{C}$ равностепенно секвенциально равномерно непрерывно. Поэтому существует такое окружение $\mathrm{u}\in U$, что $(g(x),\, g(x'))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $g\in Q$ и $(x,\, x')\in\mathrm{u}$. В силу U-вполне ограниченности X существует такое конечное $K\subset X$, что для каждого $x\in X$ имеет место $(x,\, \xi)\in\mathrm{u}$ с некоторым $\xi\in K$. Обозначим $T'=\{g(\xi):g\in Q,\, \xi\in K\}$. Очевидно, что подмножество $T'\subset Y$ конечно. Пусть $y_0\in T$. Тогда $y_0=f_0(x_0)$ для некоторых $f_0\in F$ и $x_0\in X$. Выберем $\xi_0\in K$ и $g_0\in Q$ так, чтобы $(x_0,\, \xi_0)\in\mathrm{u}$ и $(f_0,\, g_0)\in\mathbf{v}$. Имеем $(f_0(x_0),\, g_0(x_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ и $(g_0(x_0),\, g_0(\xi_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}$. Поэтому $(f_0(x_0),\, g_0(\xi_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}^2$. Отсюда в силу $\widetilde{\mathrm{u}}^2\subset\widetilde{\mathrm{v}}$ для точек y_0 и $\zeta_0=g_0(\xi_0)\in T'$ получаем $(y_0,\, \zeta_0)\in\widetilde{\mathrm{v}}$ и $(\zeta_0,\, y_0)\in\widetilde{\mathrm{v}}$. А это означает, что множество T $\widetilde{U}'$-вполне ограничено.

(б) Пусть множество F секвенциально квазикомпактно. Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ в T. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем, что $y_n=f_n(x_n)$ для некоторых $f_n\in F$ и $x_n\in X$. Так как X предкомпактно, а F секвенциально квазикомпактно, то найдется такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел i_n, $n\in\mathbb{N}$, что последовательность

$\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в $(X,\ R)$, а $\hat{f}' = (f_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к некоторому $f \in \mathfrak{C}$ в $(\mathfrak{C},\ R'_{\{X\}})$. Очевидно, последовательности $\hat{y}' = (y_{i_n} : n \in \mathbb{N}) = (f_{i_n}(x_{i_n}) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\zeta} = (f(x_{i_n}) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}',\ \hat{\zeta}) \in \widetilde{R}$. Однако в силу секвенциально равномерной непрерывности отображения f последовательность $\hat{\zeta}$ фундаментальна. Поэтому в силу предложения 2.18 последовательность $\hat{y}'$ тоже фундаментальна. Таким образом, $\hat{y}$ обладает фундаментальной подпоследовательностью $\hat{y}'$ и, следовательно, множество T предкомпактно.

Если же F предкомпактно и равностепенно секвенциально равномерно непрерывно, то строго возрастающая последовательность натуральных чисел i_n, $n \in \mathbb{N}$, может быть выбрана так, чтобы обе последовательности $\hat{x}'$ и $\hat{f}'$ были фундаментальными. Докажем, что и в этом случае последовательность $\hat{y}'$ фундаментальна. Рассмотрим произвольную подпоследовательность $\hat{y}'' \prec \hat{y}'$. Пусть $\hat{y}'' = (y_{i_{j_n}} : n \in \mathbb{N}) = (f_{i_{j_n}}(x_{i_{j_n}}) : n \in \mathbb{N})$. В силу фундаментальности $\hat{f}'$ последовательности $\hat{y}'$ и $\hat{\eta} = (f_{i_{j_n}}(x_{i_n}) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y}',\ \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Последовательности $\hat{x}'$ и $\hat{x}'' = (x_{i_{j_n}} : n \in \mathbb{N})$ тоже находятся в отношении $(\hat{x}',\ \hat{x}'') \in R$. Поэтому в силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности F имеем $(\hat{y}'',\ \hat{\eta}) \in \widetilde{R}$. Следовательно, $(\hat{y}',\ \hat{y}'') \in \widetilde{R}$. А это означает, что последовательность $\hat{y}'$ фундаментальна, а множество T предкомпактно. ►

Докажем еще одно обобщение теоремы Арцела.

Теорема 2.54. *Пусть $(X,\ R)$ и $(Y,\ \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, причем $(X,\ R)$ сепарабельно, а $(Y,\ \widetilde{R})$ имеет такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathfrak{S}$ — система всех R-вполне ограниченных подмножеств в X; $R_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости; $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ — множество всех отображений X в Y, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Тогда для предкомпактности (секвенциальной квазикомпактности) подмножества $F \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ в пространстве $(\mathcal{F},\ R_{\mathfrak{S}})$, а значит, и в подпространстве $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}},\ R'_{\mathfrak{S}}) \subset (\mathcal{F},\ R_{\mathfrak{S}})$ необходимо и достаточно выполнение условий*

1) для каждого $x \in X$ множество $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ пред-

компактно (секвенциально квазикомпактно) в $(Y,\, \widetilde{R})$;

2) F равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$.

◀ Необходимость условия 1) очевидна, а необходимость условия 2) следует из теоремы 2.49. Докажем их достаточность.

Пусть выполняются условия 1) и 2). Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ в F. При помощи рассуждений, сделанных в доказательстве теоремы 2.44, легко доказывается существование такой подпоследовательности $\hat{f}' = (f_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ последовательности $\hat{f}$, что для каждого $x \in X$ последовательность $\hat{f}'(x) = (f_{k_n}(x) : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в $(Y,\, \widetilde{R})$. Отсюда в силу теоремы 2.53 вытекает, что подпоследовательность $\hat{f}'$ фундаментальна в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}},\, R'_{\mathfrak{S}})$. Следовательно, F предкомпактно в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}},\, R'_{\mathfrak{S}})$. Кроме того, в случае, когда для каждого $x \in X$ множество $F(x)$ секвенциально квазикомпактно в $(Y,\, \widetilde{R})$, последовательность $\hat{f}'(x)$ сходится в $(Y,\, \widetilde{R})$. Поэтому $\hat{f}'$ сходится к некоторому отображению $f \in \mathcal{F}$ поточечно на X. В силу теоремы 2.45 $f \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$, а в силу теоремы 2.47 $\hat{f}'$ сходится к f равномерно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Значит, F секвенциально квазикомпактно в $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}},\, R'_{\mathfrak{S}})$. ▶

Аналогично доказывается

Теорема 2.55. *Пусть $(X,\, R)$ и $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, имеющие полные системы окружений U и $\widetilde{U}$ соответственно, причем $(X,\, R)$ сепарабельно, а система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система U-вполне ограниченных подмножеств в X, покрывающая X; $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ — множество всех отображений X в Y, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из $\mathfrak{S}$; $R'_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Тогда для предкомпактности (секвенциальной квазикомпактности) подмножества $F \subset \mathfrak{C}_{\mathfrak{S}}$ в пространстве $(\mathfrak{C}_{\mathfrak{S}},\, R'_{\mathfrak{S}})$ достаточно выполнение условий*

1) для каждого $x \in X$ множество $\{f(x) : f \in F\}$ предкомпактно (секвенциально квазикомпактно) в $(Y,\, \widetilde{R})$;

2) F равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. ▶

Введем теперь понятие равномерной ограниченности системы отображений и докажем несколько утвеждений.

Определение 2.22. *Пусть* X — *непустое множество,* $(Y, \widetilde{R})$ — *пространство с секвенциальной равномерностью, а* $\widetilde{\mathcal{B}}$ — *некоторая система отображений* Y *в себя. Отображение* $f: X \to Y$ *называется* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограниченным на* $M \subset X$*, если* $f(M)$ $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено в* $(Y, \widetilde{R})$*. Система* F *отображений* X *в* Y *называется* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограниченной на* M*, если* $\bigcup\limits_{f \in F} f(M)$ $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено в* $(Y, \widetilde{R})$*. Отображение* f *называется* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограниченным на системе* $\mathfrak{S}$ *подмножеств в* X*, если оно* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$*. Система отображений* F *называется* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограниченной на системе* $\mathfrak{S}$*, если она* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничена на каждом множестве из* $\mathfrak{S}$*.*

Определение 2.23. *Пусть* (X, R) *и* $(Y, \widetilde{R})$ — *пространства с секвенциальной равномерностью, а* $\mathcal{B}$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}$ — *некоторые системы отображений* X *в себя и* Y *в себя соответственно. Отображение* X *в* Y *называется* $(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})$*-ограниченным, если оно* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено на каждом* $\mathcal{B}$*-ограниченном подмножестве в* X*. Система отображений* X *в* Y *называется* $(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})$*-равномерно ограниченной, если она* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничена на каждом* $\mathcal{B}$*-ограниченном подмножестве в* X*.*

Введенные понятия ограниченности и равномерной ограниченности системы отображений $\{f_i : i \in I\}$ будем использовать также для семейства $(f_i : i \in I)$.

Предложение 2.38. *Пусть* X — *непустое множество,* $(Y, \widetilde{R})$ — *пространство с секвенциальной равномерностью,* $\widetilde{V}$ — *некоторая система окружений этого пространства, определяющая отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$*, а* $\widetilde{\mathcal{B}}$ — *некоторая система отображений* Y *в себя. Отображение* X *в* Y *тогда и только тогда* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено на* $M \subset X$*, когда оно* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено на каждом счетном подмножестве в* M*. Система* F *отображений* X *в* Y *тогда и только тогда* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничена на* M*, когда каждая ее конечная или счетная подсистема* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничена на каждом конечном или счетном подмножестве в* M*. Кроме того, система отображений* F $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничена на* M *тогда и* *только тога, когда для каждого окружения* $\widetilde{\mathrm{u}}$ *пространства* $(Y, \widetilde{R})$ *и каждой пары* $\widetilde{R}$*-эквивалентных последовательностей* $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$ *и* $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ *в* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *существует такое* $m \in \mathbb{N}$, *что* $(\widetilde{B}'_n(f(x)), \widetilde{B}''_n(f(x))) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ *для всех* $n \geqslant m$, $f \in F$ *и* $x \in M$. ►

Теорема 2.56. *Пусть* X *— непустое множество;* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее полную систему окружений* $\widetilde{U}$ *и полную систему открытых окружений* $\widetilde{W}$*;* $\widetilde{\mathcal{B}}$ *— некоторая система секвенциально непрерывных отображений* Y *в себя;* $\mathcal{F} = Y^X$*;* R_M *— отношение секвенциальной равномерности, соответствующее поточечной сходимости на* $M \subset X$*;* $F \subset \mathcal{F}$ *—* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограниченное на* M *подмножество. Тогда*

а) если система окружений $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$, *то в пространстве* $(\mathcal{F}, R_M)$ *квазизамыкание* F^+ $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничено на* M*;*

б) если система окружений $\{\widetilde{\mathrm{w}}^3 : \widetilde{\mathrm{w}} \in \widetilde{W}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$, *то в пространстве* $(\mathcal{F}, R_M)$ *замыкание* $\overline{F}$ $\widetilde{\mathcal{B}}$*-равномерно ограничено на* M.

◄ Обозначим $T = \bigcup\limits_{f \in F} f(M)$, $T' = \bigcup\limits_{f \in F^+} f(M)$, $\widetilde{T} = \bigcup\limits_{f \in \overline{F}} f(M)$. По условию, множество T $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено.

(а) Пусть $g \in F^+$ и $x \in X$. Существует такая последовательность отображений $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, что последовательность точек $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $g(x)$. Так как $f_n(x) \in T$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $g(x) \in T^+$. Поэтому $T' \subset T^+$. В силу утверждения а) теоремы 2.28 множество T^+ $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено. Но тогда T' тоже $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено. Значит, множество F^+ $\widetilde{\mathcal{B}}$-равномерно ограничено на M.

(б) Пусть $h \in \overline{F}$, $x \in X$, а $\widetilde{v}_y$ — открытая окрестность точки $y = h(x)$ в пространстве $(Y, \widetilde{R})$. Множество V_h таких $f \in \mathcal{F}$, для которых $f(x) \in \widetilde{v}_y$, является открытой окрестностью для h в пространстве $(\mathcal{F}, R_M)$. Поэтому $F \cap V_h \neq \varnothing$. Рассмотрим некоторое $f_0 \in F \cap V_h$. Так как $f_0(x) \in T \cap \widetilde{v}_y$, то $T \cap \widetilde{v}_y \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $h(x) \in \overline{T}$ и, значит, $\widetilde{T} \subset \overline{T}$. Однако в силу утверждения б) теоремы 2.28 множество $\overline{T}$ $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено. Но тогда $\widetilde{T}$ тоже $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено. Следовательно, множество $\overline{F}$ $\widetilde{\mathcal{B}}$-равномерно ограничено на M. ►

Теорема 2.57. *Пусть X — непустое множество; $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окружений $\widetilde{V}=\{\widetilde{\mathrm{u}}^3:\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$; $\widetilde{\mathcal{B}}$ — равностепенно секвенциально равномерно непрерывная система отображений Y в себя; $\hat{f}=(f_n:n\in\mathbb{N})$ — последовательность $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограниченных на $M\subset X$ отображений X в Y, сходящаяся к отображению $f:X\to Y$ равномерно на M. Тогда отображение f $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено на M, а последовательность $\hat{f}$ $\widetilde{\mathcal{B}}$-равномерно ограничена на M.*

◀ Пусть $\widetilde{\mathrm{v}}\in\widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}}\in\widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$. Рассмотрим $\widetilde{R}$-эквивалентные последовательности $(\widetilde{B}'_n:n\in\mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n:n\in\mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$. В силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности системы отображений $\widetilde{\mathcal{B}}$ существует такое $\widetilde{\mathrm{u}}_0\in\widetilde{U}$, что $(\widetilde{B}(y),\, \widetilde{B}(y'))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}$ и $(y,\, y')\in\widetilde{\mathrm{u}}_0$. Поскольку $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M, найдется такое $i\in\mathbb{N}$, что $(f_i(x),\, f(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}_0$ для всех $x\in M$. Поэтому $(\widetilde{B}'_n(f_i(x)),\, \widetilde{B}'_n(f(x)))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ и $(\widetilde{B}''_n(f_i(x)),\, \widetilde{B}''_n(f(x)))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $x\in M$. В силу $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограниченности на M отображения f_i найдется такое $m\in\mathbb{N}$, что $(\widetilde{B}'_n(f_i(x)),\, \widetilde{B}''_n(f_i(x)))\in\widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n\geqslant m$ и $x\in M$. Но тогда $(\widetilde{B}'_n(f(x)),\, \widetilde{B}''_n(f(x)))\in\widetilde{\mathrm{u}}^3\subset\widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $n\geqslant m$ и $x\in M$. Отсюда следует, что f $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено на M.

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n:n\in\mathbb{N})$ в M. Так как $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M, то последовательности $\hat{y}=(f_n(x_n):n\in\mathbb{N})$ и $\hat{z}=(f(x_n):n\in\mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{y},\, \hat{z})\in\widetilde{R}$. Положим $\hat{\zeta}'=(\widetilde{B}'_n(f_n(x_n)):n\in\mathbb{N})$, $\hat{\zeta}''= =(\widetilde{B}''_n(f_n(x_n)):n\in\mathbb{N})$, $\hat{\eta}'=(\widetilde{B}'_n(f(x_n)):n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}''=(\widetilde{B}''_n(f(x_n)): n\in\mathbb{N})$. Из равностепенно секвенциально равномерной непрерывности $\widetilde{\mathcal{B}}$ следует, что $(\hat{\zeta}',\, \hat{\eta}')\in\widetilde{R}$ и $(\hat{\zeta}'',\, \hat{\eta}'')\in\widetilde{R}$. Поскольку f $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено на M, имеем также $(\hat{\eta}',\, \hat{\eta}'')\in\widetilde{R}$. Поэтому $(\hat{\zeta}',\, \hat{\zeta}'')\in\widetilde{R}$. Отсюда следует $\widetilde{\mathcal{B}}$-равномерная ограниченность $\hat{f}$ на M. ▶

Из теорем 2.34 и 2.57 вытекает

Следствие 2.12. *Пусть X — непустое множество; $(Y, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений $\widetilde{U}$, что система окруже-*

ний $\{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$; $\widetilde{\mathcal{B}}$ *— равностепенно секвенциально равномерно непрерывная система отображений* Y *в себя;* $\mathfrak{S}$ *— некоторая система подмножеств в* X; $\mathcal{F} = Y^X$; $R_{\mathfrak{S}}$ *— отношение секвенциальной равномерности в* $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$*, соответствующее* $\mathfrak{S}$*-равномерной сходимости. Тогда множество* $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$ *всех* $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограниченных на системе* $\mathfrak{S}$ *отображений* X *в* Y *замкнуто в пространстве* $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$*, а при полном* $(Y, \widetilde{R})$ *подпространство пространства* $(\mathcal{F}, R_{\mathfrak{S}})$*, имеющее носитель* $\mathcal{F}_{\mathfrak{S}}$*, полно.* ▶

Предложение 2.39. *Пусть* (X, Λ) *— пространство с операцией предела;* $(Y, \widetilde{R})$ *— пространство с секвенциальной равномерностью, имеющее такую полную систему окружений* $\widetilde{U}$*, что система окружений* $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}^3 : \widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}\}$ *определяет отношение секвенциальной равномерности* $\widetilde{R}$; $\widetilde{\mathcal{B}}$ *— равностепенно секвенциально равномерно непрерывная система отображений* Y *в себя;* F *— равностепенно секвенциально непрерывная система отображений* X *в* Y*. Тогда множество тех* $x \in X$*, для которых множество* $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ $\widetilde{\mathcal{B}}$*-ограничено, замкнуто в пространстве* (X, Λ).

◀ Пусть $x_0 \in H^+$ и $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Выберем симметричное окружение $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ так, чтобы $\widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$. Рассмотрим $\widetilde{R}$-эквивалентные последовательности $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$. В силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности $\widetilde{\mathcal{B}}$ существует такое окружение $\widetilde{\mathrm{u}}_0 \in \widetilde{U}$, что $(\widetilde{B}(y), \widetilde{B}(y')) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $\widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{B}}$ и $(y, y') \in \widetilde{\mathrm{u}}_0$. Поскольку система F равностепенно секвенциально непрерывна в точке x_0, существует такая окрестность u_{x_0} точки x_0, что $(f(x), f(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_0$ для всех $f \in F$ и $x \in u_{x_0}$. Очевидно, $H \cap u_{x_0} \neq \varnothing$. Пусть $x \in H \cap u_{x_0}$. Тогда $(\widetilde{B}'_n(f(x)), \widetilde{B}'_n(f(x_0))) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ и $(\widetilde{B}''_n(f(x)), \widetilde{B}''_n(f(x_0))) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как множество $F(x)$ $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено, то в силу предложения 2.30 существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $(\widetilde{B}'_n(f(x)), \widetilde{B}''_n(f(x))) \in \widetilde{\mathrm{u}}$ для всех $f \in F$ и $n \geqslant m$. Поэтому $(\widetilde{B}'_n(f(x_0)), \widetilde{B}''_n(f(x_0))) \in \widetilde{\mathrm{u}}^3 \subset \widetilde{\mathrm{v}}$ для всех $f \in F$ и $n \geqslant m$. Отсюда в силу предложения 2.30 получаем $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограниченность $F(x_0)$. Следовательно, $x_0 \in H$. Значит, H замкнуто в (X, Λ). ▶

Для отображений $f : X \to Y$, $B : X \to X$ и $\widetilde{B} : Y \to Y$ композиции $fB = f \circ B$ и $\widetilde{B} f = \widetilde{B} \circ f$ являются отображениями множества X в Y и определяются равенствами $(fB)(x)=f(B(x))$ и $(\widetilde{B}f)(x)=\widetilde{B}(f(x))$ для всех $x\in X$.

Теорема 2.58. *Пусть $(X,\,R)$ и $(Y,\,\widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью; $\mathcal{F}'$ — такое множество секвенциально равномерно непрерывных отображений X в Y, что $Y=\bigcup\limits_{f\in\mathcal{F}'} f(X)$; $\widetilde{\mathcal{B}}$ — некоторая система таких отображений $\widetilde{B}:Y\to Y$, что $\widetilde{B}f\in\mathcal{F}'$ для всех $f\in\mathcal{F}'$; $\mathcal{A}$ — система тех отображений $A:\mathcal{F}'\to\mathcal{F}'$, каждое из которых определяется с помощью некоторого $\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}$ равенством $A(f)=\widetilde{B}f$, $f\in\mathcal{F}'$; $\mathcal{B}$ — такая система отображений X в себя, что для каждой последовательности $(f_n:n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{F}'$ и каждой пары $\widetilde{R}$-эквивалентных последовательностей $(\widetilde{B}'_n:n\in\mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n:n\in\mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$ существуют R-эквивалентные последовательности $(B'_n:n\in\mathbb{N})$ и $(B''_n:n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{B}$, удовлетворяющие равенствам $\widetilde{B}'_nf_n=f_nB'_n$ и $\widetilde{B}''_nf_n=f_nB''_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$; $\mathfrak{S}$ — система всех $\mathcal{B}$-ограниченных подмножеств в X; $R'_{\mathfrak{S}}$ — отношение секвенциальной равномерности в ${\mathcal{F}'}^{\mathbb{N}}$, соответствующее $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости. Тогда*

а) каждому отображению $A\in\mathcal{A}$ соответствует единственное отображение $\widetilde{B}:Y\to Y$, удовлетворяющее равенству $A(f)=\widetilde{B}f$ для всех $f\in\mathcal{F}'$, причем $\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}$;

б) последовательности $(A'_n:n\in\mathbb{N})$ и $(A''_n:n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{A}$ $R'_{\mathfrak{S}}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда соответствующие последовательности $(\widetilde{B}'_n:n\in\mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n:n\in\mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$ $\widetilde{R}$-эквивалентны;

в) подмножество $F\subset\mathcal{F}'$ $\mathcal{A}$-ограничено в пространстве $(\mathcal{F}',\,R'_{\mathfrak{S}})$ тогда и только тогда, когда оно $(\mathcal{B},\,\widetilde{\mathcal{B}})$-равномерно ограничено;

г) всякое равностепенно секвенциально равномерно непрерывное подмножество $F\subset\mathcal{F}'$ $(\mathcal{B},\,\widetilde{\mathcal{B}})$-равномерно ограничено, а значит, и $\mathcal{A}$-ограничено в $(\mathcal{F}',\,R'_{\mathfrak{S}})$.

◀ (а) Пусть $A\in\mathcal{A}$. По условию, существует такое $\widetilde{B}\in\widetilde{\mathcal{B}}$, что $A(f)=\widetilde{B}f$ при всех $f\in\mathcal{F}'$. Допустим для отображения $\widetilde{B}':Y\to Y$ тоже $A(f)=\widetilde{B}'f$ при всех $f\in\mathcal{F}'$. Тогда $\widetilde{B}(f(x))=\widetilde{B}'(f(x))$ для всех $f\in\mathcal{F}'$ и $x\in X$. Так как, по условию, $Y=\bigcup\limits_{f\in\mathcal{F}'} f(X)$, то для каждого $y \in Y$ существуют такие $x \in X$ и $f \in \mathcal{F}'$, что $y = f(x)$. Поэтому $\widetilde{B}(y) = \widetilde{B}'(y)$ для всех $y \in Y$ и, значит, $\widetilde{B} = \widetilde{B}'$.

(б) Пусть $(A'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(A''_n : n \in \mathbb{N})$ — $R'_{\mathfrak{S}}$-эквивалентные последовательности в $\mathcal{A}$, а $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ — соответствующие им последовательности в $\widetilde{\mathcal{B}}$. Для $y \in Y$ выберем $x \in X$ и $f \in \mathcal{F}'$ так, чтобы $y = f(x)$. Так как последовательности $\hat{\eta}' = ((A'_n(f))(x) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = ((A''_n(f))(x) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$, а в силу $(A'_n(f))(x) = \widetilde{B}'_n(f(x)) = \widetilde{B}'_n(y)$ и $(A''_n(f))(x) = \widetilde{B}''_n(f(x)) = \widetilde{B}''_n(y)$ имеем также $\hat{\eta}' = (\widetilde{B}'_n(y) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = (\widetilde{B}''_n(y) : n \in \mathbb{N})$, то последовательности $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ $\widetilde{R}$-эквивалентны.

Пусть, обратно, $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ — $\widetilde{R}$-эквивалентные последовательности в $\widetilde{\mathcal{B}}$, а $(A'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(A''_n : n \in \mathbb{N})$ — соответствующие им последовательности в $\mathcal{A}$. Рассмотрим отображение $f \in \mathcal{F}'$ и $\mathcal{B}$-ограниченную последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. По условию, существуют R-эквивалентные последовательности $(B'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(B''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{B}$, удовлетворяющие равенствам $\widetilde{B}'_n f = f B'_n$ и $\widetilde{B}''_n f = f B''_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\widetilde{B}'_n(f(x_n)) = f(B'_n(x_n))$ и $\widetilde{B}''_n(f(x_n)) = f(B''_n(x_n))$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как для последовательностей $\hat{\xi}' = (B'_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi}'' = (B''_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ имеем, что $(\hat{\xi}', \hat{\xi}'') \in R$, то в силу секвенциально равномерной непрерывности отображения f последовательности $\hat{\eta}' = (f(B'_n(x_n)) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = (f(B''_n(x_n)) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$. Однако $\hat{\eta}' = (\widetilde{B}'_n(f(x_n)) : n \in \mathbb{N}) = ((A'_n(f))(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = (\widetilde{B}''_n(f(x_n)) : n \in \mathbb{N}) = ((A''_n(f))(x_n) : n \in \mathbb{N})$. Поэтому последовательности $\hat{\zeta}' = (A'_n(f) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\zeta}'' = (A''_n(f) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\zeta}', \hat{\zeta}'') \in R'_{\mathfrak{S}}$. Значит, последовательности $(A'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(A''_n : n \in \mathbb{N})$ $R'_{\mathfrak{S}}$-эквивалентны.

(в) Пусть подмножество $F \subset \mathcal{F}'$ $\mathcal{A}$-ограничено в $(\mathcal{F}', R'_{\mathfrak{S}})$, а $M \in \mathfrak{S}$. Докажем, что объединение $T = \bigcup\limits_{f \in F} f(M)$ $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограничено в $(Y, \widetilde{R})$. Для последовательности точек $y_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, существуют такие последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в M и $(f_n : n \in \mathbb{N})$ в F, что $y_n = f_n(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим $\widetilde{R}$-эквивалентные последовательности $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$, а также соответствующие последовательности $(A'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(A''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{A}$, которые, согласно б), $R'_{\mathfrak{S}}$-эквивалентны. В силу $\mathcal{A}$-ограниченности множества F последовательности $\hat{\zeta}' = (A'_n(f_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\zeta}'' = (A''_n(f_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\zeta}', \hat{\zeta}'') \in R'_{\mathfrak{S}}$. Это означает, что последовательности $\hat{\eta}' = ((A'_n(f_n))(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = ((A''_n(f_n))(x_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$. Так как $(A'_n(f_n))(x_n) = \widetilde{B}'_n(f_n(x_n)) = \widetilde{B}'_n(y_n)$ и $(A''_n(f_n))(x_n) = = \widetilde{B}''_n(f_n(x_n)) = \widetilde{B}''_n(y_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{\eta}' = (\widetilde{B}'_n(y_n) :\ n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = (\widetilde{B}''_n(y_n) : n \in \mathbb{N})$. Отсюда с учетом $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$ получаем $\widetilde{\mathcal{B}}$-ограниченность T и $(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})$-равномерную ограниченность F.

Пусть, обратно, подмножество $F \subset \mathcal{F}'$ $(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})$-равномерно ограничено, а $M \in \mathfrak{S}$. Рассмотрим последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в M и $(f_n : n \in \mathbb{N})$ в F, а также $R'_{\mathfrak{S}}$-эквивалентные последовательности $(A'_n : n \in \mathbb{N})$, $(A''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{A}$ и соответствующие им $\widetilde{R}$-эквивалентные последовательности $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$, $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$. Имеем, что $A'_n(f_n) = \widetilde{B}'_n f_n$ и $A''_n(f_n) = \widetilde{B}''_n f_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу $\widetilde{\mathcal{B}}$-равномерной ограниченности F на M последовательности $\hat{\eta}' = (\widetilde{B}'_n(f_n(x_n)) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = (\widetilde{B}''_n(f_n(x_n)) :\ n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$. Однако $\widetilde{B}'_n(f_n(x_n)) = (A'_n(f_n))(x_n)$ и $\widetilde{B}''_n(f_n(x_n)) = (A''_n(f_n))(x_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\hat{\eta}' = ((A'_n(f_n))(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = ((A''_n(f_n))(x_n) :\ n \in \mathbb{N})$. Поэтому в силу $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$ последовательности $\hat{\zeta}' = (A'_n(f_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\zeta}'' = (A''_n(f_n) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\zeta}', \hat{\zeta}'') \in R'_{\mathfrak{S}}$. Это означает, что множество F $\mathcal{A}$-ограничено в $(\mathcal{F}', R'_{\mathfrak{S}})$.

(г) Рассмотрим последовательность отображений $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}$-ограниченную последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, и $\widetilde{R}$-эквивалентные последовательности $(\widetilde{B}'_n : n \in \mathbb{N})$, $(\widetilde{B}''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{\mathcal{B}}$. По условию, существуют R-эквивалентные последовательности $(B'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(B''_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{B}$, для которых $\widetilde{B}'_n f_n = f_n B'_n$ и $\widetilde{B}''_n f_n = f_n B''_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Для $\hat{\xi}' = (B'_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\xi}'' = = (B''_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ имеем, что $(\hat{\xi}', \hat{\xi}'') \in R$. В силу равностепенно секвенциально равномерной непрерывности F последовательности $\hat{\eta}' = (f_n(B'_n(x_n)) : n \in \mathbb{N}) = (\widetilde{B}'_n(f_n(x_n)) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta}'' = = (f_n(B''_n(x_n)) : n \in \mathbb{N}) = (\widetilde{B}''_n(f_n(x_n)) : n \in \mathbb{N})$ находятся в отношении $(\hat{\eta}', \hat{\eta}'') \in \widetilde{R}$. Отсюда вытекает $(\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}})$-равномерная ограниченность F. ▶

2. Сходимости почти всюду и по внешней мере. Равномерные сходимости почти всюду и по внешней мере. Обозначим через $\overline{\mathbb{R}}_+$ расширенную числовую неотрицательную полуось, т. е. $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0;\, \infty]$. Классическую операцию предела в $\overline{\mathbb{R}}_+$ обозначим через lim и сходимость последовательности чисел $r_n \in \overline{\mathbb{R}}_+$, $n \in \mathbb{N}$, к $r \in \overline{\mathbb{R}}_+$ запишем в виде $\lim\limits_n r_n = r$.

Внешней мерой на множестве X будем называть всякий такой функционал $\mu^* : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, что $\mu^*(\varnothing) = 0$ и $\mu^*(A) \leqslant \leqslant \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ для любой последовательности подмножеств $A_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, и любого $A \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. При этом число $\mu^*(B)$ будем называть внешней мерой подмножества $B \subset X$.

Очевидно, $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$ для любых $A \subset B \subset X$. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$ подмножество $A_n \subset X$ такое, что $\mu^*(A_n) = 0$, то $\mu^*(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = 0$.

Замечание 2.5. При помощи внешней меры μ^* на множестве X можно определить полуметрику d на 2^X, положив

$$d(M,\, G) = \frac{d^*(M,\, G)}{1 + d^*(M,\, G)}, \quad M \subset X,\ G \subset X,$$

где $d^*(M,\, G) = \mu^*((M \backslash G) \cup (G \backslash M))$ (считается $d(M,\, G) = 1$ при $d^*(M,\, G) = \infty$).

Определение 2.24. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X, $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — пространство с операцией предела, а $\mathcal{F} = Y^X$. Будем говорить, что последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ сходится к $f \in \mathcal{F}$ почти всюду на $X_0 \subset X$, а f является для $\hat{f}$ пределом (точнее — псевдопределом) почти всюду на X_0, если $\mu^*(\{x \in X_0 : f(x) \notin \widetilde{\Lambda}(\hat{f}(x))\}) = 0$, где $\hat{f}(x) = (f_n(x) : n \in \mathbb{N})$. Кроме того, будем говорить, что $\hat{f}$ сходится к f на X_0 по внешней мере, а f является для $\hat{f}$ пределом на X_0 по внешней мере, если каждая подпоследовательность последовательности $\hat{f}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к f почти всюду на X_0.*

Отображение $\Lambda : \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathcal{F}}$ определим, считая $f \in \Lambda(\hat{f})$ для $f \in \mathcal{F}$ и $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, если f является для $\hat{f}$ пределом почти всюду на X_0. Пусть E — множество таких $M \subset X_0$, что $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$, а Λ_M для каждого $M \in E$ — операция предела в $\mathcal{F}$ поточечной сходимости на M. Очевидно, $\Lambda(\hat{f}) = \bigcup\limits_{M \in E} \Lambda_M(\hat{f})$, $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Легко проверить, что Λ является операцией псевдопредела в $\mathcal{F}$ (см. замечание 1.10).

Отображение $\Lambda_0 : \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathcal{F}}$ определим, считая $f \in \Lambda_0(\hat{f})$ для $f \in \mathcal{F}$ и $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, если f является для $\hat{f}$ пределом на X_0 по внешней мере. Нетрудно проверить, что Λ_0 является операцией предела в $\mathcal{F}$. Кроме того, Λ_0 есть сильнейшая операция предела, удовлетворяющая условию $\Lambda \leqslant \Lambda_0$, и является точной верхней границей системы $\{\Lambda_M : M \in E\}$ в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ всех операций предела в $\mathcal{F}$. Пусть $\hat{\mathcal{F}}$ и $\hat{\mathcal{F}}_0$ — множества таких $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda(\hat{f}) \neq \varnothing$ и $\Lambda_0(\hat{f}) \neq \varnothing$ соответственно. Тогда $\hat{\mathcal{F}}_0$ состоит из таких $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{f}' \prec \hat{f}$ существует $\hat{f}'' \prec \hat{f}'$ из $\hat{\mathcal{F}}$ и $\bigcap\{\Lambda(\hat{f}') : \hat{f}' \prec \hat{f},\ \hat{f}' \in \hat{\mathcal{F}}\} \neq \varnothing$. При этом $\Lambda_0(\hat{f}) = \bigcap\{\Lambda(\hat{f}') : \hat{f}' \prec \hat{f},\ \hat{f}' \in \hat{\mathcal{F}}\}$, $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}$. В частности, $\Lambda_0(\hat{f}) = \Lambda(\hat{f})$ для всех $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}$. Пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_0)$ называется функциональным пространством сходимости на X_0 по внешней мере.

Предложение 2.40. *В функциональном пространстве $(\mathcal{F}, \Lambda_0)$ сходимости на X_0 по внешней мере квазизамыкание множества F получается присоединением к F всех функций из $\mathcal{F}$, являющихся пределами почти всюду на X_0 последовательностей функций из F. Кроме того, множество F замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все функции из $\mathcal{F}$, являющиеся пределами почти всюду на X_0 последовательностей функций из F.* ▶

Если $\widetilde{\Lambda}$ — равномерная операция предела в Y, то Λ является равномерной операцией псевдопредела в $\mathcal{F}$ (см. замечание 2.1), а Λ_0 — равномерной операцией предела, причем $\Lambda_0(\hat{f}) = \Lambda(\hat{f}')$ для любых $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}_0$ и $\hat{f}' \prec \hat{f}$, $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{F}}$. Пусть $\widetilde{R}$ — отношение секвенциальной равномерности в $Y^{\mathbb{N}}$, определяющее в Y равномерную операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Обозначим через R множество таких пар $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что $\mu^*(\{x \in X_0 : (\hat{f}(x), \hat{g}(x)) \notin \widetilde{R}\}) = 0$. Множество R определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной псевдоравномерности (см. замечание 2.1), а в $\mathcal{F}$ операцию псевдопредела Λ. Сильнейшее отношение секвенциальной квазиравномерности R_0 в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее условию $R \subset R_0$, является отношением секвенциальной равномерности и определяет в $\mathcal{F}$ равномерную операцию предела Λ_0. Пусть E — множество таких $M\subset X_0$, что $\mu^*(X_0\setminus M)=0$, а R_M для каждого $M\in E$ — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее поточечной сходимости на M. Тогда $R=\bigcup\limits_{M\in E} R_M$, а R_0 является точной верхней границей системы $\{R_M : M\in E\}$ в частично упорядоченном множестве $\mathcal{R}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$ всех отношений секвенциальной квазиравномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, а также в множестве $\mathcal{R}_0(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$ всех отношений секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. При этом R_0 есть множество таких пар $(\hat{f},\,\hat{g})\in\mathcal{F}^{\mathbb{N}}\times\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{f}',\,\hat{g}')\prec(\hat{f},\,\hat{g})$ существует $(\hat{f}'',\,\hat{g}'')\prec(\hat{f}',\,\hat{g}')$ из R. Пространство с секвенциальной равномерностью $(\mathcal{F},\,R_0)$ тоже называется функциональным пространством сходимости на X_0 по внешней мере.

Предложение 2.41. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X; $X_0\subset X$ — такое подмножество, что $X_0=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$, где $B_n\subset B_{n+1}$ и $\mu^*(B_n)<\infty$ для всех $n\in\mathbb{N}$; $(Y,\,\widetilde{R})$ — полуметризуемое пространство с секвенциальной равномерностью, причем $\{\widetilde{\mathrm{u}}_n : n\in\mathbb{N}\}$ — его конечная или счетная фундаментальная система окружений, удовлетворяющая условиям $\widetilde{\mathrm{u}}_n^{-1}=\widetilde{\mathrm{u}}_n$ и $\widetilde{\mathrm{u}}_{n+1}^2\subset\widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$; $\mathcal{F}=Y^X$; R_0 — отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее сходимости на X_0 по внешней мере. Тогда конечная или счетная система $\{\mathbf{u}_n : n\in\mathbb{N}\}$ окружений в $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, где*

$$\mathbf{u}_n=\{(f,\,g)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F} : \mu^*(\{x\in B_n : (f(x),\,g(x))\notin\widetilde{\mathrm{u}}_n\})<2^{-n}\},\quad (1)$$

определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности $R'\subset R_0$ и является фундаментальной системой окружений полуметризуемого пространства $(\mathcal{F},\,R')$. При этом если $\widetilde{R}$ определяется полуметрикой $\widetilde{d}$ на Y, то R' может быть определено полуметрикой d на $\mathcal{F}$, заданной равенством

$$d(f,\,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,\,g)}{1+d_n(f,\,g)},\quad f\in\mathcal{F},\ g\in\mathcal{F},\qquad (2)$$

где $d_n(f,\,g)=\mu^*(\{x\in B_n : \widetilde{d}(f(x),\,g(x))\geqslant 2^{-n}\})$ (при $d_n(f,\,g)=\infty$ считается $d_n(f,\,g)(1+d_n(f,\,g))^{-1}=1$). Кроме того, если пространство $(Y,\,\widetilde{R})$ полно, то всякая фундаментальная в

$(\mathcal{F},\, R')$ *последовательность сходится в* $(\mathcal{F},\, R_0)$.

◀ Очевидно, для каждого $n\in\mathbb{N}$ подмножество $\mathbf{u}_n\subset\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, определенное равенством (1), содержит диагональ $\Delta(\mathcal{F})$ и, значит, является окружением в $\mathcal{F}\times\mathcal{F}$. Кроме того, $\mathbf{u}_n^{-1}=\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{u}_{n+1}^2\subset\mathbf{u}_n$. Поэтому система окружений $\{\mathbf{u}_n : n\in\mathbb{N}\}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ некоторое отношение секвенциальной равномерности R' и является фундаментальной системой окружений полуметризуемого пространства $(\mathcal{F},\, R')$. Докажем, что $R'\subset R_0$. Пусть $(\hat f,\, \hat g)\in R'$, где $\hat f=(f_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat g=(g_n : n\in\mathbb{N})$. По аналогии с *теоремой Рисса* (см. [51], с. 96) докажем, что в R_0 существует пара $(\hat\varphi,\, \hat h)\prec(\hat f,\, \hat g)$. Для каждых $n\in\mathbb{N}$ и $k\in\mathbb{N}$ обозначим

$$G_{nk}=\{x\in B_n : (f_k(x),\, g_k(x))\notin\widetilde{\mathrm{u}}_n\}. \tag{3}$$

В силу $(\hat f,\, \hat g)\in R'$ последовательность пар $(f_k,\, g_k)$, $k\in\mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении $\mathbf{u}_n$, $n\in\mathbb{N}$, пространства $(\mathcal{F},\, R')$. Поэтому для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется такое $i_n\in\mathbb{N}$, что $\mu^*(G_{nk})<2^{-n}$ для всех $k\geqslant i_n$, причем $i_1<i_2<\ldots$. В частности, $\mu^*(G_{ni_n})<2^{-n}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ обозначим $H_k=\bigcup\limits_{n\geqslant k} G_{ni_n}$. Положим $Q=\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Для любого $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$\mu^*(Q)\leqslant\mu^*(H_k)\leqslant\sum_{n\geqslant k}2^{-n}=2^{1-k}.$$

Поэтому $\mu^*(Q)=0$. Обозначим $\hat\varphi=(f_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ и $\hat h=(g_{i_n} : n\in\mathbb{N})$. Пусть $x_0\in X_0\backslash Q$. Тогда $x_0\in B_m$ и $x_0\notin H_m$ для некоторого $m\in\mathbb{N}$. Следовательно, $x_0\notin G_{ni_n}$ для всех $n\geqslant m$. Отсюда вытекает, что $(f_{i_n}(x_0),\, g_{i_n}(x_0))\in\widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $n\geqslant m$. Поскольку $\widetilde{\mathrm{u}}_1\supset\widetilde{\mathrm{u}}_2\supset\ldots$, последовательность пар $(f_{i_n}(x_0),\, g_{i_n}(x_0))$, $n\in\mathbb{N}$, почти вся лежит в каждом окружении $\widetilde{\mathrm{u}}_i$, $i\in\mathbb{N}$, пространства $(Y,\, \widetilde R)$. Это означает, что $(\hat\varphi(x_0),\, \hat h(x_0))\in\widetilde R$, где $\hat\varphi(x_0)=$ $=(f_{i_n}(x_0) : n\in\mathbb{N})$ и $\hat h(x_0)=(g_{i_n}(x_0) : n\in\mathbb{N})$. Отсюда получаем

$$\{x\in X_0 : (\hat\varphi(x),\, \hat h(x))\notin\widetilde R\}\subset Q,$$

$$\mu^*(\{x\in X_0 : (\hat\varphi(x),\, \hat h(x))\notin\widetilde R\})=0.$$

Поэтому $(\hat\varphi,\, \hat h)\in R_0$. Так как в силу $(\hat f,\, \hat g)\in R'$ имеем также $(\hat f',\, \hat g')\in R'$, то из доказанного вытекает, что для каждого $(\hat f',\, \hat g')\prec(\hat f,\, \hat g)$ существует $(\hat f'',\, \hat g'')\prec(\hat f',\, \hat g')$ из R_0. Но тогда $(\hat f,\, \hat g)\in R_0$ и, следовательно, $R'\subset R_0$.

Утверждение, относящееся к полуметрике d, очевидно.

Пусть пространство $(Y,\ \widetilde{R})$ полно. Рассмотрим в $(\mathcal{F},\ R')$ фундаментальную последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, $\hat{f}$ обладает такой подпоследовательностью $\hat{f}' = (f_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, что $(f_{k_n},\ f_{k_\nu}) \in \mathbf{u}_n$ для всех $\nu \geqslant n$ и $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\mu^*(\{x \in B_n : (f_{k_n}(x),\ f_{k_\nu}(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_n\}) < 2^{-n}. \tag{4}$$

Для каждых натуральных i, n и ν обозначим

$$H_{in\nu} = \{x \in B_i : (f_{k_n}(x),\ f_{k_\nu}(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_i\}.$$

В силу (4) при $i \leqslant n \leqslant \nu$ имеем $\mu^*(H_{in\nu}) < 2^{-n}$. Докажем неравенство

$$\mu^*(\bigcup_{\nu \geqslant n} H_{in\nu}) < 2^{1-n}, \quad i < n. \tag{5}$$

Так как $\widetilde{\mathrm{u}}_{p+1}^2 \subset \widetilde{\mathrm{u}}_p$, $p \in \mathbb{N}$, то при $i < n < \nu$ имеют место включения

$$H_{in\nu} \subset\ H_{n-1,n\nu} \subset \bigcup_{p=n}^{\nu-1} H_{pp,p+1} \subset \bigcup_{p \geqslant n} H_{pp,p+1}.$$

Отсюда с учетом $H_{inn} = \varnothing$ получаем $\bigcup\limits_{\nu \geqslant n} H_{in\nu} \subset \bigcup\limits_{p \geqslant n} H_{pp,p+1}$. Поэтому в силу (4)

$$\mu^*(\bigcup_{\nu \geqslant n} H_{in\nu}) \leqslant \mu^*(\bigcup_{p \geqslant n} H_{pp,p+1}) \leqslant \sum_{p \geqslant n} \mu^*(H_{pp,p+1}) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p \geqslant n} 2^{-p} = 2^{1-n}.$$

Тем самым (5) доказано. Заметим, что при каждом $j \in \mathbb{N}$ для $x \in B_j$ последовательность точек $f_{k_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, тогда и только тогда фундаментальна в $(Y,\ \widetilde{R})$, когда $x \in M_j \subset B_j$, где

$$M_j = \bigcap_{i \geqslant j} \bigcup_{s \geqslant 1} \bigcap_{n \geqslant s} \bigcap_{\nu \geqslant n} \{x \in B_i : (f_{k_n}(x), f_{k_\nu}(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_i\} =$$

$$= \bigcap_{i \geqslant j} \bigcup_{s \geqslant 1} \bigcap_{n \geqslant s} \bigcap_{\nu \geqslant n} (B_i \backslash H_{in\nu}).$$

Очевидно,

$$B_j \backslash M_j \subset \bigcup_{i\geqslant j} \bigcap_{s\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu} \subset \bigcup_{i\geqslant 1} \bigcap_{s\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu},$$

$$\bigcup_{j\geqslant 1} (B_j \backslash M_j) \subset \bigcup_{i\geqslant 1} \bigcap_{s\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}.$$

В силу (5) для всех $i \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu^*(\bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) \leqslant \sum_{n\geqslant s} \mu^*(\bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) \leqslant \sum_{n\geqslant s} 2^{1-n} = 2^{2-s}.$$

Поэтому

$$\mu^*(\bigcap_{s\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) = 0, \quad i \in \mathbb{N},$$

$$\mu^*(\bigcup_{j\geqslant 1} (B_j \backslash M_j)) \leqslant \sum_{i\geqslant 1} \mu^*(\bigcap_{s\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) = 0.$$

Положим $M = \bigcup_{j\geqslant 1} M_j$. Тогда

$$X_0 \backslash M = (\bigcup_{j\geqslant 1} B_j) \backslash (\bigcup_{j\geqslant 1} M_j) \subset \bigcup_{j\geqslant 1} (B_j \backslash M_j).$$

Следовательно, $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$. Таким образом, для каждого $x \in M$ последовательность точек $f_{k_n}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна в $(Y, \widetilde{R})$ и в силу полноты $(Y, \widetilde{R})$ сходится в нем. Это означает, что последовательность $\hat{f}' = (f_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится почти всюду на X_0. Но тогда $\hat{f}'$ сходится на X_0 по внешней мере. Так как в силу $R' \subset R_0$ последовательность $\hat{f}$ фундаментальна также в $(\mathcal{F}, R_0)$ и обладает сходящейся в $(\mathcal{F}, R_0)$ подпоследовательностью $\hat{f}'$, то $\hat{f}$ сходится в $(\mathcal{F}, R_0)$. ▶

Заметим, что в предложении 2.41 возможен случай когда $R' \neq R_0$ (см. главу I, §10, n° 1).

Теорема 2.59. *Пусть внешняя мера* μ^* *на непустом множестве* X *и подмножество* $X_0 \subset X$ *такие, что* $X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, *где* $B_n \subset B_{n+1}$ *и* $\mu^*(B_n) < \infty$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *а* $\lim_n \mu^*(A_n) = 0$ *для любой последовательности подмножеств* $A_n \subset X_0$, $n \in \mathbb{N}$, *имеющей пустое пересечение и удовлетворяющей условиям* $\mu^*(A_1) < \infty$, $A_{n+1} \subset A_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$. *Кроме того,* $(Y, \widetilde{R})$ *— полуметризуемое пространство с секвенциальной равномерностью, причем* $\{\widetilde{\mathrm{u}}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *— его конечная или счетная фундаментальная система окружений, удовлетворяющая услови-*

ям $\widetilde{\mathrm{u}}_n^{-1} = \widetilde{\mathrm{u}}_n$ *и* $\widetilde{\mathrm{u}}_{n+1}^2 \subset \widetilde{\mathrm{u}}_n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *а* $\mathcal{F} = Y^X$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) Функциональное пространство $(\mathcal{F}, R_0)$ *сходимости на* X_0 *по внешней мере полуметризуемо и имеет конечную или счетную фундаментальную систему окружений* $\{\mathbf{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$, *где* $\mathbf{u}_n$ *определяется равенством (1), причем если* $\widetilde{R}$ *определяется полуметрикой* $\widetilde{d}$ *на* Y, *то* R_0 *может быть определено полуметрикой* d *на* $\mathcal{F}$, *заданной равенством (2). Кроме того, если* $(Y, \widetilde{R})$ *полно, то* $(\mathcal{F}, R_0)$ *тоже полно.*

б) Если последовательность $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ *сходится к* $f \in \mathcal{F}$ *почти всюду на* X_0, *то для каждого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $H \subset X_0$, *что* $\mu^*(H) < \varepsilon$ *и* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на каждом* $B_n \backslash H$, $n \in \mathbb{N}$.

◀ (а) Согласно предложению 2.41, система окружений $\{\mathbf{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности $R' \subset R_0$ и является фундаментальной системой окружений полуметризуемого пространства $(\mathcal{F}, R')$. Докажем, что $R' = R_0$. Для этого по аналогии с *теоремой Лебега* (см. [51], с. 92) докажем, что $R \subset R'$, где R — отношение секвенциальной псевдоравномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующее сходимости почти всюду на X_0. Пусть последовательности $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g} = (g_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{F}$ такие, что $(\hat{f}, \hat{g}) \in R$, т. е. $\mu^*(Q) = 0$ для $Q = \{x \in X_0 : (\hat{f}(x), \hat{g}(x)) \notin \widetilde{R}\}$, где $\hat{f}(x) = (f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{g}(x) = (g_n(x) : n \in \mathbb{N})$. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ подмножество $G_{nk} \subset B_n$ определим равенством (3) и положим

$$H_{nk} = \bigcup_{i \geqslant k} G_{ni}, \quad Q_n = \bigcap_{k \geqslant 1} H_{nk}.$$

Докажем, что $Q_n \subset Q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x_0 \in X_0 \backslash Q$. Тогда $(\hat{f}(x_0), \hat{g}(x_0)) \in \widetilde{R}$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $i_n \in \mathbb{N}$, что $(f_k(x_0), g_k(x_0)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $k \geqslant i_n$, т. е. $x_0 \notin G_{nk}$ для всех $k \geqslant i_n$. Отсюда следует, что $x_0 \notin H_{ni_n}$ и $x_0 \notin Q_n$. Таким образом, $Q_n \subset Q$ и, следовательно, $\mu^*(Q_n) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $G_{ni} \subset B_n$, $i \in \mathbb{N}$, то $H_{nk} \subset B_n$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и, значит, $\mu^*(H_{n1}) < \infty$. Очевидно, $H_{n1} \supset H_{n2} \supset \ldots$. Поэтому в силу условия, наложенного на μ^*, для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем $\lim\limits_k \mu^*(H_{nk}) = \mu^*(Q_n) = 0$. Поскольку $G_{nk} \subset H_{nk}$, имеем также $\lim\limits_k \mu^*(G_{nk}) = 0$. Следовательно, существует такое $k_n \in \mathbb{N}$, что

$\mu^*(G_{nk}) < 2^{-n}$ для всех $k \geqslant k_n$. А это означает, что $(f_k,\, g_k) \in \mathbf{u}_n$ для всех $k \geqslant k_n$. Но тогда $(\hat{f},\, \hat{g}) \in R'$. Тем самым включение $R \subset R'$ доказано. Очевидно, из включений $R \subset R' \subset R_0$ следует, что $R' = R_0$. Для завершения доказательства утверждения а) остается учесть предложение 2.41.

(б) Это утверждение доказывается по аналогии с *теоремой Егорова* (см. [51], с. 97). Пусть последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ сходится к $f \in \mathcal{F}$ почти всюду на X_0. Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$G'_{nk} = \{x \in B_n : (f_k(x),\, f(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_n\}, \quad H'_{nk} = \bigcup_{i \geqslant k} G'_{ni}.$$

Так как $(\hat{f},\, \dot{f}) \in R$, то повторением сделанных выше рассуждений получаем, что $\lim\limits_{k} \mu^*(H'_{nk}) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $k_n \in \mathbb{N}$, что $\mu^*(H'_{nk_n}) < 2^{-n}$. Для числа $\varepsilon > 0$ выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{1-m} < \varepsilon$. Положим $H = \bigcup\limits_{n \geqslant m} H'_{nk_n}$. Тогда $\mu^*(H) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant m} 2^{-n} = 2^{1-m} < \varepsilon$. Пусть $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ и $x \in B_j \backslash H$, а $\nu = \max\{m,\, i,\, j\}$. Так как $x \notin H$, то $x \notin H'_{nk_n}$ для всех $n \geqslant \nu$ и, значит, $x \notin G'_{nk}$ для всех $k \geqslant k_n$ и $n \geqslant \nu$. Однако $x \in B_n \backslash H$ при $n \geqslant \nu$. Поэтому $(f_k(x),\, f(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $k \geqslant k_n$ и $n \geqslant \nu$. Отсюда получаем, что $(f_k(x),\, f(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_i$ для всех $k \geqslant k_\nu$ и $x \in B_j \backslash H$. А это с учетом предложения 2.31 означает, что $\hat{f}$ сходится к f равномерно на $B_j \backslash H$. ►

Для любой системы $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X можно рассматривать в множестве $\mathcal{F}$ функций также сходимость почти всюду на системе $\mathfrak{S}$ (ей соответствует операция псевдопредела) и сходимость по внешней мере на системе $\mathfrak{S}$ (ей соответствует операция предела). В случае конечной или счетной системы $\mathfrak{S}$ сходимость почти всюду на системе $\mathfrak{S}$ есть сходимость почти всюду на объединении системы $\mathfrak{S}$, а сходимость по внешней мере на системе $\mathfrak{S}$ есть сходимость по внешней мере на объединении системы $\mathfrak{S}$.

Определение 2.25. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X, $(Y,\, \widetilde{R})$ — пространство с секвенциальной равномерностью, а $\mathcal{F} = Y^X$. Будем говорить, что последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ сходится к $f \in \mathcal{F}$ равномерно почти всюду на $X_0 \subset X$, а f является для $\hat{f}$ равномерным пределом (точнее — равномерным псевдопределом) почти всюду* *на* X_0*, если существует такое* $M \subset X_0$*, что* $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$ *и* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на* M*. Кроме того, будем говорить, что* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на* X_0 *по внешней мере, а* f *является для* $\hat{f}$ *равномерным пределом на* X_0 *по внешней мере, если любая подпоследовательность последовательности* $\hat{f}$ *обладает подпоследовательностью, сходящейся к* f *равномерно почти всюду на* X_0*.*

Отображение $\Lambda_1 : \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathcal{F}}$ определим, считая $f \in \Lambda_1(\hat{f})$ для $f \in \mathcal{F}$ и $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, если f является для $\hat{f}$ равномерным пределом почти всюду на X_0. Пусть E — множество таких $M \subset X_0$, что $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$, а $\Lambda_{\{M\}}$ и $R_{\{M\}}$ для каждого $M \in E$ — операция предела в $\mathcal{F}$ и отношение секвенциальной равномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующие равномерной сходимости на M. Очевидно, $\Lambda_1(\hat{f}) = \bigcup\limits_{M \in E} \Lambda_{\{M\}}(\hat{f})$, $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. Положим $R_1 = \bigcup\limits_{M \in E} R_{\{M\}}$. Легко проверить, что Λ_1 является равномерной операцией псевдопредела в $\mathcal{F}$, а R_1 — отношением секвенциальной псевдоравномерности в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, определяющим операцию псевдопредела Λ_1.

Отображение $\Lambda_2 : \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathcal{F}}$ определим, считая $f \in \Lambda_2(\hat{f})$ для $f \in \mathcal{F}$ и $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, если f является для $\hat{f}$ равномерным пределом на X_0 по внешней мере. Нетрудно проверить, что Λ_2 является равномерной операцией предела в $\mathcal{F}$. Кроме того, Λ_2 есть сильнейшая операция предела, удовлетворяющая условию $\Lambda_1 \leqslant \Lambda_2$, и, следовательно, является точной верхней границей системы $\{\Lambda_{\{M\}} : M \in E\}$ как в $\mathcal{L}(\mathcal{F})$, так и в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_*(\mathcal{F})$ всех равномерных операций предела в $\mathcal{F}$. Пусть $\hat{\mathcal{F}}_1$ и $\hat{\mathcal{F}}_2$ — множества таких $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda_1(\hat{f}) \neq \varnothing$ и $\Lambda_2(\hat{f}) \neq \varnothing$ соответственно. Тогда $\hat{\mathcal{F}}_2$ состоит из таких $\hat{f} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{f}' \prec \hat{f}$ существует $\hat{f}'' \prec \hat{f}'$ из $\hat{\mathcal{F}}_1$, причем $\Lambda_2(\hat{f}) = \Lambda_1(\hat{f}')$ для любых $\hat{f} \in \hat{\mathcal{F}}_2$ и $\hat{f}' \prec \hat{f}$, $\hat{f}' \in \hat{\mathcal{F}}_1$. Заметим, что $\Lambda_2(\dot{f}) = \Lambda_1(\dot{f}) = \Lambda_0(\dot{f}) = \Lambda(\dot{f})$ для любого $f \in \mathcal{F}$.

Сильнейшее отношение секвенциальной квазиравномерности R_2 в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее условию $R_1 \subset R_2$, является отношением секвенциальной равномерности и определяет в $\mathcal{F}$ операцию предела Λ_2. Оно является точной верхней границей системы $\{R_{\{M\}} : M \in E\}$ как в $\mathcal{R}(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$, так и в $\mathcal{R}_0(\mathcal{F}^{\mathbb{N}})$. При этом R_2 есть множество таких пар $(\hat{f}, \hat{g}) \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}} \times \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $(\hat{f}', \hat{g}') \prec (\hat{f}, \hat{g})$ существует $(\hat{f}'', \hat{g}'') \prec (\hat{f}', \hat{g}')$ из R_1. Пространство $(\mathcal{F},\,\Lambda_2)$ или $(\mathcal{F},\,R_2)$ называется функциональным пространством равномерной сходимости на X_0 по внешней мере.

Предложение 2.42. *В функциональном пространстве $(\mathcal{F},\,\Lambda_2)$ равномерной сходимости на X_0 по внешней мере квазизамыкание множества F получается присоединением к F всех функций из $\mathcal{F}$, являющихся равномерными пределами почти всюду на X_0 последовательностей функций из F. Кроме того, F замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все функции из $\mathcal{F}$, являющиеся равномерными пределами почти всюду на X_0 последовательностей функций из F.* ▶

С учетом сделанных обозначений справедлива

Теорема 2.60. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X, а пространство с секвенциальной равномерностью $(Y,\,\widetilde{R})$ полуметризуемо, причем $\{\widetilde{\mathrm{u}}_n : n\in\mathbb{N}\}$ — его конечная или счетная фундаментальная система окружений, удовлетворяющая условиям $\widetilde{\mathrm{u}}_n^{-1}=\widetilde{\mathrm{u}}_n$ и $\widetilde{\mathrm{u}}_{n+1}^2\subset\widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда $R_2=R_1$, а функциональное пространство $(\mathcal{F},\,R_2)$ равномерной сходимости на $X_0\subset X$ по внешней мере полуметризуемо и имеет конечную или счетную фундаментальную систему окружений $\{\mathbf{u}_n : n\in\mathbb{N}\}$, где $\mathbf{u}_n$ состоит из таких пар $(f,\,g)\in\mathcal{F}\times\mathcal{F}$, что $\mu^*(\{x\in X_0 : (f(x),\,g(x))\notin\widetilde{\mathrm{u}}_n\})=0$. При этом если $\widetilde{R}$ определяется полуметрикой $\widetilde{d}$ на Y, то R_2 может определяться полуметрикой d на $\mathcal{F}$, заданной равенством*

$$d(f,\,g)=\frac{d^*(f,\,g)}{1+d^*(f,\,g)},\quad f\in\mathcal{F},\ g\in\mathcal{F},$$

где $d^*(f,\,g)=\min\{\sup\limits_{x\in M}\widetilde{d}(f(x),\,g(x)) : M\subset X_0,\ \mu^*(X_0\backslash M)=0\}$ *(в случае $d^*(f,\,g)=\infty$ считается $d(f,\,g)=1$). Кроме того, если $(Y,\,\widetilde{R})$ полно, то $(\mathcal{F},\,R_2)$ тоже полно.*

◀ Очевидно, система окружений $\{\mathbf{u}_n : n\in\mathbb{N}\}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ некоторое отношение секвенциальной равномерности R'. Докажем, что $R'=R_1$. Рассмотрим последовательности $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{g}=(g_n : n\in\mathbb{N})$ в $\mathcal{F}$. Пусть $(\hat{f},\,\hat{g})\in R_1$. Тогда существует такое $M\subset X_0$, что $\mu^*(X_0\backslash M)=0$ и $(\hat{f},\,\hat{g})\in R_{\{M\}}$. Следовательно, для каждого $i\in\mathbb{N}$ найдется такое $n_i\in\mathbb{N}$, что $(f_n(x),\,g_n(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}_i$ для всех $n\geqslant n_i$ и $x\in M$. Поэтому $(f_n,\,g_n)\in\mathbf{u}_i$ для всех $n\geqslant n_i$ и $i\in\mathbb{N}$. Это означает, что $(\hat{f},\,\hat{g})\in R'$, т. е. $R_1\subset R'$.

Пусть, обратно, $(\hat{f},\,\hat{g})\in R'$. Тогда для каждого $i\in\mathbb{N}$ найдется такое $n_i \in \mathbb{N}$, что $(f_k, g_k) \in \mathrm{u}_i$ для всех $k \geqslant n_i$, т. е. $\mu^*(G_{ik}) = 0$ для всех $k \geqslant n_i$ и $i \in \mathbb{N}$, где $G_{ik} = \{x \in X_0 : (f_k(x), g_k(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_i\}$. Положим

$$Q = \bigcup_{i \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant n_i} G_{ik}, \quad M = X_0 \backslash Q.$$

Имеем, что $\mu^*(X_0 \backslash M) = \mu^*(Q) = 0$. Если $x \in M$, то $x \notin Q$ и, следовательно, $x \notin G_{ik}$ для всех $k \geqslant n_i$ и $i \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что $(f_k(x), g_k(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_i$ для всех $k \geqslant n_i$, $i \in \mathbb{N}$ и $x \in M$. А это означает, что $(\hat{f}, \hat{g}) \in R_{\{M\}}$. Поэтому $(\hat{f}, \hat{g}) \in R_1$ и, следовательно, $R' \subset R_1$. Таким образом, $R' = R_1 = R_2$.

Утверждение, относящееся к полуметрике d, очевидно.

Пусть пространство $(Y, \widetilde{R})$ полно. Рассмотрим в $(\mathcal{F}, R_2)$ фундаментальную последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, $\hat{f}$ обладает такой подпоследовательностью $\hat{f}' = (f_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, что $(f_{k_n}, g_{k_\nu}) \in \mathbf{u}_n$ для всех $\nu \geqslant n$ и $n \in \mathbb{N}$, т. е. $\mu^*(M_{n\nu}) = 0$, где $M_{n\nu} = \{x \in X_0 : (f_{k_n}(x), g_{k_\nu}(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_n\}$. Положим

$$M = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcap_{\nu \geqslant n} (X_0 \backslash M_{n\nu}).$$

Тогда

$$X_0 \backslash M = \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcup_{\nu \geqslant n} M_{n\nu}.$$

Поэтому $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$. Однако $(f_{k_n}(x), f_{k_\nu}(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $x \in M$, $\nu \geqslant n$ и $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, последовательность $\hat{f}'$ фундаментальна в функциональном пространстве $(\mathcal{F}, R_{\{M\}})$ равномерной сходимости на M. Поскольку $(Y, \widetilde{R})$ полно, пространство $(\mathcal{F}, R_{\{M\}})$ тоже полно. Поэтому $\hat{f}'$ сходится в пространстве $(\mathcal{F}, R_{\{M\}})$, а значит, и в $(\mathcal{F}, R_2)$. Так как последовательность $\hat{f}$ фундаментальна в $(\mathcal{F}, R_2)$ и обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{f}'$, то $\hat{f}$ сходится в $(\mathcal{F}, R_2)$. ▶

Замечание 2.6. Пусть $\widetilde{U}$ — полная система окружений пространства с секвенциальной равномерностью $(Y, \widetilde{R})$. Для каждого $\widetilde{\mathrm{u}} \in \widetilde{U}$ обозначим через $\mathbf{u}$ множество таких пар $(f, g) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F}$, что $\mu^*(\{x \in X_0 : (f(x), g(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}\}) = 0$. Очевидно, $\mathbf{u}$ является окружением в $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$. Легко убедиться, что система этих окружений $\mathbf{u}$ определяет в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ симметричное отношение секвенциальной квазиравномерности R_3, которое слабее отношения секвенциальной равномерности R_2 в $\mathcal{F}^{\mathbb{N}}$, соответствующего равномерной сходимости на X_0 по внешней мере, т. е. $R_2 \subset R_3$. Однако, как следует из теоремы 2.60, если $(Y, \widetilde{R})$ полуметризуемо, то $R_3 = R_2$.

Для любой системы $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X можно рассматривать в множестве $\mathcal{F}$ функций равномерную сходимость почти всюду на системе $\mathfrak{S}$ (ей соответствует равномерная операция псевдопредела) и равномерную сходимость на системе $\mathfrak{S}$ по внешней мере (ей соответствует равномерная операция предела).

Интересным примером внешней меры является внешняя мера, порожденная мерой.

Мерой на множестве X будем называть всякий функционал $\mu : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, где $\mathfrak{S} \subset 2^X$, удовлетворяющий условиям

1) если $A \in \mathfrak{S}$, то $X \setminus A \in \mathfrak{S}$;

2) если $A_n \in \mathfrak{S}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{S}$;

3) если $A_n \in \mathfrak{S}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$;

4) если $A \in \mathfrak{S}$, $\mu(A) = 0$ и $B \subset A$, то $B \in \mathfrak{S}$;

5) $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ для некоторых $A_n \in \mathfrak{S}$ с $\mu(A_n) < \infty$.

При этом каждое множество $A \in \mathfrak{S}$ называется *μ-измеримым* (короче — *измеримым*), а число $\mu(A)$ — его мерой.

Очевидно, $X \in \mathfrak{S}$, $\varnothing \in \mathfrak{S}$ и $\mu(\varnothing) = 0$. Пересечение конечной или счетной системы измеримых множеств измеримо. Разность двух измеримых множеств измерима. Кроме того, $\mu(B) \leqslant \mu(A)$ для любых измеримых множеств $B \subset A$, а для любых последовательностей измеримых множеств $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ и $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, где $\mu(A_1) < \infty$, имеют место равенства

$$\lim_n \mu(A_n) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n), \quad \lim_n \mu(B_n) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n).$$

Внешней мерой, порожденной мерой $\mu : \mathfrak{S} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ на X, называется функционал $\mu^* : 2^X \to \overline{\mathbb{R}}_+$, определенный для всех $B \subset \subset X$ равенством $\mu^*(B) = \inf\{\mu(A) : A \in \mathfrak{S},\ B \subset A\}$. Для любой последовательности подмножеств $B_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, такой, что $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$, имеет место равенство

$$\lim_n \mu^*(B_n) = \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n).$$

Однако μ^* может не удовлетворять условию теоремы 2.59 (примером является внешняя мера Лебега на $\mathbb{R}$).

В случае измеримого $X_0 \subset X$ и внешней меры μ^*, порожденной мерой μ на X, сходимость на X_0 по внешней мере и равномерную сходимость на X_0 по внешней мере будем называть *сходимостью на X_0 по мере* и *равномерной сходимостью на X_0 по мере* соответственно.

Функция $f : X \to Y$ называется *простой*, если множество $f(X)$ конечно или счетно. При наличии меры на X простая функция f называется *измеримой*, если для каждого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ измеримо. Очевидно, для любых $\widetilde{\mathrm{v}} \subset Y \times Y$, измеримого $X_0 \subset X$ и измеримых простых функций f, g множество $\{x \in X_0 : (f(x),\, g(x)) \notin \widetilde{\mathrm{v}}\}$ измеримо.

Пусть $\widetilde{V}$ — некоторая система подмножеств в $Y \times Y$. Подмножество $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F} = Y^X$ будем называть $(\mu, \widetilde{V})$-*измеримым* на измеримом $X_0 \subset X$, если множество $\{x \in X_0 : (f(x),\, g(x)) \notin \widetilde{\mathrm{v}}\}$ измеримо для любых $f \in \mathcal{F}_1$, $g \in \mathcal{F}_1$ и $\widetilde{\mathrm{v}} \in \widetilde{V}$. Очевидно, множество измеримых простых функций $(\mu, \widetilde{V})$-измеримо на X_0 при любом $\widetilde{V}$. Заметим еще, что при данном $\widetilde{V}$ существуют $(\mu, \widetilde{V})$-измеримые на X_0 подмножества в $\mathcal{F}$, максимальные по отношению включения.

Теорема 2.61. *Пусть пространство с секвенциальной равномерностью $(Y, \widetilde{R})$ полуметризуемо, причем $\widetilde{V} = \{\widetilde{\mathrm{u}}_n : n \in \mathbb{N}\}$ — его конечная или счетная фундаментальная система окружений, удовлетворяющих условиям $\widetilde{\mathrm{u}}_n^{-1} = \widetilde{\mathrm{u}}_n$ и $\widetilde{\mathrm{u}}_{n+1}^2 \subset \widetilde{\mathrm{u}}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$; μ — мера на непустом множестве X; $X_0 \subset X$ — измеримое подмножество, причем $X_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$, где B_n для каждого $n \in \mathbb{N}$ измеримо, $\mu(B_n) < \infty$ и $B_n \subset B_{n+1}$; $\mathcal{F} = Y^X$; $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ — непустое $(\mu, \widetilde{V})$-измеримое на X_0 подмножество. Тогда справедливы следующие утверждения.*

a) Функциональное пространство $(\mathcal{F}_1, R'_0)$ сходимости на X_0 по мере полуметризуемо и имеет конечную или счетную фундаментальную систему окружений $\{\mathbf{u}_n : n \in \mathbb{N}\}$, где

$$\mathbf{u}_n = \{(f,\, g) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_1 : \mu(\{x \in B_n : (f(x),\, g(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_n\}) < 2^{-n}\}.$$

При этом если $\widetilde{R}$ определяется полуметрикой $\widetilde{d}$ на Y, а $\widetilde{\mathrm{u}}_n = \{(y,\, z) \in Y \times Y : \widetilde{d}(y,\, z) < 2^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, то R'_0 может быть определено полуметрикой d' на $\mathcal{F}_1$, заданной при помощи равенства

$$d'(f,\,g)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{d_n(f,\,g)}{1+d_n(f,\,g)},\qquad f\in\mathcal{F}_1,\ g\in\mathcal{F}_1,$$

где $d_n(f,\,g)=\mu(\{x\in B_n:\widetilde{d}(f(x),\,g(x))\geqslant 2^{-n}\})$ *(при* $d_n(f,\,g)=\infty$ *считается* $d_n(f,\,g)(1+d_n(f,\,g))^{-1}=1$*). Кроме того, если пространство* $(Y,\,\widetilde{R})$ *полно, то в* $(\mathcal{F}_1,\,R'_0)$ *любая фундаментальная последовательность сходится на* X_0 *по мере к некоторой функции из* $\mathcal{F}$.

б) Если последовательность $\hat{f}\in\mathcal{F}_1^{\mathbb{N}}$ *сходится к* $f\in\mathcal{F}$ *почти всюду на* X_0*, то для каждого* $\varepsilon>0$ *найдется такое измеримое* $H\subset X_0$*, что* $\mu(H)<\varepsilon$ *и* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на каждом* $B_n\backslash H,\ n\in\mathbb{N}$.

◀ (а) Доказательство проводится по аналогии с утверждением а) теоремы 2.59. Хотя внешняя мера μ^* на X, порожденная мерой μ, может не удовлетворять условию теоремы 2.59, в рассматриваемом случае множества, возникающие при доказательстве, измеримы, а $\lim\limits_n \mu(A_n)=\mu(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ для любой такой последовательности измеримых подмножеств $A_n\subset X_0$, $n\in\mathbb{N}$, что $\mu(A_1)<\infty$ и $A_{n+1}\subset A_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Сказанное позволяет повторить рассуждения, сделанные в доказательствах предложения 2.41 и утверждения а) теоремы 2.59.

(б) Пусть последовательность $\hat{f}=(f_n:n\in\mathbb{N})\in\mathcal{F}_1^{\mathbb{N}}$ сходится к $f\in\mathcal{F}$ почти всюду на X_0. Тогда существует такое $M\subset X_0$, что $\mu(X_0\backslash M)=0$ и $\hat{f}$ сходится к f поточечно на M. Заметим, что при каждом $j\in\mathbb{N}$ для $x\in B_j$ последовательность $(f_n(x):\,n\in\mathbb{N})$ тогда и только тогда фундаментальна в $(Y,\,\widetilde{R})$, когда $x\in M_j\subset B_j$, где

$$M_j=\bigcap_{i\geqslant j}\,\bigcup_{s\geqslant 1}\,\bigcap_{n\geqslant s}\,\bigcap_{\nu\geqslant n}\{x\in B_j:(f_n(x),\,f_\nu(x))\in\widetilde{\mathrm{u}}_i\}.$$

Ясно, что $B_j\cap M\subset M_j$. Следовательно, $\mu(B_j\backslash M_j)=0$. Однако

$$B_j\backslash M_j=\bigcup_{i\geqslant j}\,\bigcap_{s\geqslant 1}\,\bigcup_{n\geqslant s}\,\bigcup_{\nu\geqslant n}\{x\in B_j:(f_n(x),\,f_\nu(x))\notin\widetilde{\mathrm{u}}_i\}.$$

Отсюда вытекает, что для всех $j\leqslant i$

$$\mu(\bigcap_{s\geqslant 1}\,\bigcup_{n\geqslant s}\,\bigcup_{\nu\geqslant n}\{x\in B_j:(f_n(x),\,f_\nu(x))\notin\widetilde{\mathrm{u}}_i\})=0.$$

Для каждых натуральных $i,\ n$ и ν обозначим

$$H_{in\nu} = \{x \in B_i : (f_n(x),\ f_\nu(x)) \notin \widetilde{\mathrm{u}}_i\}.$$

В частности, для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\mu(\bigcap_{s\geqslant 1} \bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) = 0.$$

Поэтому для всех $i \in \mathbb{N}$

$$\lim_s \mu(\bigcup_{n\geqslant s} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) = 0.$$

Следовательно, для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдется такое $s_i \in \mathbb{N}$, что

$$\mu(\bigcup_{n\geqslant s_i} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}) < 2^{-i}.$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{1-m} < \varepsilon$. Обозначим

$$H' = \bigcup_{i\geqslant m} \bigcup_{n\geqslant s_i} \bigcup_{\nu\geqslant n} H_{in\nu}.$$

Тогда

$$\mu(H') \leqslant \sum_{i\geqslant m} 2^{-i} = 2^{1-m} < \varepsilon.$$

Положим $H = H' \cup (X_0 \setminus M)$. Подмножество $H \subset X_0$ измеримо и $\mu(H) = \mu(H') < \varepsilon$. Рассмотрим некоторые числа $k \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$ и точку $x \in B_j \setminus H$. Обозначим $k_0 = \max\{m,\ k,\ j\}$.Так как $x \notin H'$ и $x \in B_i \setminus H$ при $i \geqslant k_0$, то $(f_n(x),\ f_\nu(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_i$ для всех $\nu \geqslant n$, $n \geqslant s_i$, $i \geqslant k_0$. Отсюда получаем, что $(f_n(x),\ f_\nu(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_k$ для всех $\nu \geqslant n$, $n \geqslant s_{k_0}$ и $x \in B_j \setminus H$. Однако для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $x \in B_j \setminus H$ найдется такое $\nu \geqslant n$, что $(f_\nu(x),\ f(x)) \in \widetilde{\mathrm{u}}_k$. Поэтому $(f_n(x),\ f(x)) \in \in \widetilde{\mathrm{u}}_k^2 \subset \widetilde{\mathrm{u}}_{k-1}$ для всех $n \geqslant s_{k_0}$ и $x \in B_j \setminus H$ при $k > 1$. А это означает, что $\hat{f}$ сходится к f равномерно на $B_j \setminus H$. ▶

Глава III

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Линейная операция предела последовательности

Пусть $\mathbb{K}$ — поле вещественных или комплексных чисел, а $\lim$ — классическая операция предела последовательности в $\mathbb{K}$. В числовом пространстве $(\mathbb{K}, \lim)$ сходимость последовательности $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ к α будем записывать в виде $\lim \hat{\alpha} = \alpha$ или $\lim\limits_n \alpha_n = \alpha$, а ограниченность множества будем понимать в классическом смысле.

Определение 3.1. *Пространство (X, Λ) называется линейным пространством с операцией предела последовательности над числовым пространством $(\mathbb{K}, \lim)$ (короче — линейным пространством), а Λ называется линейной операцией предела последовательности (короче — линейной операцией предела), если*

1) X — векторное пространство над полем $\mathbb{K}$;

2) $\alpha\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ для любых сходящихся последовательностей $\hat{\alpha}$ в $(\mathbb{K}, \lim)$ и $\hat{x}$ в (X, Λ), где $\alpha = \lim \hat{\alpha}$;

3) $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ в (X, Λ).

Числовое пространство $(\mathbb{K}, \lim)$ само является линейным пространством над $(\mathbb{K}, \lim)$.

В определении 3.1 условие 2) означает, что отображение $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ произведения $\mathbb{K} \times X$ на X секвенциально непрерывно (т. е. операция умножения вектора из X на число из $\mathbb{K}$ секвенциально непрерывна), а условие 3) означает, что отображение $(x, y) \mapsto x + y$ произведения $X \times X$ на X секвенциально непрерывно (т. е. операция сложения векторов из X секвенциально непрерывна). Из условия 2), в частности, вытекает секвенциальная непрерывность отображения $x \mapsto -x$ векторного пространства X на X (т. е. секвенциальная непрерывность симметрии аддитивной группы X).

Теорема 3.1. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, а R — множество таких пар $(\hat{x}, \hat{y}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$. Тогда R определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности, а в X операцию предела Λ и называется ассоциирован-*

ным с (X, Λ) *отношением секвенциальной равномерности. Следовательно, всякое линейное пространство является секвенциально равномерным, а значит, и топологическим.*

◀ В силу определения R из указанных в теореме 1.3 свойств операций предела следует, что R обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—4). Пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$. Тогда $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$ и, значит, $0 \in -\Lambda(\hat{x} - \hat{y}) \subset \Lambda(\hat{y} - \hat{x})$. Поэтому $(\hat{y}, \hat{x}) \in R$ и, следовательно, отношение R симметрично. Пусть $(\hat{x}, \hat{y}) \in R$ и $(\hat{y}, \hat{z}) \in R$, т. е. $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$ и $0 \in \Lambda(\hat{y} - \hat{z})$. Тогда $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y}) + \Lambda(\hat{y} - \hat{z}) \subset \subset \Lambda(\hat{x} - \hat{y} + \hat{y} - \hat{z}) = \Lambda(\hat{x} - \hat{z})$. Поэтому $(\hat{x}, \hat{z}) \in R$. Значит, отношение R транзитивно. Тем самым R обладает указанными в теореме 2.9 свойствами 1)—6) и, следовательно, определяет в $X^{\mathbb{N}}$ отношение секвенциальной равномерности. Пусть $x \in \Lambda(\hat{x})$. Тогда $0 \in \Lambda(\hat{x}) - x \subset \Lambda(\hat{x}) - \Lambda(\dot{x}) \subset \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(-\dot{x}) \subset \Lambda(\hat{x} - \dot{x})$. Отсюда следует, что $(\hat{x}, \dot{x}) \in R$. А это означает, что если в (X, Λ) вектор x является пределом последовательности $\hat{x}$, то x является пределом для $\hat{x}$ также в пространстве с секвенциальной равномерностью (X, R). Пусть, обратно, $(\hat{x}, \dot{x}) \in R$. Тогда $0 \in \Lambda(\hat{x} - \dot{x})$ и, значит, $x \in \Lambda(\hat{x} - \dot{x}) + x \subset \Lambda(\hat{x} - \dot{x}) + \Lambda(\dot{x}) \subset \Lambda(\hat{x} - \dot{x} + \dot{x}) = \Lambda(\hat{x})$. Следовательно, если x является пределом последовательности $\hat{x}$ в (X, R), то x является пределом для $\hat{x}$ также в (X, Λ). ▶

Отношение секвенциальной равномерности R, ассоциированное с линейным пространством (X, Λ), вообще говоря, не является ни сильнейшим и ни слабейшим отношением секвенциальной равномерности, определяющим операцию предела Λ (см. пример в § 16, n° 3).

Теорема 3.2. *В линейном пространстве* (X, Λ)

а) $\Lambda(\dot{0})$ *является замкнутым векторным подпространством, а каждая окрестность вектора из* $\Lambda(\dot{0})$ *является окрестностью для* $\Lambda(\dot{0})$*, причем пересечение всех окрестностей нуля совпадает с* $\Lambda(\dot{0})$*;*

б) $\Lambda(\hat{x}) = x + \Lambda(\dot{0})$ *для любой сходящейся последовательности* $\hat{x}$ *и любого* $x \in \Lambda(\hat{x})$*, причем* $\Lambda(\hat{x})$ *замкнуто, а для любых сходящихся последовательностей* $\hat{x}$ *и* $\hat{y}$ *множества* $\Lambda(\hat{x})$ *и* $\Lambda(\hat{y})$ *либо не пересекаются, либо совпадают;*

в) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *— сходящаяся последовательность,* $\hat{x}' \prec \hat{x}$*,* $\hat{z}$ *— последовательность в* $\Lambda(\hat{x})$*, а* $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ *— последовательность векторов* $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_n)$*, то* $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x}') = = \Lambda(\hat{z}) = \Lambda(\hat{\xi})$*;*

г) если последовательность $\hat{x}$ *либо сходится, либо не об-*

ладает сходящейся подпоследовательностью, то $\overline{[\hat{x}]} = [\hat{x}]^+ = \Lambda(\hat{x}) \cup ([\hat{x}] + \Lambda(\dot{0}))$, *причем в первом случае замыкание* $\overline{[\hat{x}]}$ *окрестностно компактно;*

д) всякое секвенциально компактное подмножество M *в* X *секвенциально относительно компактно и* $\overline{M} = M^+ = M + \Lambda(\dot{0})$, *а, следовательно, каждая последовательность* $\hat{x} \in \overline{M}^{\mathbb{N}}$ *обладает подпоследовательностью, имеющей предел в* M, *и для* $\hat{x}$ *существует такое* $\hat{y} \in M^{\mathbb{N}}$, *что* $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$;

е) если подмножество $H \subset X$ *открыто или замкнуто, то* $H = H + \Lambda(\dot{0})$.

◀ С учетом теорем 2.11 и 3.1 в доказательстве нуждаются лишь утверждения о том, что $\Lambda(\dot{0})$ является векторным подпространством, а для любой сходящейся последовательности $\hat{x}$ и любого $x \in \Lambda(\hat{x})$ имеет место равенство $\Lambda(\hat{x}) = x + \Lambda(\dot{0})$.

Для произвольных чисел α и β имеем, что $\alpha\Lambda(\dot{0}) + \beta\Lambda(\dot{0}) \subset \Lambda(\alpha\dot{0}) + \Lambda(\beta\dot{0}) = \Lambda(\dot{0}) + \Lambda(\dot{0}) \subset \Lambda(\dot{0} + \dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$. Следовательно, $\Lambda(\dot{0})$ является векторным подпространством.

Рассмотрим сходящуюся последовательность $\hat{x}$ и вектор $x \in \Lambda(\hat{x})$. Имеем $x + \Lambda(\dot{0}) \subset \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\dot{0}) \subset \Lambda(\hat{x} + \dot{0}) = \Lambda(\hat{x})$. Кроме того, $\Lambda(\hat{x}) - x \subset \Lambda(\hat{x}) - \Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(-\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x} - \hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$ и, следовательно, $\Lambda(\hat{x}) \subset x + \Lambda(\dot{0})$. Поэтому $\Lambda(\hat{x}) = x + \Lambda(\dot{0})$. ▶

Следствие 3.1. *Линейная операция предела* Λ *тогда и только тогда является операцией однозначного предела, когда* $\Lambda(\dot{0}) = \{0\}$. ▶

С учетом теорем 3.1 и 3.2 из проведенных в § 6 главы II исследований вытекает

Теорема 3.3. *Пусть* (X, Λ) *— линейное пространство;* $\Phi = X/\Lambda(\dot{0})$ *— фактор-пространство векторного пространства* X *по векторному подпространству* $\Lambda(\dot{0})$; $\hat{\Phi} \subset \Phi^{\mathbb{N}}$ *— подмножество таких последовательностей* $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ *элементов* $\varphi_n = x_n + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{x}_n)$ *из* Φ, *что последовательность* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ *векторов* $x_n \in X$ *сходится в* (X, Λ); $\widetilde{\lambda} : \hat{\Phi} \to \Phi$ *— отображение, определенное формулой* $\widetilde{\lambda}(\hat{\varphi}) = \Lambda(\hat{x})$ *для всех* $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}$. *Тогда отображение* $\widetilde{\lambda}$ *определено корректно и является операцией однозначного предела в* Φ, *причем* $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ *является линейным пространством, называемым фактор-пространством пространства* (X, Λ) *по векторному подпрост-*

ранству $\Lambda(\dot{0})$. *Кроме того, если* (X, R) *и* $(\Phi, \widetilde{R})$ *— пространства с секвенциальной равномерностью, ассоциированные с* (X, Λ) *и* $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ *соответственно, то* $(\Phi, \widetilde{R})$ *является фактор-пространством пространства* (X, R). *При этом фактор-отображение* $\pi : X \to \Phi$, *сопоставляющее каждому* $x \in X$ *элемент* $\varphi = x + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{x})$ *из* Φ, *является линейным, открытым,* $(\Lambda, \widetilde{\lambda})$*-секвенциально непрерывным и* $(R, \widetilde{R})$*-секвенциально равномерно непрерывным отображением.* ►

Теорема 3.4. *Пусть* (X, Λ) *и* (X, Λ') *— линейные пространства,* $\hat{x}$ *и* $\hat{y}$ *— последовательности векторов из* X, *а* $\hat{\alpha}$ *— числовая последовательность. Тогда*

а) если $\Lambda(\hat{x}) \cup \Lambda(\hat{y}) \neq \varnothing$, *то* $\Lambda(\hat{x} + \hat{y}) = \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y})$;

б) если $\lim \hat{\alpha} = \alpha \neq 0$, *то* $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \alpha\Lambda(\hat{x})$;

в) если $\lim \hat{\alpha} = 0$ *и* $\Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$, *то* $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$;

г) если $0 \in \Lambda(\hat{x})$, *а* $\hat{\alpha}$ *ограничена, то* $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$;

д) если $0 \notin \Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$, *а* $\hat{\alpha}$ *расходится, то* $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \varnothing$;

е) если сходящиеся в (X, Λ) *последовательности сходятся и в* (X, Λ'), *то* $\Lambda \leqslant \Lambda'$.

◄ (а) Пусть для определенности $\Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$. Очевидно, $0 \in \Lambda(\hat{x}) - \Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(-\hat{x})$. Поэтому $\Lambda(\hat{x} + \hat{y}) = \Lambda(\hat{x} + \hat{y}) + 0 \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y}) + \Lambda(-\hat{x}) + \Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y} - \hat{x}) + \Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{y}) + \Lambda(\hat{x})$. Отсюда с учетом $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ получаем равенство $\Lambda(\hat{x} + \hat{y}) = \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y})$.

(б) Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ и $\lim \hat{\alpha} = \alpha \neq 0$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\alpha_n \neq 0$ для всех $n \geqslant m$. Положим $\hat{x}' = (x_n : n \geqslant m)$, $\hat{\alpha}' = (\alpha_n : n \geqslant m)$ и $\hat{\beta} = (\alpha_n^{-1} : n \geqslant m)$. Очевидно, $\Lambda(\hat{x}') = \Lambda(\hat{x})$, $\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') = \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$, $\lim \hat{\alpha}' = \alpha$, $\lim \hat{\beta} = \alpha^{-1}$ и $\hat{x}' = \hat{\beta}\hat{\alpha}'\hat{x}'$. Имеем, что $\alpha^{-1}\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') \subset \Lambda(\hat{\beta}\hat{\alpha}'\hat{x}') = \Lambda(\hat{x}')$. Поэтому $\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') \subset \alpha\Lambda(\hat{x}')$. Отсюда с учетом $\alpha\Lambda(\hat{x}') \subset \Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}')$ получаем $\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') = \alpha\Lambda(\hat{x}')$. Следовательно, $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \alpha\Lambda(\hat{x})$.

(в) Так как $0 \in 0\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$, то $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$.

(г) Каждая подпоследовательность $\hat{\alpha}' \prec \hat{\alpha}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{\alpha}''$. Если $\lim \hat{\alpha}'' = \alpha''$ и $\hat{x}'' \prec \hat{x}$, то в силу $0 \in \Lambda(\hat{x}'')$ имеем $0 \in \alpha''\Lambda(\hat{x}'') \subset \Lambda(\hat{\alpha}''\hat{x}'')$. Отсюда следует, что для каждого $\hat{\alpha}'\hat{x}' \prec \hat{\alpha}\hat{x}$ существует такое $\hat{\alpha}''\hat{x}'' \prec \hat{\alpha}'\hat{x}'$, что $0 \in \Lambda(\hat{\alpha}''\hat{x}'')$. Поэтому в силу указанного в теореме 1.3 свойства 3) операций предела получаем $0 \in \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ и, значит, $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$.

(д) Если последовательность $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ не ограничена, то найдется такая подпоследовательность $\hat{\alpha}' = (\alpha_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, что

$\alpha_{k_n} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а последовательность $\hat{\beta} = (\alpha_{k_n}^{-1} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{x}' = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$. Имеем, что $\Lambda(\hat{x}') = \Lambda(\hat{x})$ и $0 \notin \Lambda(\hat{x}')$. Если предположить $\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') \neq \varnothing$, то в силу $0 \in 0\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') \subset \Lambda(\hat{\beta}\hat{\alpha}'\hat{x}') = \Lambda(\hat{x}')$ получим противоречие. Поэтому $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') = \varnothing$.

Рассмотрим случай ограниченной последовательности $\hat{\alpha}$. Существуют подпоследовательности $\hat{\alpha}' \prec \hat{\alpha}$ и $\hat{\alpha}'' \prec \hat{\alpha}$, имеющие различные пределы. Пусть $\lim \hat{\alpha}' = \alpha'$ и $\lim \hat{\alpha}'' = \alpha''$. Для соответствующих подпоследовательностей $\hat{x}' \prec \hat{x}$ и $\hat{x}'' \prec \hat{x}$ положим $M = \Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') \cap \Lambda(\hat{\alpha}''\hat{x}'')$. Предположим $M \neq \varnothing$ и рассмотрим некоторые векторы $y \in M$ и $x \in \Lambda(\hat{x})$. Имеем $\Lambda(\hat{\alpha}'\hat{x}') = \alpha' x + \Lambda(\dot{0})$ и $\Lambda(\hat{\alpha}''\hat{x}'') = \alpha'' x + \Lambda(\dot{0})$. Поэтому $y \in \alpha' x + \Lambda(\dot{0})$, $y \in \alpha'' x + \Lambda(\dot{0})$ и, следовательно, $0 \in (\alpha' - \alpha'')x + \Lambda(\dot{0})$, т. е. $(\alpha' - \alpha'')x \in \Lambda(\dot{0})$. Отсюда с учетом $\alpha' \neq \alpha''$ вытекает, что $x \in \Lambda(\dot{0})$ и $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$. А это противоречит условию $0 \notin \Lambda(\hat{x})$. Значит, $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) \subset M = \varnothing$.

(е) Достаточно доказать, что любая сходящаяся к нулю в (X, Λ) последовательность сходится к нулю и в (X, Λ'). Допустим это не верно. Тогда для некоторой последовательности $\hat{x}$ будем иметь $0 \in \Lambda(\hat{x})$ и $0 \notin \Lambda'(\hat{x}) \neq \varnothing$. Рассмотрим некоторую расходящуюся ограниченную числовую последовательность $\hat{\alpha}$. В силу утверждений г) и д) $0 \in \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ и $\Lambda'(\hat{\alpha}\hat{x}) = \varnothing$. Однако это противоречит условию $\Lambda'(\hat{\alpha}\hat{x}) \neq \varnothing$. ►

Линейное пространство над пространством вещественных (комплексных) чисел называется вещественным (комплексным) линейным пространством. Если (X, Λ) — комплексное линейное пространство, а $X_{\mathbb{R}}$ — ассоциированное с X вещественное векторное пространство, то $(X_{\mathbb{R}}, \Lambda)$ является вещественным линейным пространством и называется ассоциированным с (X, Λ) вещественным линейным пространством. Если в векторном пространстве X операция предела Λ такая, что $(X_{\mathbb{R}}, \Lambda)$ является вещественным линейным пространством, то Λ называется вещественно линейной операцией предела в X.

Если X_1 — векторное (вещественное векторное) подпространство линейного пространства (X, Λ), то подпространство $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ есть линейное (вещественное линейное) пространство, называемое линейным (вещественным линейным) подпространством пространства (X, Λ). В (X_1, Λ_1) секвенциальная топология может отличаться от топологии, индуцированной в X_1 секвенциальной топологией пространства (X, Λ).

Легко убедиться, что всякая линейная операция предела в векторном подпространстве X_1 векторного пространства X есть ограничение на X_1 некоторой линейной операции предела в X.

Прямое произведение (X, Λ) семейства $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$ линейных пространств над одним и тем же числовым пространством $(\mathbb{K}, \lim)$ является линейным пространством над $(\mathbb{K}, \lim)$. Секвенциальная топология прямого произведения (X, Λ) может отличаться от тихоновского произведения секвенциальных топологий пространств (X_i, Λ_i), $i \in I$.

Определение 3.2. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, а $G \subset X$. Функция $f : G \to Y$ называется $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально равномерно непрерывной (короче — секвенциально равномерно непрерывной) на $G' \subset G$, если для любых последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$ и $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N}) \in G'^{\mathbb{N}}$, таких, что $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$, последовательность $(f(x_n) - f(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в пространстве $(Y, \widetilde{\Lambda})$. При этом если функция f секвенциально равномерно непрерывна на G, то она просто называется секвенциально равномерно непрерывной.*

Если (X, R) и $(Y, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, ассоциированные с линейными пространствами (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ соответственно, то $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально равномерная непрерывность функции $f : G \to Y$ на $G' \subset G \subset X$ совпадает с ее $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерной непрерывностью на G'.

Предложение 3.1. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $G \subset X$ — вещественное векторное подпространство, а $f : G \to Y$ — аддитивное отображение. Тогда*

а) если f секвенциально непрерывно в некоторой точке, то оно секвенциально равномерно непрерывно;

б) если для любых $x \in G$ и сходящейся к нулю последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $f(r_n x)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то $f(rx) \in rf(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для всех $x \in G$, $r \in \mathbb{R}$ и, следовательно, если при этом $\widetilde{\Lambda}$ является операцией однозначного предела, то отображение f вещественно линейно. ▶

Определение 3.3. *Пусть (X, Λ) и (X', Λ') — линейные пространства. Будем говорить, что (X, Λ) изоморфно (вещественно изоморфно) (X', Λ'), если существует секвенциально непрерывное линейное (вещественно линейное) биективное отображение $f : X \to X'$, имеющее секвенциально непрерывное обратное отображение f^{-1}. При этом f называется изоморфизмом (вещественным изоморфизмом) (X, Λ) на (X', Λ').*

§ 2. Ядро линейной операции предела последовательности

Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, являющееся линейной операцией предела последовательности в векторном пространстве X, вообще говоря, не есть линейное отображение в прямом смысле, поскольку множество 2^X не есть векторное пространство. Однако если рассматривать сужение Λ' отображения Λ на подмножестве $\hat{X} \subset X^{\mathbb{N}}$ всех сходящихся последовательностей $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, а $\Lambda'(\hat{x})$ принять за элемент фактор-пространства $X/\Lambda(\dot{0})$ и положить $0\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda(\dot{0})$ вместо $0\Lambda'(\hat{x}) = \{0\}$, то оно как отображение $\Lambda' : \hat{X} \to X/\Lambda(\dot{0})$ является линейным. В частности, линейная операция однозначного предела последовательности в X является линейным отображением $\hat{X}$ на X.

Предложение 3.2. *Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, являющееся линейной операцией предела в векторном пространстве X, вполне определяется заданием множества $\hat{X}_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(\dot{0}))$, называемого ядром линейной операции предела Λ и состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей в (X, Λ).*

◀ В векторном пространстве $X^{\mathbb{N}}$ положим $\hat{X} = \hat{X}_0 + \hat{Z}$, где $\hat{Z}$ — множество всех стационарных последовательностей в X. Каждое $\hat{x} \in \hat{X}$ представим в виде $\hat{x} = \hat{\xi} + \dot{z}$, где $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ и $z \in X$ (такое представление, вообще говоря, не единственно). Тогда независимо от указанного представления $\hat{x}$ имеем $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\dot{z}) = z + \Lambda(\dot{0})$, причем $\Lambda(\dot{0})$ состоит из таких $\xi \in X$, что $\dot{\xi} \in \hat{X}_0$. Тем самым заданием множества $\hat{X}_0$ отображение Λ однозначно определяется на множестве $\hat{X}$. Остается учесть, что $\Lambda(\hat{y}) = \varnothing$ для всех $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}} \backslash \hat{X}$. ▶

Если $(S_x : x \in X)$ — структура сходимости в векторном пространстве X, соответствующая линейной операции предела Λ, то S_0 является ядром для Λ, причем $S_x = \dot{x} + S_0 = \{\dot{x} + \hat{\xi} : \hat{\xi} \in S_0\}$ для любого $x \in X$.

Теорема 3.5. *Подмножество $\hat{X}_0 \subset X^{\mathbb{N}}$ является ядром некоторой линейной операции предела Λ в векторном пространстве X тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $\hat{X}_0$ — векторное подпространство в $X^{\mathbb{N}}$;

2) если $\hat{x} \in \hat{X}_0$ и $\hat{x}' \prec \hat{x}$, то $\hat{x}' \in \hat{X}_0$;

3) $\hat{\alpha}\dot{z} \in \hat{X}_0$ для любых $z \in X$ и сходящейся к нулю числовой последовательности $\hat{\alpha}$;

4) $\hat{\alpha}\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ для любых $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ и сходящейся числовой последовательности $\hat{\alpha}$;

5) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{X}_0$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$;

6) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что $\dot{x}_n \in \hat{X}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$.

При этом $\hat{X}_0$ является ядром линейной операции однозначного предела в X тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям 1)—5) и не содержит отличной от $\dot{0}$ стационарной последовательности.

◀ Утверждение о том, что ядро линейной операции предела удовлетворяет указанным условиям, очевидно. Докажем обратное утверждение. Пусть $\hat{X}_0$ удовлетворяет условиям 1)—6). Обозначим через X_0 множество таких $z \in X$, что $\dot{z} \in \hat{X}_0$. В силу условия 1) множество X_0 является векторным подпространством пространства X. Положим $\hat{X} = \hat{X}_0 + \hat{Z}$, где $\hat{Z}$ — множество всех стационарных последовательностей в X. Очевидно, $\hat{X}$ является векторным подпространством в $X^{\mathbb{N}}$. Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$ определим следующим образом: $\Lambda(\hat{x}) = \varnothing$ для $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}} \backslash \hat{X}$, $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\dot{0}) = X_0$ для $\hat{x} \in \hat{X}_0$ и $\Lambda(\hat{x}) = z + X_0$ для $\hat{x} \in \hat{X} \backslash \hat{X}_0$, представимого в виде $\hat{x} = \hat{\xi} + \dot{z}$, где $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$, $z \in X$. Это определение отображения Λ корректно. Действительно, если $\hat{x} \in \hat{X} \backslash \hat{X}_0$ имеет также представление $\hat{x} = \hat{\xi}' + \dot{z}'$, где $\hat{\xi}' \in \hat{X}_0$ и $z' \in X$, то $\dot{z} - \dot{z}' = \hat{\xi}' - \hat{\xi} \in \hat{X}_0$. Поэтому $\dot{z} - \dot{z}' \in X_0$ и, следовательно, $z + X_0 = z' + X_0$. А это означает, что $\Lambda(\hat{x})$ не зависит от указанного представления $\hat{x}$.

Докажем, что построенное отображение Λ является операцией предела в X. С этой целю воспользуемся теоремой 1.3. В силу условиий 1) и 2) Λ обладает указанными в теореме 1.3 свойствами 1) и 2). Пусть $z \in X$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ такие, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$, для которого $z \in \Lambda(\hat{x}'')$. Тогда, очевидно, $\hat{x}'' \in \hat{X}$ и $\hat{x}'' - \dot{z} \in \hat{X}_0$. Отсюда следует, что для каждого $\hat{\xi}' \prec \hat{x} - \dot{z}$ существует $\hat{\xi}'' \prec \hat{\xi}'$ из $\hat{X}_0$. Поэтому в силу условия 5) $\hat{x} - \dot{z} \in \hat{X}_0$. Следовательно, $\hat{x} \in \hat{X}$ и $z \in \Lambda(\hat{x})$. Это означает, что Λ обладает указанным в теореме 1.3 свойством 3). Пусть теперь $z \in X$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ такие, что $z \in \Lambda(\dot{x}_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, очевидно, $\dot{x}_n \in \hat{X}$ и $\dot{x}_n - \dot{z} \in \hat{X}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Поэтому в силу условия 6) $\hat{x} - \dot{z} \in \hat{X}_0$, т. е. $\hat{x} \in \hat{X}$ и $z \in \Lambda(\hat{x})$. Тем самым

Λ обладает указанным в теореме 1.3 свойством 4) и, значит, является операцией предела в X.

Докажем, что Λ является линейной операцией предела в X. Рассмотрим произвольные $\hat{x} \in \hat{X}$, $\hat{y} \in \hat{X}$ и представим их в виде $\hat{x} = \hat{\xi} + \dot{z}$, $\hat{y} = \hat{\xi}' + \dot{z}'$, где $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$, $\hat{\xi}' \in \hat{X}_0$ и $z \in X$, $z' \in X$. Имеем, что $\Lambda(\hat{x}) = z + X_0$, $\Lambda(\hat{y}) = z' + X_0$ и $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) = z + z' + X_0$. Кроме того, $\hat{x} + \hat{y} = \hat{\xi} + \hat{\xi}' + \dot{z} + \dot{z}'$ и $\Lambda(\hat{x} + \hat{y}) = z + \dot{z}' + X_0$. Поэтому $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) = \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$.

Рассмотрим теперь произвольные $\hat{x} \in \hat{X}$ и сходящуюся числовую последовательность $\hat{\alpha}$. Из представления $\hat{x} = \hat{\xi} + \dot{z}$, где $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ и $z \in X$, имеем $\hat{\alpha}\hat{x} = \hat{\alpha}\hat{\xi} + \hat{\alpha}\dot{z}$. В силу условия 4) $\hat{\alpha}\hat{\xi} \in \hat{X}_0$. Кроме того, $\hat{\alpha}\dot{z} = \alpha\dot{z} + \hat{\beta}\dot{z}$, где $\alpha = \lim \hat{\alpha}$ и $\hat{\beta} = \hat{\alpha} - \dot{\alpha}$. Поскольку $\lim \hat{\beta} = 0$, в силу условия 3) $\hat{\beta}\dot{z} \in \hat{X}_0$. Тем самым $\hat{\alpha}\hat{x} = \hat{\xi}' + \alpha\dot{z}$, где $\hat{\xi}' = \hat{\alpha}\hat{\xi} + \hat{\beta}\dot{z} \in \hat{X}_0$. Поэтому $\hat{\alpha}\hat{x} \in \hat{X}$ и $\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}) = \alpha z + X_0$. Однако $\Lambda(\hat{x}) = z + X_0$ и $\alpha\Lambda(\hat{x}) = \alpha z + X_0$, где считается $0\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\dot{0}) = X_0$. Следовательно, $\alpha\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ и, значит, Λ является линейной операцией предела в X.

Непосредственно из построения отображения Λ следует, что $\hat{X}_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(\dot{0}))$. Кроме того, если $\hat{X}_0$ не содержит отличной от $\dot{0}$ стационарной последовательности, то $X_0 = \{0\}$ и, значит, Λ является линейной операцией однозначного предела. ►

Предложение 3.3. *Всякая последовательность $\hat{x}$ векторов линейного пространства (X, Λ) либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к вектору из $X \setminus \Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ' в X, что $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$, $\Lambda \leqslant \Lambda'$.*

◄ Пусть $\hat{X}_0$ — ядро линейной операции предела Λ, а $\hat{Y}$ — линейная оболочка в $X^{\mathbb{N}}$ множества всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$ и их подпоследовательностей, когда $\hat{\alpha}$ пробегает все сходящиеся числовые последовательноти. Обозначим через $\hat{X}_0'$ множество всех таких $\hat{\xi} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{\xi}' \prec \hat{\xi}$ существует $\hat{\xi}'' \prec \hat{\xi}'$ из $\hat{Y} + \hat{X}_0$. Очевидно, $\hat{x} \in \hat{X}_0'$. Легко проверить, что множество $\hat{X}_0'$ удовлетворяет условиям 1)—5) теоремы 3.5.

Пусть $\dot{y} \in \hat{X}_0'$ для некоторого вектора $y \notin \Lambda(\dot{0})$. Тогда, очевидно, $\dot{y} \in \hat{Y} + \hat{X}_0$. Поэтому $\dot{y} = \hat{y} + \hat{\eta}$, где $\hat{y} \in \hat{Y}$ и $\hat{\eta} \in \hat{X}_0$. Из равенства $\hat{y} = \dot{y} - \hat{\eta}$ вытекает, что последовательность $\hat{y}$ сходится к y в $(X,\,\Lambda)$. Однако в силу определения множества $\hat{Y}$ последовательность $\hat{y}$ представляется в виде $\hat{y}=\hat{\alpha}_1\hat{x}_1+\hat{\alpha}_2\hat{x}_2+\ldots+\hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ с некоторым $m\in\mathbb{N}$, где $\hat{x}_k\prec\hat{x}$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,m$, а $\hat{\alpha}_1,\,\hat{\alpha}_2,\,\ldots,\,\hat{\alpha}_m$ — сходящиеся числовые последовательности.

Если же $\dot{y}\in\hat{X}_0'$ только при $y\in\Lambda(\dot{0})$, то, очевидно, множество $\hat{X}_0'$ удовлетворяет также условию 6) теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции предела Λ' в X, причем $\Lambda'(\dot{0})=\Lambda(\dot{0})$. Так как $\hat{X}_0\subset\hat{X}_0'$, то $\Lambda\leqslant\Lambda'$. ►

§ 3. Окрестности нуля

Теорема 3.6. *Пусть u_0 — окрестность нуля в линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$, а $x\in X$. Тогда существует такое число $\varepsilon>0$, что $\alpha x\in u_0$ для всех чисел α с $|\alpha|<\varepsilon$. Следовательно, u_0 является поглощающим и поглощающим по сложению множеством. Окрестность нуля u_0 содержит уравновешенную окрестность нуля. Множество $x+u_0$ является окрестностью вектора x. Кроме того, если u_x — окрестность вектора x, то u_x-x является окрестностью нуля, а αu_x для любого числа $\alpha\neq 0$ является окрестностью вектора αx.*

◄ Предположим для u_0 и x не существует требуемого числа ε. Тогда существует сходящаяся к нулю последовательность чисел α_n, $n\in\mathbb{N}$, таких, что $\alpha_n x\notin u_0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Однако последовательность $(\alpha_n x : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю и, значит, почти вся лежит в u_0. Полученное противоречие доказывает существование числа ε, указанного в теореме.

Обозначим через u множество таких $y\in u_0$, что $\alpha y\in u_0$ для всех чисел α с $|\alpha|\leqslant 1$. Множество u уравновешено. Докажем, что u является окрестностью нуля. Предположим противное. Тогда существует сходящаяся к нулю последовательность векторов $x_n\notin u$, $n\in\mathbb{N}$. Кроме того, для каждого $n\in\mathbb{N}$ найдется такое число α_n, что $|\alpha_n|\leqslant 1$ и $\alpha_n x_n\notin u_0$. Так как последовательность чисел α_n, $n\in\mathbb{N}$, ограничена, то последовательность $(\alpha_n x_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю и, значит, почти вся лежит в u_0. Полученное противоречие доказывает, что u является окрестностью нуля.

Пусть последовательность векторов $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к x. Очевидно, последовательность $(x_n-x : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю и, следовательно, почти вся лежит в u_0. Но тогда последовательность $(x_n : n\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в $x+u_0$. Отсюда следует, что множество $x+u_0$ является окрестностью вектора x. Аналогично доказывается, что если u_x — окрестность вектора x, то u_x-x является окрестностью нуля.

Пусть u_x — окрестность вектора x, $\alpha \neq 0$ — некоторое число, а последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$ сходится к αx. Очевидно, последовательность $(\alpha^{-1}x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к x и, следовательно, почти вся лежит в u_x. Но тогда последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ почти вся лежит в αu_x. Поэтому αu_x является окрестностью вектора αx. ►

Следствие 3.2. *Пусть u — окрестность нуля в линейном пространстве (X, Λ). Тогда для любой неограниченной последовательности чисел α_n, $n \in \mathbb{N}$, справедливо равенство $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n u$.* ►

Предложение 3.4. *Пусть v — окрестность нуля в линейном пространстве (X, Λ), а A — такое множество чисел, что $\inf\limits_{\alpha\in A} |\alpha| \neq 0$. Тогда множество $u = \bigcap\limits_{\alpha\in A} \alpha v$ является окрестностью нуля.*

◄ Предположим u не является окрестностью нуля. Тогда существует последовательность векторов $x_n \in X \setminus u$, $n \in \mathbb{N}$, которая сходится к нулю. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $\alpha_n \in A$, что $x_n \notin \alpha_n v$, т. е. $\alpha_n^{-1} x_n \notin v$. Однако последовательность чисел α_n^{-1}, $n \in \mathbb{N}$, ограничена. Поэтому, согласно утверждению г) теоремы 3.4, последовательность векторов $\alpha_n^{-1} x_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю и, значит, почти вся лежит в v. Полученное противоречие доказывает, что u является окрестностью нуля. ►

Теорема 3.7. *Пусть G — замкнутое (открытое) и M — секвенциально компактное множества в линейном пространстве (X, Λ), а A — компактное числовое множество, причем $0 \notin A$. Тогда множества $M + G$, $\bigcap\limits_{x\in M} (x + G)$, AG и $\bigcap\limits_{\alpha\in A} \alpha G$ замкнуты (открыты) в (X, Λ). В частности, для любых $x \in X$ и числа $\alpha \neq 0$ множества $x + G$ и αG замкнуты (открыты).*

◄ Сначала рассмотрим случай замкнутого G. Пусть $x_0 \in X$ — предельная точка множества $M + G$. Тогда существует сходящаяся к x_0 последовательность векторов $x_n + y_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $x_n \in M$ и $y_n \in G$. В силу секвенциальной компактности M последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к некоторому $z \in M$. Поэтому последовательность $(y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к $x_0 - z$. Так как G замкнуто, то $x_0 - z \in G$. Следовательно, $x_0 \in z + G \subset M + G$ и, значит, множество $M + G$ замкнуто. Замкнутость множества $\bigcap\limits_{x\in M} (x + G)$ вытекает из доказанного утверждения, поскольку для каждого

$x \in X$ одноточечное множество $\{x\}$ секвенциально компактно и, следовательно, множество $x+G$ замкнуто.

Пусть $y_0 \in X$ — предельная точка множества AG. Тогда существует сходящаяся к y_0 последовательность векторов $\alpha_n y_n$, $n \in \mathbb{N}$, где $\alpha_n \in A$ и $y_n \in G$. В силу компактности A последовательность $(\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(\alpha_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, сходящейся к некоторому $\alpha \in A$. Так как $\alpha \neq 0$ и $\alpha_{k_n} \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $(y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к $\alpha^{-1} y_0 \in G$. Поэтому $y_0 \in \alpha G \subset AG$ и, значит, AG замкнуто. С учетом этого утверждения замкнутость множества $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \alpha G$ очевидна.

В силу доказанных утверждений справедливость утверждений теоремы в случае открытого G вытекает из равенств $X \backslash (M+G) = \bigcap\limits_{x \in M} (x+(X \backslash G))$, $X \backslash \bigcap\limits_{x \in M} (x+G) = M+(X \backslash G)$, $X \backslash (AG) = \bigcap\limits_{\alpha \in A} \alpha (X \backslash G)$ и $X \backslash \bigcap\limits_{\alpha \in A} \alpha G = A(X \backslash G)$, поскольку дополнение открытого (замкнутого) подмножества замкнуто (открыто). ►

В силу теоремы 3.7 секвенциальная топология τ линейного пространства (X, Λ) для любых $x \in X$ и числа $\alpha \neq 0$ удовлетворяет равенствам $\tau = \{\alpha w : w \in \tau\}$ и $\tau = \{x+w : w \in \tau\}$, первое из которых выражает инвариантность топологии τ относительно гомотетий, а второе — инвариантность относительно сдвигов.

Следствие 3.3. *Пусть G — открытое множество в линейном пространстве (X, Λ), а A — множество чисел. Тогда*

а) для любого $M \subset X$ множество $M+G$ открыто;

б) если $0 \notin A$, то множество AG открыто;

в) если $0 \in G$ и $A \neq \{0\}$, то множество AG открыто. ►

Теорема 3.8. *В линейном пространстве (X, Λ) для каждых вектора x, числа α и открытой окрестности $v_{\alpha x}$ вектора αx существуют число $\varepsilon > 0$ и открытая окрестность v_x вектора x, такие, что $\beta v_x \subset v_{\alpha x}$ для всех чисел β, удовлетворяющих неравенству $|\beta - \alpha| < \varepsilon$. Следовательно, открытая окрестность нуля содержит уравновешенную открытую окрестность нуля.*

◄ Пусть (X, Λ) является линейным пространством над числовым пространством $(\mathbb{K}, \lim)$. Рассмотрим прямое произведение $(X', \Lambda') = (\mathbb{K}, \lim) \times (X, \Lambda)$ и отображение $f : X' \to X$, определенное равенством $f(\alpha, x) = \alpha x$ для всех $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X = X'$. Так как отображение f (Λ', Λ)-секвенциально непрерывно, то в силу теорем 1.63 и 1.61 прообраз $f^{-1}(v_{\alpha x})$ открытого подмножества $v_{\alpha x}$ пространства $(X,\, \Lambda)$ является открытым множеством в $(X',\, \Lambda')$. Но тогда в силу теоремы 1.27 существуют открытая окрестность $B = \{\beta : |\beta - \alpha| < \varepsilon\}$ числа α и открытая окрестность v_x вектора x, такие, что $B \times v_x \subset f^{-1}(v_{\alpha x})$, т. е. $Bv_x \subset v_{\alpha x}$.

Пусть v_0 — открытая окрестность нуля в $(X,\, \Lambda)$. Согласно уже доказанному утверждению, существуют такие число $\varepsilon > 0$ и открытая окрестность нуля $v \subset X$, что $\beta v \subset v_0$ для всех чисел β с $|\beta| < \varepsilon$. Обозначим $w = \bigcup\limits_{|\beta|<\varepsilon} \beta v$. Очевидно, w является уравновешенной открытой окрестностью нуля, причем $w \subset v_0$. ►

Замечание 3.1. Пусть $(V'_x : x \in X)$ — семейство систем окрестностей в векторном пространстве X, определяющее линейную операцию предела Λ. С помощью системы окрестностей нуля V'_0 определим семейство систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, положив $V_x = \{x + v : v \in V'_0\}$ и, в частности, $V_0 = V'_0$. Ясно, что семейство систем окрестностей $(V_x : x \in X)$ определяет в X линейную операцию предела Λ. Учитывая это, всюду в дальнейшем, говоря, что в векторном пространстве X система окрестностей нуля V_0 определяет операцию предела Λ (не обязательно линейную), будем понимать, что операция предела Λ определена семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, где $V_x = \{x + v : v \in V_0\}$.

Теорема 3.9. *Система V_0 подмножеств векторного пространства X тогда и только тогда является системой окрестностей нуля в X, определяющей линейную операцию предела, когда*

1) если числовая последовательность $\hat{\alpha}$ сходится к нулю, то для любого $z \in X$ последовательность $\hat{\alpha}\dot{z}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_0$;

2) если числовая последовательность $\hat{\alpha}$ сходится, а последовательность $\hat{\xi} \in X^{\mathbb{N}}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_0$, то последовательность $\hat{\alpha}\hat{\xi}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_0$;

3) если каждая из последовательностей $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_0$, то такова и последовательность $\hat{x} + \hat{y}$.

◄ Очевидно, в доказательстве нуждается лишь утверждение о том, что если система V_0 подмножеств в X удовлетворяет условиям 1)—3), то она является системой окрестностей нуля в X, определяющей линейную операцию предела.

Из условия 1) следует, что каждое $v \in V_0$ содержит нуль. Следовательно, V_0 является системой окрестностей нуля в X. Обозначим через $\hat{X}_0$ множество всех последовательностей в X, сходящихся к нулю по системе окрестностей нуля V_0. С использованием условиий 1)—3) легко проверяется, что $\hat{X}_0$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции предела в X. ▶

Предложение 3.5. *Если система V_0 поглощающих подмножеств векторного пространства X такая, что каждое $v \in V_0$ содержит уравновешение некоторого $w \in V_0$ и сумму $w + w$, то V_0 является системой окрестностей нуля в X, определяющей линейную операцию предела.*

◀ Каждое $v \in V_0$, будучи поглощающим множеством, содержит нуль. Поэтому V_0 является системой окрестностей нуля в X. Докажем, что для каждых $v \in V_0$ и числа α существует $u \in V_0$, уравновешение $\widetilde{u}$ которого удовлетворяет включению $\alpha\widetilde{u} \subset v$. Число $k \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $2^k > |\alpha|$. По условию, существует такое $w_1 \in V_0$, что $w_1 + w_1 \subset v$. Действуя по индукции, получим последовательность множеств $w_n \in V_0$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих включению $w_{n+1} + w_{n+1} \subset w_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, $2^n w_n \subset v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, $2^k w_k \subset v$. По условию, w_k содержит уравновешение $\widetilde{u}$ некоторого $u \in V_0$. Учитывая, что множество $2^k\widetilde{u}$ уравновешено, в силу $2^k\widetilde{u} \subset v$ и $|\alpha|2^{-k} < 1$ получим $\alpha\widetilde{u} = \alpha 2^{-k}(2^k\widetilde{u}) \subset 2^k\widetilde{u} \subset v$. С использованием доказанного утверждения легко проверяется, что система окрестностей нуля V_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.9 и, следовательно, определяет в X линейную операцию предела. ▶

В теории топологических векторных пространств требуется, чтобы топология τ в векторном пространстве X удовлетворяла следующим условиям (аксиомам *векторной топологии*):

1) для каждых числа α, вектора $x \in X$ и окрестности $v_{\alpha x} \in \tau$ вектора αx существуют число $\varepsilon > 0$ и окрестность $v_x \in \tau$ вектора x, такие, что $\beta v_x \subset v_{\alpha x}$ для всех чисел β, удовлетворяющих неравенству $|\beta - \alpha| < \varepsilon$;

2) для каждых векторов x и y из X и каждой окрестности $v_{x+y} \in \tau$ вектора $x + y$ существуют такие окрестности $v_x \in \tau$ и $v_y \in \tau$ векторов x и y, что $v_x + v_y \subset v_{x+y}$.

В силу теоремы 3.8 секвенциальная топология произвольного линейного пространства (X, Λ) удовлетворяет указанному условию 1), однако условию 2) может не удовлетворять. Более того, в (X, Λ) может не существовать топологии, удовлетворяющей условиям 1), 2) и определяющей линейную операцию предела Λ (см. примеры в § 16, n° 1 и n° 2). При этом операция предела, определенная в X системой окрестностей нуля $\{u + u : u \in U_0\}$, где U_0 — полная система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ), может отличаться от Λ. Очевидно, в векторном пространстве всякая векторная топология определяет линейную операцию предела. Как показывают примеры (см. § 16, n° 9), две различные векторные (даже локально выпуклые и хаусдорфовые) топологии в X могут определять одну и ту же операцию предела последовательности.

В линейном пространстве окрестность нуля может не содержать открытой окрестности нуля. При этом в силу теорем 1.32, 3.6 и 3.7 линейное пространство тогда и только тогда является пространством Фреше—Урысона, когда любая окрестность нуля содержит открытую окрестность нуля.

Операция предела линейного пространства тогда и только тогда является операцией однозначного предела, когда пересечение всех окрестностей нуля содержит только нуль.

Линейное пространство с операцией однозначного предела может не быть отделимым (см. пример в § 16, n° 2).

В силу теорем 3.6 и 3.7 из предложения 1.25 вытекает

Предложение 3.6. *Линейное пространство отделимо (хаусдорфово) тогда и только тогда, когда пересечение квазизамыканий (замыканий) всех окрестностей (открытых окрестностей) нуля содержит только нуль.* ►

В связи с понятием локально секвенциально компактного пространства (см. определение 1.12) заметим, что линейное пространство (X, Λ) тогда и только тогда локально секвенциально компактно, когда каждая открытая окрестность нуля v содержит такую открытую окрестность нуля w, что замыкание $\overline{w}$ секвенциально компактно и $\overline{w} \subset v$.

Определение 3.4. *Линейное пространство называется локально выпуклым, если в нем каждая открытая окрестность нуля содержит выпуклую открытую окрестность нуля.*

Предложение 3.7. *В линейном пространстве (X, Λ) каждая окрестность нуля содержит такую уравновешенную окрестность нуля v, что $v = v + \Lambda(\dot{0})$.*

◄ Пусть u_0 — окрестность нуля в (X, Λ). Обозначим через u множество таких $x \in u_0$, что $x + \Lambda(\dot{0}) \subset u_0$. Докажем, что u является окрестностью нуля в (X, Λ). Предположим противное. Тогда существует сходящаяся к нулю последовательность векторов $x_n \in X \backslash u$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует также такое $\xi_n \in \Lambda(\dot{0})$, что $x_n + \xi_n \notin u_0$. Однако в силу утверждения в) теоремы 3.2 последовательность $(\xi_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Поэтому последовательность $(x_n + \xi_n : n \in \mathbb{N})$ тоже сходится к нулю и, следовательно, почти вся лежит в u_0. Полученное противоречие доказывает, что u является окрестностью нуля. Множество

u, согласно его определению, есть максимальное подмножество в u_0, удовлетворяющее включению $u+\Lambda(\dot{0})\subset u_0$. Так как $\Lambda(\dot{0})$ является векторным подпространством, то $(u+\Lambda(\dot{0}))+\Lambda(\dot{0})=$ $=u+\Lambda(\dot{0})\subset u_0$. Поэтому $u+\Lambda(\dot{0})\subset u$. Отсюда с учетом очевидного обратного включения получаем $u=u+\Lambda(\dot{0})$. Рассмотрим некоторую уравновешенную окрестность нуля $u'\subset u$. Обозначим $v=u'+\Lambda(\dot{0})$. Очевидно, v является уравновешенной окрестностью нуля, причем $v\subset u$ и $v=v+\Lambda(\dot{0})$. ▶

Теорема 3.10. *Пусть* $(X,\,R)$ *— пространство с секвенциальной равномерностью, ассоциированное с линейным пространством* $(X,\,\Lambda)$. *Тогда полная система окружений* U *пространства* $(X,\,R)$ *есть фильтр в* $X\times X$, *в качестве базы которого служит система всех* $\mathrm{u}\subset X\times X$, *представимых в виде* $\mathrm{u}=\{(\xi+x,\,x):\xi\in u_0,\,x\in X\}$, *где* u_0 *— окрестность нуля в* $(X,\,\Lambda)$. *При этом окружение* u, *соответствующее в указанном смысле открытой окрестности нуля* u_0, *является открытым окружением. Кроме того, если* V_0 *— некоторая система окрестностей нуля в* $(X,\,\Lambda)$, *определяющая операцию предела* Λ, *то соответствующая система окружений* V *определяет отношение секвенциальной равномерности* R.

◀ Пусть $\mathrm{u}\in U$. Обозначим через u_0 множество таких $\xi\in X$, что $(\xi+x,\,x)\in\mathrm{u}$ для всех $x\in X$. Докажем, что u_0 является окрестностью нуля в $(X,\,\Lambda)$. Предположим противное. Тогда существует последовательность $\hat{\xi}=(\xi_n:n\in\mathbb{N})$ в $X\backslash u_0$, сходящаяся к нулю. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует также такое $x_n\in X$, что $(\xi_n+x_n,\,x_n)\notin\mathrm{u}$. Пусть $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$. Так как последовательность $\hat{\xi}=(\hat{\xi}+\hat{x})-\hat{x}$ сходится к нулю, то $(\hat{\xi}+\hat{x},\,\hat{x})\in R$. Поэтому последовательность пар $(\xi_n+x_n,\,x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, почти вся лежит в u. Полученное противоречие доказывает, что u_0 является окрестностью нуля.

Пусть, обратно, u_0 является окрестностью нуля в $(X,\,\Lambda)$. Докажем, что множество $\mathrm{u}=\{(\xi+x,\,x):\xi\in u_0,\,x\in X\}$ является окружением пространства $(X,\,R)$. Рассмотрим произвольную последовательность пар $(y_n,\,x_n)\in(X\times X)\backslash\mathrm{u}$, $n\in\mathbb{N}$. Пусть $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$. Очевидно, $y_n-x_n\notin u_0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому $0\notin\Lambda(\hat{y}-\hat{x})$ и, значит, $(\hat{y},\,\hat{x})\notin R$. Отсюда следует, что u является окружением пространства $(X,\,R)$. Тем самым система всех окружений u, определенных указанным образом при помощи окрестностей нуля u_0, является фундаментальной системой окружений пространства $(X,\,R)$, т. е. базой фильтра U всех окружений.

Пусть u_0 — открытая окрестность нуля. Докажем, что окружение $\mathrm{u}=\{(\xi+x,\, x):\xi\in u_0,\ x\in X\}$ открыто. Рассмотрим последовательность пар $(y_n,\, x_n)\in(X\times X)\backslash\mathrm{u}$, $n\in\mathbb{N}$, сходящуюся в $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$ к некоторому $(y,\,x)\in X\times X$. Пусть $\hat y=(y_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat x=(x_n:n\in\mathbb{N})$. Тогда $y\in\Lambda(\hat y)$, $x\in\Lambda(\hat x)$ и $y-x\in\Lambda(\hat y-\hat x)$. Очевидно, $y_n-x_n\in X\backslash u_0$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда в силу замкнутости $X\backslash u_0$ получаем $\Lambda(\hat y-\hat x)\subset X\backslash u_0$. В частности, $y-x\in X\backslash u_0$. Но тогда $(y,\,x)\in(X\times X)\backslash\mathrm{u}$. Следовательно, $(X\times X)\backslash\mathrm{u}$ замкнуто, а окружение u открыто в $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$.

Утверждение относящееся к системе окружений V, соответствующей системе окрестностей нуля V_0, очевидно. ▶

Замечание 3.2. Нетрудно убедиться, что если для подмножеств u_0' и u_0'' векторного пространства X подмножества u' и u'' декартова произведения $X\times X$ определены равенствами

$$\mathrm{u}'=\{(\xi+x,\,x):\xi\in u_0',\ x\in X\},$$
$$\mathrm{u}''=\{(\xi+x,\,x):\xi\in u_0'',\ x\in X\},$$

то

$$\mathrm{u}'\circ\mathrm{u}''=\mathrm{u}''\circ\mathrm{u}'=\mathrm{u}'+\mathrm{u}''=\{(\xi+x,\,x):\xi\in u_0'+u_0'',\ x\in X\}.$$

Отсюда следует, что любое окружение пространства с секвенциальной равномерностью $(X,\,R)$, ассоциированного с линейным пространством $(X,\,\Lambda)$, является поглощающим, поглощающим по сложению и поглощающим по композиции множеством в $X\times X$. Свойство поглощаемости или поглощаемости по сложению окружения пространства $(X,\,R)$ следует также из утверждения, что окружение пространства $(X,\,R)$ является окрестностью нуля в линейном пространстве $(X,\,\Lambda)\times(X,\,\Lambda)$.

Замечание 3.3. Пусть u_0 — подмножество в векторном пространстве X, а u — подмножество в $X\times X$, определенное равенством $\mathrm{u}=\{(\xi+x,\,x):\xi\in u_0,\ x\in X\}$. Тогда для любого $K\subset X$ имеют место равенства $\mathrm{u}[K]_1=K+u_0$ и $\mathrm{u}[K]_2=K-u_0$.

Теорема 3.11. *Пусть μ_v — функционал Минковского окрестности нуля v в линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$. Тогда*

а) функционал μ_v секвенциально непрерывен в нуле;

б) если окрестность нуля v открыта, то функционал μ_v секвенциально полунепрерывен сверху (см. определение 1.36);

в) если окрестность нуля v выпукла, то функционал μ_v секвенциально равномерно непрерывен.

◀ (а) С учетом равенства $\mu_v(0)=0$ секвенциальная непрерывность функционала μ_v в нуле вытекает из очевидных неравенств $0\leqslant\mu_v(x)\leqslant\varepsilon$ для любых $\varepsilon>0$ и $x\in\varepsilon v$.

(б) Пусть окрестность нуля v открыта, а $x \in X$. Рассмотрим сходящуюся к x последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в (X, Λ), Очевидно, что если подмножество $w \subset X$ открыто и $x \in w$, то найдется такое число $\varepsilon > 0$, что $x \in \alpha w$ для всех чисел α, удовлетворяющих неравенству $|\alpha - 1| < \varepsilon$. Учитывая это, из определения функционала μ_v получим, что для произвольного числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta \in (0; \varepsilon)$, для которого $x \in (\mu_v(x) + \delta)v$. Поскольку $\mu_v(x) + \delta > 0$, множество $(\mu_v(x) + \delta)v$ открыто. Отсюда в силу $x \in \Lambda(\hat{x})$ следует существование такого $m \in \mathbb{N}$, что $x_n \in (\mu_v(x) + \delta)v$ при $n \geqslant m$. Поэтому $\mu_v(x_n) < \mu_v(x) + \delta$ для всех $n \geqslant m$ и, значит, $\overline{\lim_n}\, \mu_v(x_n) \leqslant \mu_v(x) + \delta < \mu_v(x) + \varepsilon$. Отсюда в силу произвольности ε получаем $\overline{\lim_n}\, \mu_v(x_n) \leqslant \mu_v(x)$, т. е. секвенциальную полунепрерывность сверху функционала μ_v в точке x.

(в) В случае выпуклой окрестности нуля v секвенциально равномерная непрерывность функционала μ_v следует из неравенства $|\mu_v(x) - \mu_v(y)| \leqslant \mu_v(x - y)$ для всех x и y из X. ▶

Предложение 3.8. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, $f : X \to \mathbb{R}_+$ — положительно однородное отображение, а $v = \{x \in X : f(x) < 1\}$. Тогда*

а) если f секвенциально полунепрерывно сверху в нуле, то оно секвенциально непрерывно в нуле, а v является радиально уравновешенной окрестностью нуля, причем f совпадает с функционалом Минковского окрестности нуля v;

б) если f секвенциально полунепрерывно сверху, то v является открытой окрестностью нуля;

в) если f секвенциально полунепрерывно сверху в нуле и удовлетворяет неравенству $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ для всех x и y из X, то оно секвенциально равномерно непрерывно, а v является выпуклой окрестностью нуля. ▶

Ясно, что в линейном пространстве (X, Λ) множество всех функционалов Минковского окрестностей нуля совпадает с множеством всех секвенциально непрерывных в нуле положительно однородных отображений X в $\mathbb{R}_+$.

Если V_0 — некоторая система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ), определяющая операцию предела Λ, то в (X, Λ) последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ тогда и только тогда сходится к нулю, когда для каждой окрестности нуля $v \in V_0$ и ее функционала Минковского μ_v последовательность чисел $\mu_v(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю.

Замечание 3.4. Пусть μ_u — функционал Минковского окрестности нуля u в линейном пространстве (X, Λ). Тогда функция $f: X\times X \to \mathbb{R}_+$, определенная равенством $f(x, y) = \mu_u(x-y)$, $(x, y)\in X\times X$, равна нулю на диагонали $\Delta(X)$, секвенциально равномерно непрерывна на $\Delta(X)$ и $0\leqslant f(x, y)\leqslant 1$ для всех таких пар (x, y), что $x-y\in u$. При этом если u — открытая окрестность нуля, то функция f секвенциально полунепрерывна сверху на $X\times X$.

Теорема 3.12. *В линейном пространстве* (X, Λ) *для произвольного множества* M *справедливы равенства*

$$M^+ = \bigcap_{u\in U_0'} (M+u), \overline{M} = \bigcap_{w\in W_0'} (M+w), \overline{M}+G = M+G,$$

где U_0' *— фундаментальная система окрестностей нуля,* W_0' *— фундаментальная система открытых окрестностей нуля, а* G *— открытое множество. Кроме того, если подмножество* $H\subset X$ *открыто, выпукло и всюду плотно, то* $H = X$.

◀ Обозначим $M' = \bigcap\limits_{u\in U_0'} (M+u)$. Пусть $x\in M^+$ и $u\in U_0'$. В силу теоремы 3.6 существует уравновешенная окрестность нуля $v\subset u$. Так как $x\in M^+$, а $x+v$ является окрестностью вектора x, то с учетом теоремы 1.10 имеем $(x+v)\cap M\neq\varnothing$. Следовательно, существует такое $y\in M$, что $y\in x+v$. Отсюда получаем, что $x\in y-v = y+v\subset M+u$. Поэтому $M^+\subset M+u$ и, значит, $M^+\subset M'$. Пусть теперь $x\in M'$, а v — уравновешенная окрестность нуля. Выберем $u\in U_0'$ так, чтобы $u\subset v$. Очевидно, $x\in M+u\subset M+v$. Поэтому $(x-v)\cap M\neq\varnothing$ и, так как $v=-v$, то $(x+v)\cap M\neq\varnothing$. Отсюда следует, что $x\in M^+$ и, значит, $M'\subset M^+$. Тем самым $M^+ = M'$. Аналогично доказывается формула для $\overline{M}$.

Пусть $x\in G$. В силу теоремы 3.7 $G-x$ является открытой окрестностью нуля. Поэтому из формулы для $\overline{M}$ следует, что $\overline{M}\subset M+G-x$ и, значит, $\overline{M}+x\subset M+G$. Следовательно, $\overline{M}+G\subset M+G$. Отсюда с учетом очевидного обратного включения получаем равенство $M+G=\overline{M}+G$, верное и при $G=\varnothing$.

Так как $2H = H+H = \overline{H}+H = X+H = X$, то $H = X$. ▶

Теорема 3.13. *В линейном пространстве* (X, Λ)

а) если $M\subset X$ *и* $G\subset X$, *то*

$$M^+ + G^+ \subset (M+G)^+, \quad \overline{M}+\overline{G}\subset \overline{M+G},$$

$$M^- + G^- \subset (M+G)^-, \quad M^\circ + G^\circ \subset (M+G)^\circ,$$

$$M^+ + G^- \subset M+G, \quad \overline{M}+G^\circ\subset M+G,$$

причем если M или G секвенциально квазикомпактно (секвенциально относительно компактно), то $M^+ + G^+ = (M+G)^+$ $(\overline{M} + \overline{G} = \overline{M+G})$;

б) если $M \subset X$, *а* $t \neq 0$ *— число, то*

$$tM^+ = (tM)^+, \quad t\overline{M} = \overline{tM}, \quad tM^- = (tM)^-, tM^\circ = (tM)^\circ;$$

в) если подмножество $M \subset X$ *уравновешено, вещественно уравновешено или радиально уравновешено, то соответствующим свойством обладают также множества* M^+, $\overline{M}$, M^- *(при* $0 \in M^-$ *или* $M^- = \varnothing$*) и* M° *(при* $0 \in M^\circ$ *или* $M^\circ = \varnothing$*);*

г) если $Y \subset X$ *— векторное (вещественное векторное) подпространство, то* Y^+ *и* $\overline{Y}$ *— векторные (вещественные векторные) подпространства, а* $Y^- = Y^\circ = \varnothing$ *при* $Y \neq X$;

д) если подмножество $M \subset X$ *выпукло, то* M^+, $\overline{M}$, M^- *и* M° *выпуклы, причем* $M^- = M^\circ$.

◀ (а) Если последовательности $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in G^{\mathbb{N}}$ сходятся к $x \in M^+$ и $y \in G^+$ соответственно, то последовательность $\hat{x} + \hat{y} \in (M+G)^{\mathbb{N}}$ сходится к $x + y \in (M+G)^+$. Поэтому $M^+ + G^+ \subset (M+G)^+$.

Пусть W_0 — полная система открытых окрестностей нуля, а $w \in W_0$. Тогда в силу теоремы 3.12 и утверждения а) следствия 3.3 имеют место равенства $M + G + w = \overline{M+G} + w$, $M + G + w = \overline{M} + G + w = \overline{M} + \overline{G} + w$ и, значит, $\overline{M+G} + w = \overline{M} + \overline{G} + w$. Учитывая это, в силу теоремы 3.12 получим

$$\overline{M+G} = \bigcap_{w \in W_0} (\overline{M+G} + w) = \bigcap_{w \in W_0} (\overline{M} + \overline{G} + w) = \overline{\overline{M} + \overline{G}}.$$

Следовательно, $\overline{M} + \overline{G} \subset \overline{M+G}$.

Пусть $x \in M^-$, $y \in G^-$, а последовательность векторов $z_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $x + y$. Тогда последовательность $(z_n - y : n \in \mathbb{N})$ сходится к x. Поскольку M является окрестностью вектора x, найдется такое число $m \in \mathbb{N}$, что $z_n - y \in M$ для всех $n \geqslant m$. Поэтому $z_n \in M + y \subset M + G$ для всех $n \geqslant m$. Это означает, что $M + G$ является окрестностью вектора $x + y$. Следовательно, $x + y \in (M+G)^-$ и $M^- + G^- \subset (M+G)^-$.

Так как $M^\circ + G^\circ$ открыто и $M^\circ + G^\circ \subset M + G$, то $M^\circ + G^\circ \subset (M+G)^\circ$.

Пусть $x \in G^-$. Тогда множество $u = G - x$ является окрестностью нуля и в силу теоремы 3.12 $M^+ \subset M + G - x$. Следовательно, $M^+ + x \subset M + G$ и, значит, $M^+ + G^- \subset M + G$.

Так как внутренность G° открыто, то в силу теоремы 3.12 $\overline{M} + G^\circ = M + G^\circ$. Следовательно, $\overline{M} + G^\circ \subset M + G$.

Пусть M секвенциально квазикомпактно, $z \in (M+G)^+$, а последовательность векторов $z_n \in M + G$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к z, причем $z_n = x_n + y_n$, где $x_n \in M$ и $y_n \in G$. Тогда последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся к некоторому $x \in M^+$ подпоследовательностью $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$. Из равенств $y_n = z_n - x_n$, $n \in \mathbb{N}$, следует, что последовательность $(y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к вектору $z - x = y \in G^+$. Поэтому $z = x + y \in M^+ + G^+$ и, значит, $(M+G)^+ \subset M^+ + G^+$. Так как имеет место и обратное включение, то $M^+ + G^+ = (M+G)^+$.

Пусть замыкание $\overline{M}$ секвенциально компактно. Тогда имеем $\overline{M} + \overline{G} = (\overline{M})^+ + (\overline{G})^+ = (\overline{M} + \overline{G})^+$. Отсюда следует, что $\overline{M} + \overline{G}$ замкнуто (это вытекает также из теоремы 3.7). Поэтому $\overline{M + G} \subset \overline{\overline{M} + \overline{G}} = \overline{M} + \overline{G}$. Так как имеет место и обратное включение, то $\overline{M} + \overline{G} = \overline{M + G}$.

(б) Пусть последовательности $\hat{x} \in M^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in (tM)^{\mathbb{N}}$ сходятся к $x \in M^+$ и $y \in (tM)^+$ соответственно. Тогда $t\hat{x}$ и $t^{-1}\hat{y}$ сходятся к tx и $t^{-1}y$ соответственно. Так как $t\hat{x} \in (tM)^{\mathbb{N}}$ и $t^{-1}\hat{y} \in M^{\mathbb{N}}$, то $tx \in (tM)^+$, $t^{-1}y \in M^+$ и $y \in tM^+$. Следовательно, $tM^+ = (tM)^+$. Очевидно, $t\overline{M} = t(\overline{M})^+ = (t\overline{M})^+$ и, значит, $t\overline{M}$ замкнуто. Поэтому $\overline{tM} \subset \overline{t\overline{M}} = t\overline{M}$, т. е. $\overline{tM} \subset t\overline{M}$. Однако $\overline{M} = \overline{t^{-1}tM} \subset t^{-1}\overline{tM}$. Следовательно, $t\overline{M} \subset \overline{tM}$. Из доказанных включений получаем, что $t\overline{M} = \overline{tM}$.

Очевидно, для произвольного $H \subset X$ имеют место равенства $H^- = X \backslash (X \backslash H)^+$ и $H^\circ = X \backslash \overline{X \backslash H}$. Поэтому

$$tM^- = t(X \backslash (X \backslash M)^+) = X \backslash (t(X \backslash M)^+) = X \backslash (t(X \backslash M))^+ =$$
$$= X \backslash (X \backslash (tM))^+ = (tM)^-,$$
$$tM^\circ = t(X \backslash \overline{X \backslash M}) = X \backslash (t\overline{X \backslash M}) = X \backslash \overline{t(X \backslash M)} =$$
$$= X \backslash \overline{X \backslash tM)} = (tM)^\circ.$$

(в) Если $M = \varnothing$, то M^+, $\overline{M}$, M^- и M°, будучи пустыми множествами, уравновешены. Пусть множество $M \neq \varnothing$ уравновешено. Тогда для любого числа $\alpha \neq 0$ с $|\alpha| \leqslant 1$ имеем

$$\alpha M^+ = (\alpha M)^+ \subset M^+, \quad \alpha\overline{M} = \overline{\alpha M} \subset \overline{M},$$
$$\alpha M^- = (\alpha M)^- \subset M^-, \quad \alpha M^\circ = (\alpha M)^\circ \subset M^\circ.$$

Так как $0 \in M$, то $0M^+ \subset M^+$ и $0\overline{M} \subset \overline{M}$. Поэтому M^+ и $\overline{M}$ уравновешены. Если $0 \in M^-$, то $0M^- \subset M^-$ и, значит, M^- уравновешено. Если же $0 \in M^\circ$, то $0M^\circ \subset M^\circ$ и, значит, M° уравновешено. Аналогично доказываются утверждения относительно вещественно уравновешенного или радиально уравновешенного множества $M \neq \varnothing$.

(г) Пусть $Y \subset X$ — векторное (вещественное векторное) подпространство. С учетом $0Y^+ \subset (0Y)^+$ и $0\overline{Y} \subset \overline{0Y}$ для любых чисел (вещественных чисел) α и β имеем

$$\alpha Y^+ + \beta Y^+ \subset (\alpha Y)^+ + (\beta Y)^+ \subset (\alpha Y + \beta Y)^+ \subset Y^+,$$
$$\alpha\overline{Y} + \beta\overline{Y} \subset \overline{\alpha Y} + \overline{\beta Y} \subset \overline{\alpha Y + \beta Y} \subset \overline{Y}.$$

Поэтому Y^+ и $\overline{Y}$ — векторные (вещественные векторные) подпространства.

Пусть $Y \neq X$ и $x \in X \backslash Y$. Для произвольного $y \in Y$ рассмотрим последовательность векторов $z_n = y + n^{-1}x$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к y. Очевидно, $z_n \in X \backslash Y$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и поэтому $y \in (X \backslash Y)^+$. Отсюда с учетом $(X \backslash Y)^+ = X \backslash Y^-$ получаем $y \notin Y^-$. Следовательно, $Y^- = \varnothing$, а значит, и $Y^\circ = \varnothing$.

(д) Пусть $M \subset X$ — выпуклое подмножество. Тогда при $0 < t < 1$ имеем

$$tM^+ + (1-t)M^+ = (tM)^+ + ((1-t)M)^+ \subset (tM + (1-t)M)^+ = M^+,$$
$$t\overline{M} + (1-t)\overline{M} = \overline{tM} + \overline{(1-t)M} \subset \overline{tM + (1-t)M} = \overline{M},$$
$$tM^- + (1-t)M^- = (tM)^- + ((1-t)M)^- \subset (tM + (1-t)M)^- = M^-,$$
$$tM^\circ + (1-t)M^\circ = (tM)^\circ + ((1-t)M)^\circ \subset (tM + (1-t)M)^\circ = M^\circ.$$

Следовательно, множества M^+, $\overline{M}$, M^- и M° тоже выпуклы.

Если $M^- = \varnothing$, то равенство $M^- = M^\circ$ очевидно. В случае $M^- \neq \varnothing$ выберем некоторое $y \in M^-$ и положим $v = M - y$. Очевидно, v является выпуклой окрестностью нуля, причем $M^- = y + v^-$ и $M^\circ = y + v^\circ$. Докажем равенство $v^- = v^\circ$. Обозначим $u = \bigcup\limits_{0<t<1} tv$. Пусть $0 < t < t' < 1$. Так как $(t'-t)v$ является окрестностью нуля, то из равенства $tv + (t'-t)v = t'v$ следует, что $t'v$ является окрестностью множества tv. Поэтому u является своей окрестностью. Значит, множество u открыто. Очевидно, $u \subset v^\circ \subset v^-$. Пусть $x \in v^-$. Тогда существует такое число $r \in (0;\, 1)$, что $x \in rv$. Действительно, в противном случае последовательность векторов $(1+n^{-1})x \notin v$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к x, что противоречит условию $x \in v^-$. Отсюда следует, что $x \in u$. Поэтому $v^- \subset u$ и, значит, $u = v^\circ = v^-$. Но тогда $M^- = M^\circ$. ▶

Теорема 3.14. *Пусть μ_v — функционал Минковского выпуклой окрестности нуля v в линейном пространстве $(X,\, \Lambda)$. Тогда*

$$v^\circ = v^- = \bigcup_{0<t<1} tv = \{x \in X : \mu_v(x) < 1\},$$

$$\overline{v} = v^+ = \bigcap_{t>1} tv = \{x \in X : \mu_v(x) \leqslant 1\}.$$

Кроме того, $\overline{v^\circ} = \overline{v}$ и $(\overline{v})^\circ = v^\circ$, а множество $w = \bigcap\limits_{|\alpha|=1} \alpha v^\circ$ есть наибольшее подмножество в v, являющееся выпуклой уравновешенной открытой окрестностью нуля, причем w есть множество всех таких $x \in X$, что $\mu_v(\alpha x) < 1$ для любого числа α с $|\alpha| = 1$.

◀ Равенства для v° доказываются при помощи рассуждений, сделанных в доказательстве утверждения д) теоремы 3.13. Докажем равенства для $\overline{v}$. Обозначим $u = \bigcap\limits_{t>1} tv$. При $t > 1$ из равенства $v + (t-1)v = tv$ следует, что $\overline{v} \subset tv$, поскольку $(t-1)v$ содержит открытую окрестность нуля. Поэтому $\overline{v} \subset u$. Пусть $x \in u$. Тогда $x \in (1+n^{-1})v$ и, значит, $(1+n^{-1})^{-1}x \in v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Однако последовательность векторов $(1+n^{-1})^{-1}x$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к x. Отсюда получаем, что $x \in v^+$. Следовательно, $u \subset v^+$. Поэтому $\overline{v} = v^+ = u$. Отметим, что равенства для v° и $\overline{v}$ могут быть легко доказаны также с использованием секвенциальной непрерывности μ_v. Равенства $\overline{v^\circ} = \overline{v}$ и $(\overline{v})^\circ = v^\circ$ в силу доказанных равенств очевидны. Утверждения, относящиеся к множеству w, вытекают из теоремы 3.7 и определения w с учетом $0 \in v^\circ$. ▶

Для линейных пространств докажем предложения, аналогичные предложениям 2.13—2.16.

Предложение 3.9. *Если в векторном пространстве X линейная операция предела Λ определена конечной системой окрестностей нуля, то $\Lambda(\dot{0}) = X$ и, значит, X является единственной окрестностью нуля.*

◀ Пусть линейная операция предела Λ определена конечной системой окрестностей нуля $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ с некоторым $n \in \mathbb{N}$. Тогда операция предела Λ может быть определена также одной окрестностью нуля $v = \bigcap\limits_{i=1}^{n} v_i$, причем v содержится в любой окрестности нуля линейного пространства (X, Λ). Поэтому $v = \Lambda(\dot{0})$ и, значит, v является векторным подпространством. Однако $0 \in v^-$ в (X, Λ) и, значит, $v^- \neq \varnothing$. Отсюда в силу утверждения г) теоремы 3.13 следует, что $v = X$. ▶

Предложение 3.10. *Если U_0 (W_0) — полная система окрестностей (открытых окрестностей) нуля линейного пространства, то выполнение первого (второго) из равенств*

$$\bigcap_{u \in U_0} (u + u) = \{0\}, \qquad \bigcap_{w \in W_0} (w + w) = \{0\}$$

необходимо и достаточно для отделимости (хаусдорфовости) этого пространства.

◀ В силу теоремы 3.12 имеют место равенства

$$\bigcap_{v \in U_0} v^+ = \bigcap_{v \in U_0} \bigcap_{u \in U_0} (v + u) = \bigcap_{u \in U_0} (u + u),$$

$$\bigcap_{v \in W_0} \overline{v} = \bigcap_{v \in W_0} \bigcap_{w \in W_0} (v + w) = \bigcap_{w \in W_0} (w + w).$$

Отсюда с учетом предложения 3.6 вытекает справедливость доказываемого предложения. ▶

Предложение 3.11. *Пусть V_0 — такая система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ), что каждое $v \in V_0$ содержит $u \in V_0$, для которого $u + u \subset v$. Тогда*

а) для любого $M \subset X$ множество $G = \bigcap\limits_{v \in V_0} (M + v)$ замкнуто в (X, Λ), причем $\overline{M} \subset G$;

б) в (X, Λ) внутренность v° каждого $v \in V_0$ содержит окрестность нуля из V_0 и, значит, является открытой окрестностью нуля;

в) если $\widetilde{V}_0$ — фильтр в X, имеющий предбазу V_0, то для каждого $v \in \widetilde{V}_0$ существует такая открытая в (X, Λ) окрестность нуля $w \in \widetilde{V}_0$, что $\overline{w} + \overline{w} \subset v$;

г) если пересечение системы V_0 содержит только нуль, то пространство (X, Λ) хаусдорфово;

д) если фильтр в X, имеющий предбазу V_0, содержит пол-

ную систему открытых окрестностей нуля пространства (X, Λ)*, а секвенциально компактное подмножество* $K \subset X$ *и замкнутое подмножество* $M \subset X$ *не пересекаются, то существует такая уравновешенная открытая окрестность нуля* w*, что* $(\overline{K} + w) \cap (M + w) = \varnothing$*;*

е) если V_0 *является предбазой фильтра всех окрестностей нуля пространства* (X, Λ)*, то* (X, Λ) *является пространством Фреше–Урысона.*

◀ (а) Для каждого $v \in V_0$ выберем $u \in V_0$ так, чтобы $u + u \subset \subset v$. Очевидно, $G \subset M + u$. В силу теоремы 3.12 имеем также $G^+ \subset G + u$. Поэтому $G^+ \subset M + u + u \subset M + v$. Следовательно, $G^+ \subset \bigcap\limits_{v \in V_0} (M + v) = G$. Отсюда с учетом $G \subset G^+$ вытекает равенство $G^+ = G$, означающее, что множество G замкнуто. Так как $M \subset G$, то $\overline{M} \subset \overline{G} = G$.

(б) Пусть $v \in V_0$. Выберем $u \in V_0$ так, чтобы $u + u \subset v$. Обозначим $M = X \backslash v$. Докажем, что $u \cap (M - u) = \varnothing$. Предположим противное. Тогда найдется такой вектор x, что $x \in u$ и $x \in M - u$. Из $x \in M - u$ следует существование таких $z \in M$ и $y \in u$, что $x = z - y$. Отсюда получаем $z = x + y \in u + u \subset v$, что невозможно. Очевидно, система $\{-w : w \in V_0\}$ удовлетворяет такому же условию, что и V_0. Поэтому в силу а) $\overline{M} \subset M - u$. Но тогда $u \cap \overline{M} = \varnothing$ и, значит, $u \subset X \backslash \overline{M} = v^\circ$.

(в) Каждое $v \in \widetilde{V}_0$ содержит пересечение конечного числа окрестностей нуля из V_0. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ имеет место включение $\bigcap\limits_{i=1}^{n} v_i \subset v$, где $v_i \in V_0$. Для каждого v_i выберем $u_i \in V_0$ так, чтобы $u_i + u_i + u_i + u_i \subset v_i$. В силу б) внутренность $u_i^\circ = w_i$ содержит окрестность нуля из V_0 и, следовательно, $w_i \in \widetilde{V}_0$. Положим $w = \bigcap\limits_{i=1}^{n} w_i$. Очевидно, множество w открыто, причем $w \in \widetilde{V}_0$ и $w + w + w + w \subset v$. Однако $\overline{w} \subset w + w$ и, значит, $\overline{w} + \overline{w} \subset v$.

(г) Пусть W_0 — полная система открытых окрестностей нуля пространства (X, Λ). В силу б) каждое $v \in V_0$ содержит $w \in W_0$, для которого $w + w \subset v$. Поэтому для системы W_0 выполняется условие предложения 3.10 и, значит, пространство (X, Λ) хаусдорфово.

(д) Так как множество K секвенциально компактно в (X, Λ), то в силу утверждения д) теоремы 3.2 замыкание $\overline{K}$ тоже секвенциально компактно. При этом из равенств $\overline{K}=K+\Lambda(\dot{0})$, $K\cap M=\varnothing$ и замкнутости M следует, что $\overline{K}\cap M=\varnothing$. Кроме того, в силу теоремы 3.7 или утверждения а) теоремы 3.13 $\overline{K}-M$ замкнуто, а множество $v=X\setminus(\overline{K}-M)$ открыто. Очевидно, $0\in v$. Поэтому v является открытой окрестностью нуля. С учетом в) выберем уравновешенную открытую окрестность нуля w так, чтобы $w+w\subset v$. Однако $w+w=w-w$ и $v\cap(\overline{K}-M)=\varnothing$. Отсюда получаем, что $(w-w)\cap(\overline{K}-M)=\varnothing$ и, следовательно, $(\overline{K}+w)\cap(M+w)=\varnothing$.

(е) Если V_0 является предбазой фильтра всех окрестностей нуля пространства $(X,\,\Lambda)$, то в силу в) каждая окрестность нуля содержит открытую окрестность нуля. Поэтому $(X,\,\Lambda)$ является пространством Фреше–Урысона. ▶

В силу утверждения в) предложения 3.11 линейная операция предела, указанная в предложении 3.5, может быть определена векторной топологией.

Предложение 3.12. *Пусть в векторном пространстве X линейная операция предела Λ определена счетной системой окрестностей нуля $\{u_n : n\in\mathbb{N}\}$. Тогда в линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$ существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля $\{v_n : n\in\mathbb{N}\}$, состоящая из уравновешенных открытых окрестностей нуля v_n, удовлетворяющих включению $v_{n+1}+v_{n+1}\subset v_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Если при этом каждое u_n содержит выпуклую окрестность нуля, то все v_n с указанными свойствами могут быть выбраны выпуклыми.*

◀ В линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$ для каждого $n\in\mathbb{N}$ выберем некоторую уравновешенную окрестность нуля $u'_n\subset u_n$ (если u_n содержит выпуклую окрестность нуля, то u'_n считается и выпуклым). Тогда система окрестностей нуля $\{u'_n : n\in\mathbb{N}\}$ тоже определяет операцию предела Λ. В силу предложения 1.13 счетная система $\{w_n : n\in\mathbb{N}\}$, где $w_n=\bigcap\limits_{i=1}^{n} u'_i$, является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства $(X,\,\Lambda)$. При этом окрестности нуля w_n уравновешены и $w_{n+1}\subset w_n$. Методом индукции докажем существование такой последовательности натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$, что $w_{i_{n+1}}+w_{i_{n+1}}\subset w_{i_n}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Возьмем $i_1=1$ и предположим для некоторого $m\in\mathbb{N}$ числа $i_1,\,i_2,\,\ldots,\,i_m$ выбраны. Докажем возможность выбора i_{m+1}. Допустим $(w_{i_m+k}+w_{i_m+k})\setminus w_{i_m}\neq\varnothing$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда для каждого $k\in\mathbb{N}$ существуют такие векторы x_k и y_k из w_{i_m+k}, что $x_k+y_k\notin w_{i_m}$. В силу $w_{n+1}\subset w_n$ каждая из последовательностей $(x_k : k \in \mathbb{N})$ и $(y_k : k \in \mathbb{N})$ почти вся лежит в каждом w_n и, следовательно, сходится к нулю. Поэтому последовательность $(x_k + y_k : k \in \mathbb{N})$ тоже сходится к нулю. Однако это невозможно, поскольку $x_k + y_k \notin w_{i_m}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает существование числа $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого $(w_{i_m+k_0} + w_{i_m+k_0}) \backslash w_{i_m} = \varnothing$. Положим $i_{m+1} = i_m + k_0$. Тогда $w_{i_{m+1}} + w_{i_{m+1}} \subset w_{i_m}$. Тем самым существование требуемой последовательности $(i_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ доказано. Очевидно, полученная система $\{w_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства (X, Λ) и удовлетворяет условию предложения 3.11. Поэтому в (X, Λ) для каждого $n \in \mathbb{N}$ внутренность $w_{i_n}^{\circ} = v_n$ является открытой окрестностью нуля. При этом $v_{n+1} + v_{n+1} \subset v_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как w_{i_n} уравновешено, то в силу утверждения в) теоремы 3.13 v_n тоже уравновешено. Если же каждое u_n' выпукло, то v_n выпукло. Существование требуемой системы окрестностей нуля доказано. ▶

§ 4. Фундаментальные последовательности, предкомпактные, ограниченные и вполне ограниченные множества в линейном пространстве. Полные и квазиполные линейные пространства

Поскольку указанным в теореме 3.1 способом с линейным пространством ассоциируется пространство с секвенциальной равномерностью, введенные в главе II понятия можно использовать и для линейных пространств. Однако в случае линейных пространств в силу теорем 3.1 и 3.10 эти понятия можно описать непосредственно через линейные операции предела (вместо отношений секвенциальной равномерности) или системы окрестностей нуля (вместо систем окружений).

Определение 3.5. *В линейном пространстве* (X, Λ) *последовательность* $\hat{x}$ *называется* Λ*-фундаментальной (короче — фундаментальной), если* $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$ *для любого* $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Подпоследовательность фундаментальной последовательности и сходящаяся последовательность фундаментальны. Фундаментальная последовательность, обладающая сходящейся подпоследовательностью, сходится. Для фундаментальных последовательностей $\hat{x}$, $\hat{y}$ и числа α последовательности $\hat{x} + \hat{y}$ и $\alpha\hat{x}$ фундаментальны. Если последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна, то для любых стремящихся к бесконечности последовательностей натуральных чисел k_n и m_n, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(x_{k_n} - x_{m_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю.

Из теорем 2.16 и 3.10 вытекает

Теорема 3.15. *Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ), определяющая операцию предела Λ. В (X, Λ) последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого $v \in V_0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $x_n - x_m \in v$ для всех $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$.* ►

Определение 3.6. *В линейном пространстве (X, Λ) множество M называется Λ-предкомпактным (короче — предкомпактным), если любая последовательность в M обладает фундаментальной подпоследовательностью.*

Подмножество предкомпактного множества и секвенциально квазикомпактное множество предкомпактны. Для предкомпактных множеств M, G и конечного множества A чисел множества $M \cup G$, $M + G$ и AM предкомпактны.

Определение 3.7. *Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ). Подмножество $M \subset X$ называется V_0-ограниченным (или V_0-ограниченным по сложению), если для каждого $v \in V_0$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $M \subset v_n \cap (-v_n)$, где $v_n = v + v + \ldots + v$, а число слагаемых равно n.*

С учетом теоремы 3.10 и замечаний 3.2, 3.3 понятие V_0-ограниченного множества является частным случаем понятия, данного в определении 2.12.

Подмножество V_0-ограниченного множества и квазизамыкание V_0-ограниченного множаства V_0-ограничены. Если внутренность каждого $v \in V_0$ содержит нуль, то замыкание V_0-ограниченного множества V_0-ограничено. Для V_0-ограниченных множеств M и G множества $M \cup G$ и $M + G$ V_0-ограничены. Если же каждое $v \in V_0$ содержит уравновешение (радиальное уравновешение) некоторого $u \in V_0$, то для V_0-ограниченного множества M и ограниченного множества A чисел (вещественных чисел) множество AM V_0-ограничено.

Предложение 3.13. *Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ). Тогда в (X, Λ) предкомпактное множество V_0-ограничено и, в частности, фундаментальная последовательность V_0-ограничена.*

◄ Для $v \in V_0$ и $n \in \mathbb{N}$ обозначим $v_n = v + v + \ldots + v$, где число слагаемых равно n. Предположим предкомпактное множество M не V_0-ограничено. Тогда существует $v \in V_0$, для которого $M \setminus (v_n \cap (-v_n)) \neq \varnothing$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Выберем некоторые $x_n \in M \setminus (v_n \cap (-v_n))$, $n \in \mathbb{N}$, и положим $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. В силу предкомпактности M последовательность $\hat{x}$ обладает фундаментальной подпоследовательностью $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $y_n - y_m \in v' = v \cap (-v)$ при $n \geqslant m$. Поскольку v' поглощающе по сложению, найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $y_m \in v'_k$. Но тогда $y_n \in v' + v'_k = v'_{k+1} \subset v_{k+1} \cap (-v_{k+1})$ при $n \geqslant m$. Это противоречит выбору $\hat{x}$. Значит, множество M V_0-ограничено. ▶

Определение 3.8. *Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля пространства (X, Λ). Подмножество $M \subset X$ называется V_0-функционально ограниченным, если для каждого $v \in V_0$ функционал Минковского μ_v ограничен на M (т. е. числовое множество $\mu_v(M)$ ограничено).*

В силу теоремы 3.10 и замечания 3.4 понятие V_0-функционально ограниченного множества является частным случаем понятия, данного в определении 2.15.

Подмножество V_0-функционально ограниченного множества, конечное объединение V_0-функционально ограниченных множеств и секвенциально квазикомпактное множество V_0-функционально ограничены. Для V_0-функционально ограниченного множества M и ограниченного множества A вещественных неотрицательных чисел множество AM V_0-функционально ограничено, причем если каждое $v \in V_0$ содержит уравновешение некоторого $u \in V_0$, то множество AM V_0-функционально ограничено при любом ограниченном числовом множестве A, а V_0-функционально ограниченное множество V_0-ограничено.

Определение 3.9. *Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ). Подмножество $M \subset X$ называется V_0-радиально ограниченным, если для любого $v \in V_0$ существует такое число $r > 0$, что $M \subset rv$.*

Для каждого $v \in V_0$ функционал Минковского μ_v ограничен на любом V_0-радиально ограниченном множестве. Поэтому V_0-радиально ограниченное множество V_0-функционально ограничено. Подмножество V_0-радиально ограниченного множества и секвенциально квазикомпактное множество V_0-радиально ограничены. Если каждое $v \in V_0$ содержит радиальное уравновешение некоторого $u \in V_0$, то V_0-функционально ограниченное множество и конечное объединение V_0-радиально ограниченных множеств V_0-радиально ограничены, а для V_0-радиально ограниченного множества M и ограниченного множества A вещественных неотрицательных чисел множество AM V_0-радиально ограничено. Если же каждое $v \in V_0$ содержит уравновешение некоторого $u \in V_0$, то V_0-радиально ограниченное множество M V_0-ограничено, а множество AM V_0-радиально ограничено при любом ограниченном числовом множестве A.

Определение 3.10. *В линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$ множество M называется Λ-радиально ограниченным (короче — Λ-ограниченным или просто ограниченным), если $0\in\Lambda(\hat r\hat x)$ для любых $\hat x\in M^{\mathbb N}$ и сходящейся к нулю последовательности $\hat r$ положительных чисел.*

Предложение 3.14. *В линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$ для ограниченности множества M необходимо, чтобы $0\in\Lambda(\hat\alpha\hat x)$ для любых $\hat x\in M^{\mathbb N}$ и сходящейся к нулю числовой последовательности $\hat\alpha$, и достаточно, чтобы $0\in\Lambda(\hat r\hat x)$ для любых $\hat x\in M^{\mathbb N}$ и сходящейся к нулю строго убывающей последовательности $\hat r$ положительных рациональных чисел.*

◀ Пусть множество M ограничено, $\hat x\in M^{\mathbb N}$, а $\hat\alpha=(\alpha_n:n\in\mathbb N)$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность. Для каждого $n\in\mathbb N$ положим $r_n=|\alpha_n|$, а $\beta_n=\alpha_n|\alpha_n|^{-1}$ при $\alpha_n\neq 0$ и $\beta_n=1$ при $\alpha_n=0$. Обозначим $\hat r=(r_n:n\in\mathbb N)$ и $\hat\beta=(\beta_n:n\in\mathbb N)$. Последовательность $\hat r$ неотрицательных чисел сходится к нулю, а числовая последовательность $\hat\beta$ ограничена. Очевидно, из ограниченности M следует, что $0\in\Lambda(\hat r\hat x)$. Но тогда в силу утверждения г) теоремы 3.4 имеем $0\in\Lambda(\hat\beta\hat r\hat x)$. Однако $\hat\beta\hat r\hat x=\hat\alpha\hat x$. Поэтому $0\in\Lambda(\hat\alpha\hat x)$.

Для доказательства достаточности рассмотрим произвольные $\hat x\in M^{\mathbb N}$ и сходящуюся к нулю последовательность $\hat\alpha=$ $=(\alpha_n:n\in\mathbb N)$ положительных чисел. Очевидно, что каждая подпоследовательность последовательности $\hat\alpha$ обладает строго убывающей подпоследовательностью. Пусть $\hat\beta=(\beta_n:n\in\mathbb N)\prec\hat\alpha$ — строго убывающая подпоследовательность. Выберем строго убывающую последовательность $\hat r=(r_n:n\in\mathbb N)$ положительных рациональных чисел так, чтобы числовая последовательность $\hat\gamma=(\beta_n r_n^{-1}:n\in\mathbb N)$ была ограниченной. По условию, $0\in\Lambda(\hat r\hat y)$ для любого $\hat y\in M^{\mathbb N}$, так как $\lim\hat r=0$. В силу утверждения г) теоремы 3.4 имеем $0\in\Lambda(\hat\gamma\hat r\hat y)$. Однако $\hat\gamma\hat r\hat y=\hat\beta\hat y$. Поэтому $0\in\Lambda(\hat\beta\hat y)$. Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности $\hat\alpha\hat x$ обладает сходящейся к нулю подпоследовательностью. Отсюда вытекает, что $0\in\Lambda(\hat\alpha\hat x)$. Значит, множество M ограничено. ▶

Подмножество ограниченного множества и секвенциально квазикомпактное множество ограничены. Для ограниченных множеств M, G и ограниченного множества A чисел множества $M\cup G$, $M+G$ и AM ограничены. Для сходящейся последовательности $\hat x$ множество $[\hat x]^+=\overline{[\hat x]}$ ограничено.

Пусть (X, Λ) — линейное пространство. Каждому числу α сопоставим секвенциально равномерно непрерывное отображение $B_\alpha : X \to X$, определенное равенством $B_\alpha(x) = \alpha x$ для всех $x \in X$. Положим $\mathcal{B} = \{B_\alpha : \alpha \in (0;\, 1)\}$. Легко заметить, что понятие ограниченного множества совпадает с понятием $\mathcal{B}$-ограниченного множества, данным в определении 2.17.

В линейном пространстве (X, Λ) множество M ограничено тогда и только тогда, когда каждая последовательность в M обладает ограниченной подпоследовательностью.

Теорема 3.16. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, $M \subset X$, а V_0 — некоторая система окрестностей нуля, определяющая операцию предела Λ. Если M ограничено, то для каждой окрестности нуля w существует такое число $\varepsilon > 0$, что $\alpha M \subset w$ для всех чисел α с $|\alpha| < \varepsilon$. Обратно, если для каждого $v \in V_0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $rM \subset v$ для всех рациональных $r \in (0;\, \varepsilon)$, то M ограничено. Если же каждое $v \in V_0$ содержит радиальное уравновешение некоторого $u \in V_0$, то для ограниченности M достаточно, чтобы для каждого $v \in V_0$ существовало такое число $\alpha \neq 0$, что $\alpha M \subset v$.*

◀ Пусть M ограничено, а w — окрестность нуля. Предположим для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое число $\alpha_n \neq 0$, что $|\alpha_n| < n^{-1}$ и $(\alpha_n M) \backslash w \neq \varnothing$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем некоторое $y_n \in (\alpha_n M) \backslash w$ и положим $x_n = \alpha_n^{-1} y_n$. Тогда $x_n \in M$ и $\alpha_n x_n \notin w$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что последовательность $(\alpha_n x_n : n \in \mathbb{N})$ не сходится к нулю. А это противоречит ограниченности M. Следовательно, найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\alpha M \subset w$ для всех чисел α с $|\alpha| < n^{-1}$.

Пусть, обратно, для каждого $v \in V_0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $rM \subset v$ для всех рациональных $r \in (0;\, \varepsilon)$. Рассмотрим последовательность векторов $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, и сходящуюся к нулю последовательность рациональных чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что для каждого $v \in V_0$ и соответствующего ему числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $r_n < \varepsilon$ и $r_n x_n \in v$ для всех $n \geqslant m$. Поэтому последовательность $(r_n x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Следовательно, M ограничено.

Докажем последнее утверждение теоремы. Рассмотрим последовательность векторов $x_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, и сходящуюся последовательность чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть $v \in V_0$. Выберем $u \in V_0$, радиальное уравновешение $\widetilde{u}$ которого содержится в v. По условию, существует такое число $\alpha \neq 0$, что $\alpha M \subset u$. Но тогда найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $r_n < 1$ и $\alpha r_n x_n \in \widetilde{u} \subset v$ для всех $n \geqslant m$. Поэтому последовательность векторов $\alpha r_n x_n$, $n \in \mathbb{N}$, а следовательно, и $(r_n x_n : n \in \mathbb{N})$ сходятся к нулю. Это означает, что M ограничено. ▶

Следствие 3.4. *Если в линейном пространстве окрестность нуля v ограничена, то для любой сходящейся к нулю последовательности чисел $\alpha_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, система $\{\alpha_n v : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля.* ▶

Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля в линейном пространстве (X, Λ). Очевидно, ограниченное множество V_0-ограничено, V_0-функционально ограничено и V_0-радиально ограничено. При этом если V_0 определяет операцию предела Λ, а каждое $v \in V_0$ содержит радиальное уравновешение некоторого $u \in V_0$, то понятия ограниченного множества, V_0-функционально ограниченного множества и V_0-радиально ограниченного множества попарно эквивалентны. Однако U_0-ограниченное множество, где U_0 — полная система окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ), может не быть ограниченным, а именно: фундаментальная последовательность может не быть ограниченной (см. пример в § 16, n° 1).

Предложение 3.15. *Если в линейном пространстве фундаментальная последовательность $\hat{x}$ ограничена, а числовая последовательность $\hat{\alpha}$ сходится, то последовательность $\hat{\alpha}\hat{x}$ фундаментальна.*

◀ Пусть последовательность $\hat{x}$ фундаментальна и ограничена, а числовая последовательность $\hat{\alpha}$ сходится. Рассмотрим произвольное $\hat{x}' \prec \hat{x}$, а также соответствующее $\hat{\alpha}' \prec \hat{\alpha}$. Очевидно, $\hat{\alpha}\hat{x} - \hat{\alpha}'\hat{x}' = \hat{\alpha}(\hat{x} - \hat{x}') + (\hat{\alpha} - \hat{\alpha}')\hat{x}'$. В силу фундаментальности $\hat{x}$ последовательность $\hat{x} - \hat{x}'$ сходится к нулю. Но тогда $\hat{\alpha}(\hat{x} - \hat{x}')$ тоже сходится к нулю, так как $\hat{\alpha}$ сходится. Последовательность $(\hat{\alpha} - \hat{\alpha}')\hat{x}'$ сходится к нулю, поскольку $\hat{\alpha} - \hat{\alpha}'$ сходится к нулю, а последовательность $\hat{x}'$ ограничена. Следовательно, $\hat{\alpha}\hat{x} - \hat{\alpha}'\hat{x}'$ сходится к нулю и, значит, последовательность $\hat{\alpha}\hat{x}$ фундаментальна. ▶

Предложение 3.16. *Если операция предела линейного пространства определяется некоторой системой выпуклых окрестностей нуля V_0, то V_0-ограниченное множество ограничено.*

◀ Пусть множество M V_0-ограничено, а $v \in V_0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $nv = v + v + \ldots + v$, где число слагаемых равно n. Поэтому $M \subset nv$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Отсюда, поскольку окрестности нуля из V_0 радиально уравновешены, в силу теоремы 3.16 получаем ограниченность M. ▶

Предложение 3.17. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0 и полную систему открытых окрестностей нуля W_0. Если система окрестностей нуля $U_0' = \{u^+ : u \in U_0\}$ определяет операцию предела Λ, то квазизамыкание ограниченного множества ограничено. Если же система окрестностей нуля $W_0' = \{\overline{w} : w \in W_0\}$*

it определяет операцию предела Λ, то замыкание ограниченного множества ограничено.

◀ Пусть множество M ограничено, а $u' \in U_0'$. Уравновешенную окрестность нуля $u \in U_0$ выберем так, чтобы $u^+ \subset u'$. В силу теоремы 3.16 существует такое число $\varepsilon > 0$, что $rM \subset u$ для любого $r \in (0;\, \varepsilon)$. Поэтому $rM^+ \subset u^+ \subset u'$ для всех $r \in (0;\, \varepsilon)$. Отсюда в силу теоремы 3.16 получаем ограниченность квазизамыкания M^+. Второе утверждение доказывается аналогично. ▶

Определение 3.11. *Линейное пространство $(X,\, \Lambda)$ называется полным (квазиполным), если в нем любая фундаментальная (фундаментальная и ограниченная) последовательность сходится. Подмножество $M \subset X$ называется полным (квазиполным), если $M \cap \Lambda(\hat{x}) \neq \varnothing$ для любой фундаментальной (фундаментальной и ограниченной) последовательности $\hat{x}$ в M.*

В полном линейном пространстве понятия секвенциальной квазикомпактности и предкомпактности множества совпадают.

Предложение 3.18. *Если в линейном пространстве $(X,\, \Lambda)$ множество M полно (квазиполно), то $\overline{M} = M^+ = M + \Lambda(\dot{0})$, а множество $\overline{M}$ полно (квазиполно).*

◀ Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — фундаментальная (фундаментальная и ограниченная) последовательность в $M + \Lambda(\dot{0})$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем, что $x_n = y_n + z_n$, где $y_n \in M$ и $z_n \in \Lambda(\dot{0})$. Так как последовательность $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, то последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в силу равенства $\hat{y} = \hat{x} - \hat{z}$ фундаментальна (фундаментальна и ограничена), а $\Lambda(\hat{y})$=$\Lambda(\hat{x})$. По условию, $M \cap \Lambda(\hat{y}) \neq \varnothing$. Поэтому $\varnothing \neq \Lambda(\hat{x}) \subset M + \Lambda(\dot{0})$. Отсюда следует, что $M + \Lambda(\dot{0})$ полно (квазиполно) и замкнуто. ▶

Отметим, что рассматриваемые в теории топологических векторных пространств понятия ограниченного подмножества топологического векторного пространства $(X,\, \tau)$ и секвенциальной полноты пространства $(X,\, \tau)$ (или его подмножества) совпадают соответственно с понятиями ограниченного подмножества линейного пространства $(X,\, \Lambda)$ и полноты пространства $(X,\, \Lambda)$ (или его подмножества), где Λ — операция предела, определенная топологией τ.

Определение 3.12. *Пусть V_0 — некоторая система окрестностей нуля линейного пространства $(X,\, \Lambda)$. Подмножество $M \subset X$ называется V_0-вполне ограниченным, если для каждого $v \in V_0$ существует такое конечное $K \subset X$, что $M \subset$ $\subset (K + v) \cap (K - v)$.*

С учетом теоремы 3.10 и замечания 3.3 понятие V_0-вполне ограниченного множества является частным случаем понятия, данного в определении 2.13.

Очевидно, V_0-вполне ограниченное множество V_0-ограничено. Подмножество V_0-вполне ограниченного множества и конечное объединение V_0-вполне ограниченных множеств V_0-вполне ограничены. Для V_0-вполне ограниченного множества M и конечного множества G множество $M+G$ V_0-вполне ограничено. Если для каждых $v \in V_0$ и $n \in \mathbb{N}$ существует $u \in V_0$, уравновешение (радиальное уравновешение) $\widetilde{u}$ которого удовлетворяет включению $n\widetilde{u} \subset v$, то для V_0-вполне ограниченного множества M и конечного множества A чисел (вещественных чисел) множество AM V_0-вполне ограничено. Предкомпактное множество M тоже V_0-вполне ограничено, поскольку для каждого $v \in V_0$ всякое подмножество $K \subset M$, удовлетворяющее условию $(K-K) \cap (-v) \cap v = \{0\}$, конечно и среди них есть максимальное.

Предложение 3.19. *Пусть V_0 — система всех выпуклых окрестностей нуля линейного пространства (X, Λ). Тогда*

а) замыкание выпуклой оболочки H V_0-вполне ограниченного подмножества $M \subset X$ V_0-вполне ограничено;

б) если система окрестностей нуля V_0 определяет операцию предела Λ, то замыкание выпуклой оболочки H ограниченного подмножества $M \subset X$ ограничено.

◀ Пусть $v \in V_0$. С учетом теоремы 3.14 выберем уравновешенную открытую окрестность нуля $u \in V_0$ так, чтобы $3u \subset v$.

(а) Существует конечное $K \subset X$, для которого $M \subset K+u$. Легко убедиться, что выпуклая оболочка H' множества K секвенциально компактно. Поэтому $H' \subset K'+u$ для некоторого конечного $K' \subset H'$. Однако $H \subset H'+u$. Отсюда в силу теоремы 3.12 получаем $\overline{H} \subset H'+2u \subset K'+3u \subset (K'+v) \cap (K'-v)$, т. е. замыкание $\overline{H}$ V_0-вполне ограничено.

(б) Существует число $r>0$, для которого $rM \subset u$. Поэтому $rH \subset u$ и $r\overline{H} \subset 2u \subset v$. Отсюда с учетом теоремы 3.16 следует ограниченность $\overline{H}$. ▶

Определение 3.13. *В линейном пространстве (X, Λ) множество M называется Λ-вполне ограниченным (короче — вполне ограниченным), если каждая последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в M обладает двумя такими подпоследовательностями $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{x}'' = (x_{j_n} : n \in \mathbb{N})$, что $0 \in \Lambda(\hat{x}' - \hat{x}'')$ и $i_n \neq j_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Если R — отношение секвенциальной равномерности, ассоциированное с линейным пространством (X, Λ), то понятие Λ-

вполне ограниченного множества совпадает с данным в определении 2.14 понятием R-вполне ограниченного множества. На основании этого с учетом теоремы 3.10 и замечания 3.3 из теоремы 2.27 получается

Теорема 3.17. *В линейном пространстве множество M вполне ограничено тогда и только тогда, когда для каждых $M_1 \subset M$ и окрестности нуля v существует такое конечное $K_1 \subset M_1$, что $M_1 \subset K_1 + v$.* ▶

Из теоремы 3.17 следует, что для любой системы V_0 окрестностей нуля линейного пространства вполне ограниченное множество V_0-вполне ограничено.

Подмножество вполне ограниченного множества, конечное объединение вполне ограниченных множеств и предкомпактное множество вполне ограничены (отсюда тоже вытекают предложение 3.13 и V_0-вполне ограниченность предкомпактного множества при любой системы V_0 окрестностей нуля). Для вполне ограниченного множества M, предкомпактного множества G и конечного множества A чисел множества $M+G$ и AM вполне ограничены.

Введенные в линейном пространстве понятия фундаментальной последовательности, предкомпактного, ограниченного и вполне ограниченного множеств инвариантны относительно вещественных линейных подпространств.

Предложение 3.20. *Если в линейном пространстве $(X,\, \Lambda)$ вполне ограниченное (предкомпактное) множество M ограничено, то для любого ограниченного числового множества A множество AM вполне ограничено (предкомпактно).*

◀ Пусть числовое множество A ограничено, а подмножество $M \subset X$ ограничено и вполне ограничено. Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{z}$ в AM и представим ее в виде $\hat{z} = \hat{\beta}\hat{y}$, где $\hat{\beta}$ и $\hat{y}$ — последовательности в A и M соответственно. Ясно, что числовая последовательность $\hat{\beta}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$, а в силу вполне ограниченности M соответствующая подпоследовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \prec \hat{y}$ обладает такими подпоследовательностями $\hat{x}' = (x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{x}'' = (x_{j_n} : n \in \mathbb{N})$, что $0 \in \Lambda(\hat{x}' - \hat{x}'')$ и $i_n \neq j_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\hat{\alpha}' = (\alpha_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\alpha}'' = (\alpha_{j_n} : n \in \mathbb{N})$. Имеем $\hat{\alpha}'\hat{x}' - \hat{\alpha}''\hat{x}'' = \hat{\alpha}'(\hat{x}' - \hat{x}'') + (\hat{\alpha}' - \hat{\alpha}'')\hat{x}''$. Последовательность $\hat{\alpha}'(\hat{x}' - \hat{x}'')$ сходится к нулю, поскольку $\hat{\alpha}'$ сходится, а $\hat{x}' - \hat{x}''$ сходится к нулю. Последовательность $(\hat{\alpha}' - \hat{\alpha}'')\hat{x}''$ тоже сходится к нулю, поскольку последовательность $\hat{x}''$ ограничена, а $\hat{\alpha}' - \hat{\alpha}''$ сходится к нулю. Значит, $\hat{\alpha}'\hat{x}' - \hat{\alpha}''\hat{x}''$ сходится к нулю. Положим $\hat{z}' = \hat{\alpha}'\hat{x}'$ и $\hat{z}'' = \hat{\alpha}''\hat{x}''$. Тогда $\hat{z}' \prec \hat{z}$, $\hat{z}'' \prec \hat{z}$ и $0 \in \Lambda(\hat{z}' - \hat{z}'')$. Поэтому AM вполне ограничено. С учетом предложения 3.15 легко доказывается также утверждение о предкомпактности AM. ►

Предложение 3.21. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0. Если для некоторой подсистемы $V_0 \subset U_0$ система окрестностей нуля $V_0' = \{v + v : v \in V_0\}$ определяет операцию предела Λ, то квазизамыкание ограниченного множества, а также U_0-вполне ограниченное множество, вполне ограниченное множество и предкомпактное множество ограничены, причем если каждое $v \in V_0$ содержит радиальное уравновешение некоторого $u \in V_0$, то V_0-вполне ограниченное множество тоже ограничено.*

◄ Ограниченность квазизамыкания ограниченного множества вытекает из теоремы 3.12 и предложения 3.17. Пусть подмножество $M \subset X$ V_0-вполне ограничено, а для $w \in V_0'$ окрестность нуля $u \in V_0$ выбрана так, что ее радиальное уравновешение v удовлетворяет включению $v + v \subset w$. Для u выберем конечное $K \subset X$ так, чтобы $M \subset K + u$, а для K выберем $r \in (0; 1)$ так, чтобы $rK \subset u$. Тогда $rM \subset rK + ru \subset v + v \subset w$. Поэтому в силу теоремы 3.16 M ограничено. Отсюда вытекают и остальные утверждения. ►

Теорема 3.18. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0 и полную систему открытых окрестностей нуля W_0. Если существует такая система окрестностей нуля $V_0 \subset U_0$, определяющая операцию предела Λ, что каждое $u \in V_0$ содержит $v \in V_0$, для которого $v + v \subset u$, то в этом пространстве*

а) замыкание ограниченного множества ограничено;

б) W_0-вполне ограниченное множество, U_0-вполне ограниченное множество, вполне ограниченное множество и предкомпактное множество ограничены, а если каждое $u \in V_0$ содержит радиальное уравновешение некоторого $w \in V_0$, то V_0-вполне ограниченное множество тоже ограничено;

в) для вполне ограниченного (предкомпактного) множества M и ограниченного числового множества A множество AM вполне ограничено (предкомпактно), а для фундаментальной последовательности $\hat{x}$ и сходящейся числовой последовательности $\hat{\alpha}$ последовательность $\hat{\alpha}\hat{x}$ фундаментальна;

г) замыкание V_0-ограниченного множества V_0-ограничено, а замыкание V_0-вполне ограниченного множества V_0-вполне ограничено, причем для V_0-вполне ограниченных множеств M и G множество $M + G$ V_0-вполне ограничено (здесь систена V_0 может и не определять операцию предела Λ).

Если же каждое $u \in U_0$ содержит $v \in U_0$, для которого $v + v \subset u$, то понятия вполне ограниченного множества, U_0-

вполне ограниченного множества и W_0-вполне ограниченного множества попарно эквивалентны, а понятия U_0-ограниченного множества и W_0-ограниченного множества тоже эквивалентны.

◀ В силу утверждения б) предложения 3.11 каждое $v \in V_0$ содержит некоторое $w \in W_0$. Поэтому с учетом теоремы 3.12 каждая из систем окрестностей нуля $\{w + w : w \in W_0\}$ и $\{\overline{w} : w \in W_0\}$ определяет операцию предела Λ. Значит, система W_0 удовлетворяет условиям предложений 3.17 и 3.21, причем система V_0 тоже удовлетворяет условиям предложения 3.21. Из этих предложений вытекают утверждения а) и б). Утверждение в) вытекает из предложений 3.15 и 3.20 с учетом б). Остальные утверждения тоже легко доказываются с использованием теоремы 3.12 и утверждения б) предложения 3.11 (они вытекают и из предложения 2.29 с учетом теоремы 3.10 и замечаний 3.2, 3.3). ▶

В связи с утверждением б) теоремы 3.18 заметим, что если в линейном пространстве (X, Λ) операция предела Λ определяется системой $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ окрестностей нуля v_n, удовлетворяющих включению $v_{n+1} \subset v_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то для каждого $k \in \mathbb{N}$ окрестность нуля v_k содержит уравновешение некоторой окрестности нуля v_{k+i}, $i \in \mathbb{N}$. Действительно, в противном случае для каждого $i \in \mathbb{N}$ найдутся вектор $x_i \in v_{k+i}$ и число α_i с $|\alpha_i| \leqslant 1$, такие, что $\alpha_i x_i \notin v_k$. Очевидно, последовательность $(x_i : i \in \mathbb{N})$ почти вся лежит в каждой окрестности нуля v_n и, следовательно, сходится к нулю в (X, Λ). Так как последовательность чисел α_i, $i \in \mathbb{N}$, ограничена, то последовательность векторов $\alpha_i x_i$, $i \in \mathbb{N}$, тоже сходится к нулю в (X, Λ). Однако это приводит к противоречию, поскольку $\alpha_i x_i \notin v_k$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Пусть (X, Λ) — прямое произведение семейства $((X_i, \Lambda_i) : i \in I)$ линейных пространств над одним и тем же числовым пространством. Очевидно, в (X, Λ) последовательность $\hat{x}$ фундаментальна тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ последовательность $\hat{x}_i = pr_i(\hat{x})$ фундаментальна в (X_i, Λ_i). Кроме того, в (X, Λ) множество M ограничено тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ проекция $pr_i(M)$ ограничена в (X_i, Λ_i). При этом пространство (X, Λ) полно (квазиполно) тогда и только тогда, когда полно (квазиполно) каждое пространство (X_i, Λ_i), $i \in I$. Если в (X, Λ) множество M предкомпактно (вполне ограничено), то для каждого $i \in I$ проекция $pr_i(M)$ предкомпактна (вполне ограничена) в (X_i, Λ_i). Если же множество I конечно или счетно, а для каждого $i \in I$ проекция $pr_i(M)$ предкомпактна в (X_i, Λ_i), то M предкомпактно в (X, Λ).

Пусть (X, Λ) — линейное пространство, $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ — его фактор-пространство по $\Lambda(\dot{0})$, а $\pi : X \to \Phi$ — фактор-отображение. Тогда в (X, Λ) для фундаментальности последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ необходима и достаточна фундаментальность последовательности $(\pi(x_n) : n \in \mathbb{N})$ в $(\Phi, \widetilde{\lambda})$, а подмножество $M \subset X$ предкомпактно, ограничено или вполне ограничено тогда и только тогда, когда в $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ множество $\pi(M)$ соответственно предкомпактно, ограничено или вполне ограничено. Кроме того, пространство (X, Λ) полно (квазиполно) тогда и только тогда, когда фактор-пространство $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ полно (квазиполно).

§ 5. Метризуемость и нормируемость линейных пространств

1. Если на линейном пространстве с операцией однозначного предела (X, λ) существует метрика ρ, определяющая операцию предела λ, то пространство (X, λ) называется метрическим (или метризуемым) линейным пространством с операцией предела (короче — метрическим линейным пространством).

Заметим, что отношение секвенциальной равномерности, ассоциированное с метрическим линейным пространством (X, λ), может отличаться от отношения секвенциальной равномерности, ассоциированного с метрикой ρ, определяющей в X операцию предела λ. При этом, как показывают примеры в § 16, n° 4, n° 6 и n° 7, ρ-ограниченное множество может не быть λ-ограниченным и λ-ограниченное множество может не быть ρ-ограниченным, а ρ-фундаментальная последовательность может не быть λ-фундаментальной и λ-фундаментальная последовательность может не быть ρ-фундаментальной. Кроме того, относительно пространства с метрикой (X, ρ) можно говорить о его ρ-полноте и λ-полноте (в связи с этим см. пример в § 16, n° 4). Однако если метрика ρ инвариантна относительно сдвигов, т. е. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x, y)$ для всех x, y и z из X, то отношения секвенциальной равномерности, ассоциированные с пространствами (X, λ) и (X, ρ), совпадают (как показывает пример в § 16, n° 3, для совпадения указанных отношений секвенциальной равномерности инвариантность метрики ρ относительно сдвигов не является необходимым условием). Более того, как следует из приведенной ниже теоремы 3.19, для всякого метрического линейного пространства (X, λ) существует инвариантная относительно сдвигов метрика на X, определяющая операцию предела λ.

Если ρ — инвариантная относительно сдвигов метрика на векторном пространстве X, определяющая линейную операцию предела, то пара (X, ρ) называется линейным пространством с метрикой.

Известная теорема о метризуемости топологического векторного пространства для линейных пространств с операцией предела формулируется следующим образом.

Теорема 3.19. *В любом метрическом линейном пространстве (X, λ), где $X \neq \{0\}$, существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из уравновешенных открытых окрестностей нуля. Обратно, если линейная операция однозначного предела λ в векторном пространстве X может быть определена счетной системой окрестностей нуля V_0', то существует такая инвариантная относительно сдвигов метрика на X, определяющая операцию предела λ, что открытые шары с центром в нуле уравновешены. При этом если каждая окрестность нуля из V_0' содержит выпуклую окрестность нуля, то метрика с указанными свойствами может быть выбрана так, чтобы все открытые шары были бы выпуклыми.*

◀ В доказательстве нуждается лишь обратное утверждение теоремы. Пусть линейная операция однозначного предела λ в векторном пространстве X определяется счетной системой окрестностей нуля V_0'. В силу предложения 3.12 линейное пространство (X, λ) имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля $V_0 = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, состоящую из уравновешенных открытых окрестностей нуля v_n, удовлетворяющих включению $v_{n+1} + v_{n+1} \subset v_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если при этом каждое $v \in V_0'$ содержит выпуклую окрестность нуля, то все v_n с указанными свойствами могут быть выбраны выпуклыми. Поскольку система окрестностей нуля V_0 определяет операцию однозначного предела, пересечение этой системы содержит лишь нуль. Используя счетную фундаментальную систему окрестностей нуля V_0, с помощью указанной в [54], с. 26, конструкции построим требуемую метрику (с учетом теоремы 3.10 инвариантная относительно сдвигов метрика на X, определяющая операцию предела λ, такая, что открытые шары с центром в нуле уравновешены, может быть построена также указанным в доказательстве теоремы 2.25 способом).

Обозначим через D множество чисел 0 и $\sum\limits_{n=1}^{m} 2^{-i_n}$, где натуральные числа m и $i_1 < i_2 < \ldots < i_m$ произвольны. Очевидно, каждое число $r \in D$ удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant r < 1$ и единственным образом записывается в виде

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)2^{-n}, \tag{1}$$

где каждое число $c_n(r)$ равно 0 или 1, причем $c_n(r)=1$ лишь для конечного числа значений $n\in\mathbb{N}$.

Для $r\geqslant 1$ положим $M(r)=X$, а для $r\in D$ с учетом (1) положим

$$M(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r)v_n. \tag{2}$$

Функционал $f: X\to\mathbb{R}_+$ определим по формуле

$$f(x) = \inf\{r\in D\cup\{1\} : x\in M(r)\}, \quad x\in X. \tag{3}$$

Докажем, что требуемая метрика ρ может быть определена по формуле

$$\rho(x, y) = f(x-y), \quad x\in X,\ y\in X. \tag{4}$$

С этой целью сначала докажем, что для любых чисел r и s из $D\cup[1;\infty)$ имеет место включение

$$M(r)+M(s)\subset M(r+s). \tag{5}$$

В случаях $rs=0$ и $r+s\geqslant 1$ выполнение (5) очевидно. В случае $r+s<1$ включение (5) докажем методом индукции.

Пусть P_k, где $k\in\mathbb{N}$, обозначает следующее утверждение: если $r\in D$, $s\in D$, $r+s<1$ и $c_n(r)=c_n(s)=0$ для всех $n>k$, то имеет место (5). Утверждение P_1 соответствует случаю $rs=0$ и, следовательно, верно. Предположим для некоторого $k>1$ утверждение P_{k-1} верно. Пусть числа r и s удовлетворяют условию утверждения P_k. Тогда числа r' и s', определенные равенствами

$$r' = r - c_k(r)2^{-k}, \quad s' = s - c_k(s)2^{-k},$$

удовлетворяют условиям утверждения P_{k-1}. С учетом (2) имеем

$$M(r) = M(r') + c_k(r)v_k, \quad M(s) = M(s') + c_k(s)v_k,$$

причем в силу утверждения P_{k-1} выполняется также

$$M(r')+M(s')\subset M(r'+s').$$

Следовательно,

$$M(r)+M(s)\subset M(r'+s')+c_k(r)v_k+c_k(s)v_k. \tag{6}$$

Если $c_k(r)=c_k(s)=0$, то $r=r'$, $s=s'$ и (6) превращается в (5).

Если $c_k(r)+c_k(s)=1$, то (6) принимает вид

$$M(r)+M(s)\subset M(r'+s')+v_k=M(r'+s'+2^{-k})=M(r+s),$$

так что (5) опять верно. Если же $c_k(r)=c_k(s)=1$, то из (6) в силу $v_k+v_k\subset v_{k-1}$ получаем

$$M(r)+M(s)\subset M(r'+s')+v_k+v_k\subset M(r'+s')+v_{k-1}=$$
$$=M(r'+s')+M(2^{1-k})\subset M(r'+s'+2^{1-k})=M(r+s),$$

где последнее включение основано на верности утверждения P_{k-1}. Таким образом, P_{k-1} влечет P_k. Следовательно, (5) верно.

Имеет место включение

$$M(r)\subset M(s),\quad r\leqslant s,\tag{7}$$

где r и s произвольные числа из $D\cup[1;\infty)$. Действительно, при $s\geqslant 1$ включение (7) очевидно, а при $s<1$ числа $r,\ s,\ s-r$ принадлежат D и в силу (5) $M(r)\subset M(r)+M(s-r)\subset M(s)$.

Теперь докажем, что для определенной по формуле (3) функции f выполняется неравенство

$$f(x+y)\leqslant f(x)+f(y),\quad x\in X,\ y\in X,\tag{8}$$

которое в случае $f(x)+f(y)\geqslant 1$ очевидно. Рассмотрим случай $f(x)+f(y)<1$ и зафиксируем некоторое число $\varepsilon>0$. В D найдутся такие числа r и s, что

$$f(x)<r,\quad f(y)<s,\quad r+s<f(x)+f(y)+\varepsilon.\tag{9}$$

В силу (3), (7) и первых двух неравенств (9) имеем $x\in M(r)$, $y\in M(s)$. Но тогда с учетом (5) получаем $x+y\in M(r+s)$ и, следовательно,

$$f(x+y)\leqslant r+s<f(x)+f(y)+\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая произвольность ε, получим (8).

Так как каждое $M(r)$ уравновешено, то $f(x)=f(-x)$. Очевидно, $f(0)=0$. Если $x\neq 0$, то $x\notin v_n=M(2^{-n})$ для некоторого $n\in\mathbb{N}$ и, значит, $f(x)\geqslant 2^{-n}>0$.

Из указанных свойств функционала f следует, что формула (4) определяет инвариантную относительно сдвигов метрику ρ на векторном пространстве X. Для любого числа $\delta>0$ открытый шар K_δ с центром в нуле и радиусом δ, соответствующий метрике ρ, есть множество

$$K_\delta=\{x\in X:f(x)<\delta\}=\bigcup_{r\in D_\delta}M(r),\tag{10}$$

где $D_\delta = (0;\ \delta) \cap (D \cup \{1\})$. Отсюда следует, что K_δ является уравновешенной открытой окрестностью нуля в $(X,\ \lambda)$, причем если $\delta \leqslant 2^{-n}$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $K_\delta \subset v_n$. Поэтому метрика ρ определяет операцию предела λ. Заметим, что если каждое v_n выпукло, то каждое $M(r)$, $r \in D \cup \{1\}$, тоже выпукло. Учитывая это, в силу (7) из (10) получим выпуклость каждого открытого шара K_δ, а значит, и любого его сдвига. ►

Ясно, что линейное пространство с отличным от $\{0\}$ носителем метризуемо тогда и только тогда, когда его операция предела может быть определана при помощи счетной системы окрестностей нуля, пересечение которых содержит только нуль.

Предложение 3.22. *Пусть $(X,\ \lambda)$ — метрическое линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0, а ρ — инвариантная относительно сдвигов метрика на X, определяющая операцию предела λ. Тогда*

а) каждая окрестность нуля v содержит такую уравновешенную открытую окрестность нуля w, что $\overline{w} + \overline{w} \subset v$;

б) при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого семейства $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ в X и суммы $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ имеет место неравенство

$$\rho(0,\ y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(0,\ x_i) \tag{11}$$

и, в частности, $\rho(0,\ nx) \leqslant n\rho(0,\ x)$ для любого $x \in X$;

в) U_0-ограниченное множество и, в частности, λ-ограниченное множество ρ-ограничены;

г) понятия λ-фундаментальной последовательности и ρ-фундаментальной последовательности эквивалентны, а, следовательно, понятия λ-предкомпактного множества и ρ-предкомпактного множества тоже эквивалентны;

д) понятия λ-вполне ограниченного множества и ρ-вполне ограниченного множества эквивалентны;

е) понятия λ-вполне ограниченного множества и λ-предкомпактного множества эквивалентны.

◄ В случае $X = \{0\}$ все указанные утверждения тривиальны. Поэтому рассмотрим случай $X \neq \{0\}$.

Утверждение а) следует из предложений 3.11 и 3.12. Оно легко доказывается также с использованием неравенства

$$\rho(0,\ x+y) \leqslant \rho(0,\ x) + \rho(x,\ x+y) = \rho(0,\ x) + \rho(0,\ y),\ x \in X,\ y \in X.$$

(б) Пусть $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ для $n \in \mathbb{N}$ — семейство в X, а $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Положим $y_0 = 0$ и $y_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Очевидно,

$$\rho(0,\, y_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho(y_{i-1},\, y_i). \tag{12}$$

В силу инвариантности метрики ρ относительно сдвигов имеем $\rho(y_{i-1},\, y_i) = \rho(0,\, y_i - y_{i-1}) = \rho(0,\, x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Учитывая эти равенства и $y_n = y$, из (12) получим (11).

(в) Пусть множество M U_0-ограничено, а u — открытый шар с центром в нуле и единичным радиусом. Тогда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $M \subset u + u + \ldots + u$, где число слагаемых равно n. Поэтому каждый вектор $y \in M$ представляется в виде $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_i \in u$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Однако $\rho(0,\, x_i) < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и в силу (11) $\rho(0,\, y) < n$. Следовательно, множество M ρ-ограничено.

Утверждения г) и д) в силу инвариантности метрики ρ относительно сдвигов очевидны.

Утверждение е) следует из утверждений г), д) и теоремы Хаусдорфа о том, что в пространстве с метрикой $(X,\, \rho)$ понятия ρ-вполне ограниченного множества и ρ-предкомпактного множества эквивалентны. ▶

По аналогии с понятиями метрического линейного пространства и линейного пространства с метркой вводятся понятия полуметрического (или полуметризуемого) линейного пространства и линейного пространства с полуметрикой.

Теорема 3.20. *В полуметрическом линейном пространстве существует конечная или счетная фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из уравновешенных открытых окрестностей нуля. Обратно, если операция предела линейного пространства $(X,\, \Lambda)$ может быть определена конечной системой окрестностей нуля, то Λ определяется также единственной полуметрикой d на X, заданной равенством $d(x,\, y) = 0$ для всех x и y из X. Если же Λ определяется счетной системой окрестностей нуля V_0', то существует такая инвариантная относительно сдвигов полуметрика на X, определяющая операцию предела Λ, что все открытые шары с центром в нуле уравновешены. При этом если каждая окрестность нуля из V_0' содержит выпуклую окрестность нуля, то полуметрика с указанными свойствами может быть выбрана так, чтобы все открытые шары были бы выпуклыми.*

◀ Утверждение, относящееся к полуметрическому линейному пространству, очевидно. Обратное утверждение теоремы в случае конечной системы окрестностей нуля непосредственно следует из предложения 3.9, а в случае счетной системы доказывается по аналогии с теоремой 3.19. ▶

Итак, линейное пространство (X, Λ) с $\Lambda(\dot{0}) \neq X$ полуметризуемо тогда и только тогда, когда Λ определяется счетной системой окрестностей нуля.

В силу следствия 3.4, если в линейном пространстве (X, Λ) существует ограниченная окрестность нуля, то (X, Λ) полуметризуемо, причем если Λ есть операция однозначного предела, то (X, Λ) метризуемо. Однако в метрическом линейном пространстве (X, λ) может не существовать λ-ограниченной окрестности нуля (см. пример в § 16, n° 5).

Если операция предела линейного пространства (X, Λ) определяется счетной системой вещественно уравновешенных выпуклых окрестностей нуля u_n, $n \in \mathbb{N}$, то по формуле

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\mu_n(x-y)}{1+\mu_n(x-y)}, \quad x \in X, \ y \in X,$$

где μ_n — функционал Минковского множества u_n, задается инвариантная относительно сдвигов полуметрика d на X, определяющая операцию предела Λ.

Предложение 3.23. *Линейное пространство (X, Λ) полуметризуемо тогда и только тогда, когда его фактор-пространство по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$ метризуемо.* ►

Предложение 3.24. *Пусть (X, Λ) — полуметрическое линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0, а d — инвариантная относительно сдвигов полуметрика на X, определяющая операцию предела Λ. Тогда*

а) каждая окрестность нуля v содержит такую уравновешенную открытую окрестность нуля w, что $\overline{w} + \overline{w} \subset v$;

б) при каждом $n \in \mathbb{N}$ для любого семейства $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в X и суммы $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ имеет место неравенство $d(0, y) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} d(0, x_i)$ и, в частности, $d(0, nx) \leqslant nd(0, x)$ для любого $x \in X$;

в) U_0-ограниченное множество и, в частности, Λ-ограниченное множество d-ограничены;

г) понятия Λ-фундаментальной последовательности и d-фундаментальной последовательности эквивалентны, а, следовательно, понятия Λ-предкомпактного множества и d-предкомпактного множества тоже эквивалентны;

д) понятия Λ-вполне ограниченного множества и d-вполне ограниченного множества эквивалентны;

е) понятия Λ-вполне ограниченного множества и Λ-предкомпактного множества эквивалентны. ►

2. Отображение $x \mapsto \|x\|$ векторного пространства X в $\mathbb{R}_+$ называется *нормой* на X, если

1) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ для любых $x \in X$ и числа α;

2) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех x и y из X;

3) $\|x\| = 0$ для $x \in X$ только при $x = 0$.

При этом число $\|x\|$ называется нормой вектора x.

Заметим, что если функционал $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям 1) и 2), то $\|0\| = 0$ и $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in X$.

Заданная на векторном пространстве X норма определяет на X инвариантную относительно сдвигов метрику ρ с помощью равенства $\rho(x, y) = \|x - y\|$ для всех x и y из X. Следовательно, норма определяет в X операцию предела, которая, как нетрудно убедиться, является линейной операцией однозначного предела. А именно: точка $x \in X$ является пределом последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в X, если $\lim\limits_n \|x_n - x\| = 0$. Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *нормированным линейным пространством* (в дальнейшем в обозначении нормированного линейного пространства будем указывать только носитель). Полное нормированное линейное пространство называется *банаховым* пространством.

В нормированном линейном пространстве множество M называется ограниченным по норме, если существует такое число $r > 0$, что $\|x\| \leqslant r$ для всех $x \in M$.

Нормированное линейное пространство, имеющее операцию предела λ, локально выпукло и в нем множество λ-ограничено тогда и только тогда, когда оно ограничено по норме.

Линейное пространство с операцией однозначного предела (X, λ) называется *нормируемым*, если существует норма на X, определяющая операцию предела λ.

Известная теорема о нормируемости топологического векторного пространства справедлива также для линейных пространств.

Теорема 3.21. *Линейное пространство с операцией однозначного предела нормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует ограниченная выпуклая окрестность нуля.*

◀ Если операция предела линейного пространства (X, λ) определяется нормой, то в этом пространстве в качестве ограниченной выпуклой окрестности нуля может служить, например, множество $\{x \in X : \|x\| < 1\}$, т. е. открытый шар с центром в нуле и единичным радиусом.

Пусть, обратно, в линейном пространстве с операцией однозначного предела (X, λ) существует ограниченная выпуклая окрестность нуля v. В силу теоремы 3.14 существует выпуклая уравновешенная открытая окрестность нуля $u \subset v$. Очевидно, окрестность нуля u тоже ограничена. Рассмотрим функционал Минковского μ_u окрестности нуля u. В силу уравновешенности u имеет место $\mu_u(\alpha x) = |\alpha|\mu_u(x)$ для любых $x \in X$ и числа α, а в силу выпуклости u имеет место $\mu_u(x+y) \leqslant \mu_u(x) + \mu_u(y)$ для любых x и y из X. Поскольку окрестность нуля u ограничена, в силу следствия 3.4 система $\{ru : r > 0\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля. Так как λ есть операция однозначного предела, то для каждого вектора $x \neq 0$ существует такое число $r > 0$, что $x \notin ru$ и, значит, $\mu_u(x) \geqslant r$. Следовательно, функционал μ_u является нормой на X, т. е. $\mu_u = \|\cdot\|$. В силу того, что окрестность нуля u открыта, для любого числа $r > 0$ имеет место $\{x \in X : \|x\| < r\} = ru$. Отсюда следует, что построенная норма определяет в X операцию предела λ. Значит, пространство $(X,\, \lambda)$ нормируемо. ▶

Линейное пространство нормируемо тогда и только тогда, когда оно имеет ограниченную выпуклую окрестность нуля, не содержащую отличное от $\{0\}$ векторное подпространство.

Полунормой на векторном пространстве X называется всякий функционал $p : X \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющий условиям

1) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для любых $x \in X$ и числа α;

2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех x и y из X.

При этом число $p(x)$ называется полунормой вектора x.

В векторном пространстве функционал Минковского поглощающего, уравновешенного и выпуклого множества является полунормой.

Заданная на векторном пространстве X полунорма p определяет инвариантную относительно сдвигов полуметрику d с помощью равенства $d(x,\, y) = p(x-y)$ для всех x и y из X. Следовательно, полунорма p определяет в X операцию предела, которая, как нетрудно убедиться, является линейной операцией предела. А именно: точка $x \in X$ является пределом последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в X, если $\lim\limits_n p(x_n - x) = 0$. Пара $(X,\, p)$ называется *полунормированным линейным пространством.*

Если операция предела линейного пространства $(X,\, \Lambda)$ определяется полунормой p на X, то $(X,\, \Lambda)$ называется *полунормируемым* и является локально выпуклым пространством, причем $\Lambda(\dot{0}) = \{x \in X : p(x) = 0\}$, а подмножество $M \subset X$ Λ-ограничено тогда и только тогда, когда существует такое число $r > 0$, что $p(x) \leqslant r$ для всех $x \in M$.

Теорема 3.22. *Линейное пространство полунормируемо тогда и только тогда, когда в нем существует ограниченная выпуклая окрестность нуля.* ▶

Предложение 3.25. *Линейное пространство (X, Λ) полунормируемо тогда и только тогда, когда его фактор-пространство по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$ нормируемо.* ►

Предложение 3.26. *Если в векторном пространстве X полунормы p_1 и p_2 определяют одну и ту же операцию предела Λ, то эти полунормы эквивалентны, т. е. существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что $\alpha p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant \beta p_1(x)$ для всех $x \in X$.*

◄ Каждое из множеств $u_1 = \{x \in X : p_1(x) \leqslant 1\}$ и $u_2 = \{x \in X : p_2(x) \leqslant 1\}$ является ограниченной окрестностью нуля в линейном пространстве (X, Λ). Поэтому существуют такие числа $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$, что $c_1 u_1 \subset u_2$ и $c_2 u_2 \subset u_1$. Пусть $x \in X \setminus \Lambda(\dot{0})$. Тогда $p_1(x) \neq 0$ и $p_2(x) \neq 0$. Очевидно, $\frac{1}{p_1(x)} x \in u_1$ и $\frac{1}{p_2(x)} x \in u_2$. Следовательно, $\frac{c_1}{p_1(x)} x \in u_2$ и $\frac{c_2}{p_2(x)} x \in u_1$, т. е. $p_2\bigl(\frac{c_1}{p_1(x)} x\bigr) \leqslant 1$ и $p_1\bigl(\frac{c_2}{p_2(x)} x\bigr) \leqslant 1$. Отсюда получаем, что $c_1 p_2(x) \leqslant p_1(x)$ и $c_2 p_1(x) \leqslant \leqslant p_2(x)$. Поэтому $\alpha p_1(x) \leqslant p_2(x) \leqslant \beta p_1(x)$, где $\alpha = c_2$ и $\beta = c_1^{-1}$. Эти неравенства верны также для $x \in \Lambda(\dot{0})$, так как в этом случае $p_1(x) = p_2(x) = 0$. ►

Если ρ_1 и ρ_2 — эквивалентные метрики на множестве X (т. е. $\alpha \rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant \beta \rho_1(x, y)$ для всех x, y из X и некоторых чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$), то они определяют одну и ту же операцию предела в X. Однако в векторном пространстве X две неэквивалентные метрики тоже могут определять одну и ту же линейную операцию предела, даже если они инвариантны относительно сдвигов (см. пример в § 16, n° 4).

§ 6. Прямая сумма линейных подпространств

Линейное пространство (X, Λ) называется *прямой суммой* своих линейных (вещественных линейных) подпространств (X_1, Λ_1), (X_2, Λ_2) и записывается в виде

$$(X, \Lambda) = (X_1, \Lambda_1) \oplus (X_2, \Lambda_2),$$

если отображение $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ декартова произведения $X_1 \times X_2$ на X является изоморфизмом (вещественным изоморфизмом) прямого произведвния $(X_1, \Lambda_1) \times (X_2, \Lambda_2)$ на (X, Λ).

Если $(X, \Lambda) = (X_1, \Lambda_1) \oplus (X_2, \Lambda_2)$, то $X = X_1 \oplus X_2$. Однако обратное утверждение не верно.

Пусть носитель линейного пространства (X, Λ) является алгебраической прямой суммой своих векторных подпространств X_1 и X_2, т. е. $X = X_1 \oplus X_2$. Рассмотрим линейные подпространства (X_1, Λ_1) и (X_2, Λ_2) в (X, Λ), а также их прямое произведение $(X', \Lambda') = (X_1, \Lambda_1) \times (X_2, \Lambda_2)$. Очевидно, что отображение $h: X' \to X$, определенное равенством $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ для всех $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 = X'$, секвенциально непрерывно и является изоморфизмом X' на X. Пусть $p_1 : X \to X_1$ и $p_2 : X \to X_2$ — проектирующие отображения, аннулирующиеся на X_2 и X_1 соответственно, т. е. $p_1(x) + p_2(x) = x$, $x \in X$. Рассмотрим также проектирующие отображения $pr_1 : X' \to X_1$ и $pr_2 : X' \to X_2$, т. е. $pr_1(x_1, x_2) = x_1$ и $pr_2(x_1, x_2) = x_2$ для всех $(x_1, x_2) \in X'$. Ясно, что $pr_1 = p_1 h$ и $pr_2 = p_2 h$. Согласно теореме 1.70, отображения pr_1 и pr_2 открыты и секвенциально непрерывны. В силу теорем 1.63 и 1.61 из секвенциальной непрерывности отображения h следует, что обратное отображение h^{-1} открыто. Поэтому из равенств $p_1 = pr_1 h^{-1}$ и $p_2 = pr_2 h^{-1}$ вытекает, что отображения p_1 и p_2 открыты. Кроме того, в силу теорем 1.57 и 1.18 для любой точки x из (X, Λ) и любой ее окрестности u множества $p_1(u)$ и $p_2(u)$ являются окрестностями точек $p_1(x)$ и $p_2(x)$ в подпространствах (X_1, Λ_1) и (X_2, Λ_2) соответственно. Из указанных равенств следует также, что если отображение h^{-1} секвенциально непрерывно, то отображения p_1 и p_2 секвенциально непрерывны. Обратно, в силу $h^{-1}(x) = (p_1(x), p_2(x))$, $x \in X$, секвенциальная непрерывность обоих отображений p_1 и p_2 влечет секвенциальную непрерывность h^{-1}. Заметим, что отображение $(p_1 + p_2) : X \to X$, определенное равенством $(p_1 + p_2)(x) = p_1(x) + p_2(x) = x$ для всех $x \in X$, будучи тождественным отображением, секвенциально непрерывно. Поэтому секвенциальная непрерывность одного из отображений p_1 и p_2 влечет секвенциальную непрерывность другого. Отсюда следует, что если отображение h^{-1} не является секвенциально непрерывным, то ни одно из отображений p_1 и p_2 не является секвенциально непрерывным. В случае, когда отображение h^{-1} секвенциально непрерывно, h является изоморфизмом (X', Λ') на (X, Λ) и, следовательно, $(X, \Lambda) = (X_1, \Lambda_1) \oplus (X_2, \Lambda_2)$.

Пусть τ, τ_1 и τ_2 — секвенциальные топологии пространств (X, Λ), (X_1, Λ_1) и (X_2, Λ_2) соответсвенно. Из секвенциальной непрерывности отображения h^{-1} следует, что если $v_1 \in \tau_1$ и $v_2 \in \tau_2$, то $v_1 + v_2 \in \tau$. Так как отображения p_1 и p_2 открыты и в рассматриваемом случае секвенциально непрерывны, то

$$\tau_1 = \{p_1(v) : v \in \tau\} = \{v_1 \subset X_1 : p_1^{-1}(v_1) \in \tau\},$$

$$\tau_2 = \{p_2(v) : v \in \tau\} = \{v_2 \subset X_2 : p_2^{-1}(v_2) \in \tau\}.$$

При этом топология τ индуцирует в X_1 и X_2 секвенциальные топологии τ_1 и τ_2 соответственно. Действительно, для $v_1 \in \tau_1$ и $v_2 \in \tau_2$ в силу секвенциальной непрерывности отображений p_1 и p_2 имеем $p_1^{-1}(v_1) \in \tau$ и $p_2^{-1}(v_2) \in \tau$, причем

$$v_1 = (v_1 + X_2) \cap X_1 = p_1^{-1}(v_1) \cap X_1,$$

$$v_2 = (v_2 + X_1) \cap X_2 = p_2^{-1}(v_2) \cap X_2.$$

Пусть $(U_x : x \in X)$, $(U'_{x_1} : x_1 \in X_1)$ и $(U''_{x_2} : x_2 \in X_2)$ — полные системы окрестностей в пространствах (X, Λ), (X_1, Λ_1) и (X_2, Λ_2) соответственно. Из секвенциальной непрерывности отображения h^{-1} следует, что если $u_1 \in U'_{x_1}$ и $u_2 \in U''_{x_2}$, то $u_1 + u_2 \in U_x$, где $x = x_1 + x_2$. Более того,

$$U'_{x_1} = \{p_1(u) : u \in U_x\} = \{u_1 \subset X_1 : p_1^{-1}(u_1) \in U_x\},$$

$$U''_{x_2} = \{p_2(u) : u \in U_x\} = \{u_2 \subset X_2 : p_2^{-1}(u_2) \in U_x\},$$

где $x \in X$, $x_1 = p_1(x)$ и $x_2 = p_2(x)$, т. е. $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ и $x = x_1 + x_2$.

Предложение 3.27. *Пусть в линейном пространстве (X, Λ) векторные подпространства X_1 и X_2 такие, что $X = X_1 \oplus X_2$. Если $\Lambda(\dot{0}) \subset X_1$, то подпространство $(X_2, \Lambda_2) \subset (X, \Lambda)$ имеет операцию однозначного предела Λ_2. В частности, если X_1 замкнуто в (X, Λ), то Λ_2 является операцией однозначного предела.* ▶

Предложение 3.28. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, $X_1 = \Lambda(\dot{0})$, $X_2 = X \ominus X_1$, $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ и $(X_2, \Lambda_2) \subset (X, \Lambda)$. Тогда $(X, \Lambda) = (X_1, \Lambda_1) \oplus (X_2, \Lambda_2)$, причем Λ_2 является операцией однозначного предела, а (X_2, Λ_2) изоморфно фактор-пространству $(\Phi, \widetilde{\lambda})$ пространства (X, Λ) по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$.*

◀ Так как $X = X_1 \oplus X_2$, то $\Lambda_2(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0}) \cap X_2 = X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Поэтому Λ_2 является операцией однозначного предела в X_2. Пусть $(x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность в X. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вектор x_n единственным образом представляется в виде $x_n = x'_n + x''_n$, где $x'_n \in X_1$ и $x''_n \in X_2$. Очевидно, последовательность $(x'_n : n \in \mathbb{N})$ сходится в подпространстве (X_1, Λ_1), причем множество ее пределов совпадает с X_1. Поэтому последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ тогда и только тогда сходится в (X, Λ), когда последовательность $(x''_n : n \in \mathbb{N})$ сходится в (X_2, Λ_2). Отсюда следует, что $(X,\, \Lambda) = (X_1,\, \Lambda_1) \oplus (X_2,\, \Lambda_2)$. Учитывая это, непосредственно из определения фактор-пространства $(\varPhi,\, \widetilde{\lambda})$ получим, что $(X_2,\, \Lambda_2)$ и $(\varPhi,\, \widetilde{\lambda})$ изоморфны. ►

Предложение 3.29. *Пусть линейное пространство* $(X,\, \Lambda)$ *является прямой суммой своих линейных подпространств* $(X_1,\, \Lambda_1)$ *и* $(X_2,\, \Lambda_2)$. *Тогда* $\overline{X}_1 = X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$ *и* $\overline{X}_2 = X_2 + \Lambda_1(\dot{0})$. *Кроме того, если последовательность векторов* $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, *такая, что существует сходящаяся к нулю последовательность векторов* $y_n \in x_n + \overline{X}_1$, $n \in \mathbb{N}$, *то последовательность однозначно определенных векторов* $x''_n \in (x_n + X_1) \cap X_2$, $n \in \mathbb{N}$, *тоже сходится к нулю.*

◄ Очевидно, что $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda_1(\dot{0}) + \Lambda_2(\dot{0})$. Поэтому $X_1 + \Lambda_2(\dot{0}) = X_1 + \Lambda(\dot{0}) \subset X_1^+ \subset \overline{X}_1$. Пусть $x \in (X_1 + \Lambda_2(\dot{0}))^+$ и $x = x' + x''$, где $x' \in X_1$ и $x'' \in X_2$. Рассмотрим некоторую последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в $X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$, сходящуюся к x, т. е. $x \in \Lambda(\hat{x})$. Ясно, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ вектор x_n единственным образом представляется в виде $x_n = x'_n + x''_n$, где $x'_n \in X_1$ и $x''_n \in \Lambda_2(\dot{0})$. Положим $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{x}'' = (x''_n : n \in \mathbb{N})$. Из условия $(X,\, \Lambda) = (X_1,\, \Lambda_1) \oplus (X_2,\, \Lambda_2)$ следует, что $x' \in \Lambda_1(\hat{x}')$ и $x'' \in \Lambda_2(\hat{x}'')$. Однако $\Lambda_2(\hat{x}'') = \Lambda_2(\dot{0})$ и, значит, $x'' \in \Lambda_2(\dot{0})$. Поэтому $x = x' + x'' \in X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$. Отсюда следует, что $(X_1 + \Lambda_2(\dot{0}))^+ \subset X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$ и, значит, $X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$ замкнуто. Очевидно, $\overline{X}_1 \subset \overline{X_1 + \Lambda_2(\dot{0})} = X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$. Поэтому в силу обратного включения получаем $\overline{X}_1 = X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$. Равенство $\overline{X}_2 = X_2 + \Lambda_1(\dot{0})$ доказывается аналогично.

Пусть последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что существует сходящаяся к нулю последовательность векторов $y_n \in x_n + \overline{X}_1$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ векторы x_n и y_n единственным образом представляются в виде $x_n = x'_n + x''_n$ и $y_n = y'_n + y''_n$, где $x'_n \in X_1$, $x''_n \in X_2$ и $y'_n \in X_1$, $y''_n \in X_2$. Поскольку $(X,\, \Lambda) = (X_1,\, \Lambda_1) \oplus (X_2,\, \Lambda_2)$, из сходимости к нулю последовательности $(y_n : n \in \mathbb{N})$ следует сходимость к нулю каждой последовательности $(y'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(y''_n : n \in \mathbb{N})$. Из $y_n \in x_n + \overline{X}_1$ и $\overline{X}_1 = X_1 + \Lambda_2(\dot{0})$ следует, что $y''_n \in x''_n + \Lambda_2(\dot{0})$. Поэтому последовательность $(x''_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. При этом, очевидно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ пересечение $(x_n + X_1) \cap X_2$ состоит из единственного вектора x''_n. ►

§ 7. Замкнутые векторные подпространства линейного пространства. Конечномерные линейные пространства

Теорема 3.23. *Пусть X_1 и X_2 — векторные подпространства линейного пространства (X, Λ), причем X_1 замкнуто, а X_2 имеет конечную размерность $m \geqslant 1$ и базис $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$. Тогда векторное подпространство $X_0 = X_1 + X_2$ замкнуто. Кроме того, если $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, а $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся последовательность в X_0, то в представлении*

$$x_n = y_n + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k, n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $y_n \in X_1$, а α_{kn} — числа, последовательности $\hat{y} = (y_n :\ n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\alpha}_k = (\alpha_{kn} : n \in \mathbb{N})$, $k = 1, 2, \ldots, m$, тоже сходятся, причем если $x \in \Lambda(\hat{x})$ и

$$x = y + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k, \tag{2}$$

где $y \in X_1$, а α_k — числа, то $y \in \Lambda(\hat{y})$, $\lim \hat{\alpha}_k = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и, значит, подпространство $(X_0, \Lambda_0) \subset (X, \Lambda)$ является прямой суммой подпространств $(X_1, \Lambda_1) \subset (X_0, \Lambda_0)$ и $(X_2, \Lambda_2) \subset (X_0, \Lambda_0)$, т. е. $(X_0, \Lambda_0) = (X_1, \Lambda_1) \oplus (X_2, \Lambda_2)$.

◀ Докажем замкнутость X_0. Заметим, что X_0 можно представить в виде $X_0 = X_1 + X_2'$, где X_2' — такое векторное подпространство, что $X_2' \subset X_2$ и $X_1 \cap X_2' = \{0\}$. Поэтому не будет нарушением общности, если предположить $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. Рассмотрим в X_0 сходящуюся последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вектор x_n представим в виде (1) и докажем ограниченность последовательности чисел

$$\beta_n = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{kn}|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Предположим противное. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел $s_1 < s_2 < \ldots$, что $\beta_{s_n} \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и последовательность чисел $\gamma_n = \beta_{s_n}^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю, а для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел $t_{kn} = \gamma_n \alpha_{ks_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому t_k, т. е. $\lim\limits_n \gamma_n = 0$ и $\lim\limits_n t_{kn} = t_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Очевидно,

$$\sum_{k=1}^{m} |t_k| = 1. \tag{4}$$

Обозначим $z = \sum\limits_{k=1}^{m} t_k e_k$. В силу (4) $z \neq 0$. Кроме того, последовательность векторов $\gamma_n x_{s_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Из

$$\gamma_n y_{s_n} = \gamma_n x_{s_n} - \sum_{k=1}^{m} t_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

следует, что последовательность векторов $\gamma_n y_{s_n} \in X_1$, $n \in \mathbb{N}$, сходится и множество ее пределов есть $\Lambda(\dot{0}) - z$. В силу замкнутости X_1 имеет место $\Lambda(\dot{0}) - z \subset X_1$ и, следовательно, $z \in X_1$. Однако это противоречит условию $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, так как $z \in X_2$ и $z \neq 0$. Полученное противоречие доказывает ограниченность последовательности чисел (3). Отсюда следует, что в (1) числовое множество $\{\alpha_{kn} : k \leqslant m,\, n \in \mathbb{N}\}$ ограничено. Но тогда для каждого $k \leqslant m$ любая подпоследовательность последовательности $\hat{\alpha}_k = (\alpha_{kn} : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся подпоследовательностью. Пусть последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ такая, что для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому α'_k. Из

$$y_{i_n} = x_{i_n} - \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki_n} e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

следует, что последовательность векторов $y_{i_n} \in X_1$, $n \in \mathbb{N}$, сходится и множество ее пределов есть

$$\Lambda(\hat{x}) - \sum_{k=1}^{m} \alpha'_k e_k \subset X_1, \tag{5}$$

где учтена замкнутость X_1. Поэтому $\Lambda(\hat{x}) \subset X_1 + X_2 = X_0$ и, значит, X_0 замкнуто. Кроме того, из (5) следует, что если вектор $x \in \Lambda(\hat{x})$ имеет представление (2), то

$$y + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k - \alpha'_k) e_k \in X_1.$$

Отсюда в силу $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ получаем, что $\alpha'_k = \alpha_k$ для всех $k = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, для каждого $k \leqslant m$ любая сходящаяся подпоследовательность ограниченной числовой последовательности $\hat{\alpha}_k$ имеет своим пределом одно и то же число α_k.

Поэтому $\hat{\alpha}_k$ сходится и $\lim \hat{\alpha}_k = \alpha_k$. Но тогда из (1) следует, что последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится и

$$\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{y}) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k. \tag{6}$$

При этом если вектор $x \in \Lambda(\hat{x})$ имеет представление (2), то в нем $y \in \Lambda(\hat{y})$. Это вытекает из равенств (6) и $X_1 \cap X_2 = \{0\}$. ▶

Следствие 3.5. *В линейном пространстве* (X, Λ) *для конечномерного векторного подпространства* X_1 *справедливы равенства* $X_1^+ = \overline{X}_1 = X_1 + \Lambda(\dot{0})$, *а, следовательно, в линейном пространстве с операцией однозначного предела конечномерное векторное подпространство замкнуто.* ▶

Следствие 3.6. *Линейное пространство с операцией однозначного предела над числовым пространством* $(\mathbb{K}, \lim)$, *имеющее конечную размерность* $\nu \geqslant 1$, *изоморфно* $(\mathbb{K}, \lim)^\nu$. ▶

Предложение 3.30. *Пусть* (X, λ) *— линейное пространство с операцией однозначного предела. Если линейное подпространство* $(X_1, \lambda_1) \subset (X, \lambda)$ *квазиполно, то оно замкнуто в* (X, λ).

◀ Пусть $x \in X$ — предельная точка для X_1, а $\hat{x}$ — последовательность в X_1, сходящаяся к x. Докажем, что $x \in X_1$. Последовательность $\hat{x}$, будучи сходящейся, фундаментальна и ограничена в (X, λ). Но тогда, очевидно, последовательность $\hat{x}$ фундаментальна и ограничена также в (X_1, λ_1). В силу квазиполноты (X_1, λ_1) последовательность $\hat{x}$ сходится в нем. Однако x является единственным пределом последовательности $\hat{x}$ в (X, λ). Поэтому $x \in X_1$, т. е. X_1 замкнуто в (X, λ). ▶

Предложение 3.31. *Если в линейном пространстве* (X, Λ) *векторное подпространство* $\Lambda(\dot{0})$ *имеет конечномерное алгебраическое дополнение, то пространство* (X, Λ) *полно. В частности, конечномерное линейное пространство полно.*

◀ Фактор-пространство $(\varPhi, \widetilde{\lambda})$ пространства (X, Λ) по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$ является конечномерным линейным пространством с операцией однозначного предела. В силу следствия 3.6 фактор-пространство $(\varPhi, \widetilde{\lambda})$ полно. Поэтому пространство (X, Λ) тоже полно. ▶

Следующее утверждение обобщает предложение 3.31.

Предложение 3.32. *Пусть* X_1 *и* X_2 *— такие векторные подпространства линейного пространства* (X, Λ), *что* $X = X_1 \oplus X_2$, *причем* X_1 *замкнуто, а* X_2 *конечномерно. Если под-*

пространство $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$ *полно (квазиполно), то* (X, Λ) *полно (квазиполно).*

◀ Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$ — базис в X_2. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в (X, Λ) и ее члены x_n представим в виде (1). Из (1) для любой последовательности натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ получаем

$$x_n - x_{i_n} = y_n - y_{i_n} + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{kn} - \alpha_{ki_n}) e_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как последовательность векторов $x_n - x_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю, то в силу теоремы 3.23 последовательность векторов $y_n - y_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, и для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел $\alpha_{kn} - \alpha_{ki_n}$, $n \in \mathbb{N}$, тоже сходятся к нулю. Отсюда следует, что последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна, а для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел α_{kn}, $n \in \mathbb{N}$, сходится. Поэтому если (X_1, Λ_1) полно, то $\hat{y}$, будучи фундаментальной последовательностью, сходится. Но тогда из (1) следует, что $\hat{x}$ тоже сходится и, значит, (X, Λ) полно.

Пусть (X_1, Λ_1) квазиполно, а рассмотренная выше фундаментальная последовательность $\hat{x}$ ограничена. Из (1) для любой сходяшейся к нулю числовой последовательности $\hat{\gamma} = (\gamma_n : n \in \mathbb{N})$ получаем

$$\gamma_n x_n = \gamma_n y_n + \sum_{k=1}^{m} \gamma_n \alpha_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в силу теоремы 3.23 следует, что $\hat{\gamma}\hat{y}$ сходится к нулю, так как $\hat{\gamma}\hat{x}$ сходится к нулю. А это означает, что последовательность $\hat{y}$ ограничена и, будучи фундаментальной, сходится в квазиполном подпространстве (X_1, Λ_1). Поэтому из (1) получаем, что $\hat{x}$ тоже сходится и, значит, (X, Λ) квазиполно. ▶

Известная теорема о конечномерности локально компактного хаусдорфова топологического векторного пространства (см. [54], с. 24—25) для линейных пространств с операцией предела принимает следующую формулировку (здесь в доказательстве возникает дополнительная трудность, связанная с тем, что вполне ограниченное множество может не быть ограниченным).

Теорема 3.24. *Если линейное пространство* (X, Λ) *обладает вполне ограниченной окрестностью нуля, то фактор-пространство* $X/\Lambda(\dot{0})$ *конечномерно, причем если и* $\Lambda(\dot{0})$ *конечномерно, то* X *тоже конечномерно.*

◀ Пусть v — вполне ограниченная окрестность нуля в (X, Λ). Согласно теореме 3.17, для окрестности нуля $\frac{1}{2}v$ существует такое конечное $K \subset X$, что $v \subset K + \frac{1}{2}v$. Обозначим через Y линейную оболочку множества K. Тогда $v \subset Y + \frac{1}{2}v$. Методом индукции докажем, что $v \subset Y + 2^{-n}v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть $v \subset Y + 2^{-k}v$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем $\frac{1}{2}v \subset \frac{1}{2}Y + 2^{-k-1}v$. Поэтому $v \subset Y + \frac{1}{2}Y + 2^{-k-1}v = Y + 2^{-k-1}v$. Следовательно, включение $v \subset Y + 2^{-n}v$ верно для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $H = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (Y + 2^{-n}v)$. Тогда $v \subset H$. Докажем, что $H = X$. Действительно, в противном случае существует $x \in X \backslash H$. Ясно, что $x \notin Y + 2^{-m}v$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $2^{-n}x \notin Y + 2^{-m-n}v$. Значит, $2^{-n}x \notin v$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Однако последовательность векторов $2^{-n}x$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю и, следовательно, почти вся лежит в v. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства $H = X$. Следовательно, $Y + v = X$. Теперь докажем, что $Y + \Lambda(\dot{0}) = X$. С этой целью предположим противное и рассмотрим некоторое $x_0 \in X \backslash (Y + \Lambda(\dot{0}))$. Обозначим через Z линейную оболочку множества $x_0 + Y$ и положим $w = v \cap Z$. Ясно, что $Z = Y + w$, а w является вполне ограниченной окрестностью нуля в конечномерном линейном подпространстве $(Z, \Lambda') \subset (X, \Lambda)$. Имеем, что $x_0 \notin \Lambda'(\dot{0}) = Z \cap \Lambda(\dot{0}) = Y \cap \Lambda(\dot{0})$. Кроме того, как нетрудно убедиться, в конечномерном линейном пространстве вполне ограниченность множества эквивалентна его ограниченности. Поэтому существует такое $r > 0$, что для любого $x \in w$ в представлении $x = \beta x_0 + y$, где $y \in Y$, число β удовлетворяет неравенству $|\beta| < r$. Отсюда вытекает, что и для любого $z \in Y + w$ в представлении $z = \gamma x_0 + y'$, где $y' \in Y$, выполняется неравенство $|\gamma| < r$. Однако это противоречит равенству $Z = Y + w$. Следовательно, $Y + \Lambda(\dot{0}) = X$. ▶

На основании доказательства теоремы 3.24 сформулируем следующее предложение, усиливающее теорему 3.24 и аналогичную теорему для топологического векторного пространства.

Предложение 3.33. *Если линейное пространство (X, Λ) обладает такой окрестностью нуля v, что $v \subset Y + \alpha v$ для некоторых конечномерного векторного подпространства $Y \subset X$ и числа α с $|\alpha| < 1$, а при любом $x \in X$ для вещественно линейной оболочки Z множества $x + Y$ пересечение $v \cap Z$ ограничено, то $X = Y + \Lambda(\dot{0})$ (т. е. $X = Y + \overline{\{0\}}$).* ▶

§ 8. Полная решетка линейных операций предела последовательности

Рассмотрим частично упорядоченное множество $\mathcal{L}^*(X)$ всех линейных операций предела в векторном пространстве X и множество $\mathcal{L}_1^*(X)$ всех линейных операций однозначного предела в X (см. § 7 главы I). Ясно, что $\mathcal{L}_1^*(X) \subset \mathcal{L}^*(X) \subset \mathcal{L}_*(X) \subset \mathcal{L}_0(X) \subset \subset \mathcal{L}(X)$, где $\mathcal{L}(X)$ — множество всех операций предела в X, $\mathcal{L}_0(X)$ — множество топологических операций предела в X, а $\mathcal{L}_*(X)$ — множество равномерных операций предела в X.

Теорема 3.25. *Для частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}^*(X)$ и $\mathcal{L}_1^*(X)$ справедливы следующие утверждения.*

а) Множество $\mathcal{L}^*(X)$ является полной решеткой, наибольший элемент которой совпадает с наибольшим элементом полной решетки $\mathcal{L}(X)$, а наименьший элемент λ^* есть операция однозначного прдела в X, по которой последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда все ее члены x_n являются линейными комбинациями некоторой конечной системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ из X, а в представлениях

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

последовательность чисел

$$r_n = \sum_{k=1}^{m} |\alpha_{kn}|, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

сходится к нулю (векторы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ и их число m могут быть различными для различных $\hat{x}$). Кроме того, точная нижняя граница Λ_1 в $\mathcal{L}(X)$ системы $E = \{\Lambda_i : i \in I\} \subset \mathcal{L}^*(X)$ принадлежит $\mathcal{L}^*(X)$ и определяется равенством

$$\Lambda_1(\hat{x}) = \bigcap_{i \in I} \Lambda_i(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}, \tag{3}$$

причем для ядра $\hat{X}_1$ линейной операции предела Λ_1 имеет место равенство

$$\hat{X}_1 = \bigcap_{i \in I} \hat{X}_i,$$

где $\hat{X}_i$ — ядро линейной операции предела Λ_i. Точная верхняя граница Λ_2 в $\mathcal{L}^*(X)$ системы E есть сильнейшая среди линей-

ных операций предела $\Lambda \in \mathcal{L}^*(X)$, *удовлетворяющих включению*

$$\bigcup_{i\in I} \Lambda_i(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}},$$

и определяется равенством

$$\Lambda_2(\hat{x}) = \bigcap_{\Lambda\in H} \Lambda(\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}},$$

где H *— множество всех верхних границ подмножества* E *в* $\mathcal{L}^*(X)$ ($H \neq \varnothing$, *поскольку в* $\mathcal{L}^*(X)$ *существует наибольший элемент).*

б) В случае конечномерного X *множество* $\mathcal{L}_1^*(X)$ *состоит из одного элемента, совпадающего с наименьшим элементом полной решетки* $\mathcal{L}^*(X)$. *В случае бесконечномерного* X *множество* $\mathcal{L}_1^*(X)$ *не является полной решеткой. Точная нижняя граница в* $\mathcal{L}(X)$ *непустого подмножества* $E \subset \mathcal{L}_1^*(X)$ *принадлежит* $\mathcal{L}_1^*(X)$. *Подмножество* E *верхней границы в* $\mathcal{L}_1^*(X)$ *может не иметь. Однако если* E *совершенно упорядочено, то оно имеет точную верхнюю границу в* $\mathcal{L}_1^*(X)$ *и, значит, в* $\mathcal{L}_1^*(X)$ *существуют максимальные элементы, причем они не являются максимальными в частично упорядоченном множестве* $\mathcal{L}_1(X)$ *всех операций однозначного предела в* X.

◄ (а) Пусть $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, а $\hat{\alpha}$ — сходящаяся числовая последовательность, причем $\alpha = \lim \hat{\alpha}$. Для операции предела Λ_1, определенной равенством (3), имеем

$$\Lambda_1(\hat{x}) + \Lambda_1(\hat{y}) = \bigcap_{i\in I} \Lambda_i(\hat{x}) + \bigcap_{i\in I} \Lambda_i(\hat{y}) \subset$$
$$\subset \bigcap_{i\in I} (\Lambda_i(\hat{x}) + \Lambda_i(\hat{y})) \subset \bigcap_{i\in I} \Lambda_i(\hat{x} + \hat{y}) = \Lambda_1(\hat{x} + \hat{y}),$$
$$\alpha\Lambda_1(\hat{x}) = \bigcap_{i\in I} \alpha\Lambda_i(\hat{x}) \subset \bigcap_{i\in I} \Lambda_i(\hat{\alpha}\hat{x}) = \Lambda_1(\hat{\alpha}\hat{x}).$$

Поэтому $\Lambda_1 \in \mathcal{L}^*(X)$. Утверждение, относящееся к точной верхней границе системы $\{\Lambda_i : i \in I\}$, очевидно. Таким образом, $\mathcal{L}^*(X)$ является полной решеткой.

Докажем утверждение, относящееся к наименьшему элементу λ^* полной решетки $\mathcal{L}^*(X)$. Пусть $\hat{X}_0$ — ядро линейной операции предела λ^*. Очевидно, что если все члены последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ представляются в виде (1) и последовательность чисел (2) сходится к нулю, то $\hat{x}$ тоже сходится к нулю в любом линейном пространстве с носителем X. В частности, $\hat{x}$ сходится к нулю в (X, λ^*) и, значит, $\hat{x} \in \hat{X}_0$. Легко проверить, что множество $\hat{X}'_0$ всех последовательностей $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, члены каждой из которых представляются в виде (1) со сходящейся к нулю последовательностью чисел (2), удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции однозначного предела λ_1 в X. Из $\hat{X}'_0 \subset \hat{X}_0$ следует что $\lambda_1 \leqslant \lambda^*$. Однако $\lambda^* \leqslant \lambda_1$, поскольку λ^* есть наименьший элемент в $\mathcal{L}^*(X)$. Поэтому $\lambda_1 = \lambda^*$ и $\hat{X}'_0 = \hat{X}_0$.

(б) Утверждение, относящееся к случаю конечномерного X, вытекает из следствия 3.6. Рассмотрим случай бесконечномерного X. Докажем, что непустое совершенно упорядоченное подмножество $E \subset \mathcal{L}^*_1(X)$ имеет точную верхнюю границу в $\mathcal{L}^*_1(X)$. В силу теоремы 1.35 E имеет точную верхнюю границу λ' в частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_1(X)$ всех операций однозначного предела в X. Из указанного в доказательстве теоремы 1.35 определения операции предела λ' следует, что для любых сходящихся в (X, λ') последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ и любой сходящейся числовой последовательности $\hat{\alpha}$ сходятся также $\hat{x} + \hat{y}$ и $\hat{\alpha}\hat{x}$, причем $\lambda'(\hat{x}) + \lambda'(\hat{y}) = \lambda'(\hat{x} + \hat{y})$ и $\alpha\lambda'(\hat{x}) = \lambda'(\hat{\alpha}\hat{x})$, где $\alpha = \lim \hat{\alpha}$. Поэтому $\lambda' \in \mathcal{L}^*_1(X)$ и, следовательно, λ' является точной верхней границей множества E в $\mathcal{L}^*_1(X)$. Отсюда в силу леммы Цорна следует, что в $\mathcal{L}^*_1(X)$ существуют максимальные элементы. Заметим, что максимальный элемент λ множества $\mathcal{L}^*_1(X)$ не является максимальным в $\mathcal{L}_1(X)$. Действительно, для произвольного вектора $x \neq 0$ из X последовательность $(nx : n \in \mathbb{N})$ не обладает сходящейся подпоследовательностью в линейном пространстве (X, λ). Поэтому (X, λ) не является секвенциально компактным. Отсюда в силу теоремы 1.36 следует, что λ не является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1(X)$. ►

Теорема 3.26. *Линейная операция однозначного предела λ в векторном пространстве X является максимальным элементом частично упорядоченного множества $\mathcal{L}^*_1(X)$ тогда и только тогда, когда в пространстве (X, λ) каждая последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к ненулевому вектору.*

◄ Пусть λ — максимальный элемент в $\mathcal{L}^*_1(X)$, а $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Согласно предложению 3.3, либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к ненулевому вектору, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции однозначного предела λ', что $\lambda \leqslant \lambda'$. Во втором случае $\lambda' = \lambda$ и, значит, $\hat{x}$ сходится к нулю.

Пусть, обратно, элемент $\lambda \in \mathcal{L}_1^*(X)$ такой, что в (X, λ) каждая последовательность обладает указанным в теореме свойством. Рассмотрим некоторый элемент $\lambda_1 \in \mathcal{L}_1^*(X)$, удовлетворяющий условию $\lambda \leqslant \lambda_1$, а также последовательность $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, сходящуюся к нулю в (X, λ_1). Предположим $\hat{x}$ не сходится к нулю в (X, λ). Тогда, по условию, $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{y} = \hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к некоторому вектору $y \neq 0$. В силу $\lambda \leqslant \lambda_1$ последовательность $\hat{y}$ сходится к y также в (X, λ_1). Однако $\hat{y}$ сходится к нулю в (X, λ_1) и, значит, $y = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\hat{x}$ сходится к нулю в (X, λ). Отсюда вытекает, что $\lambda_1 = \lambda$. Следовательно, λ является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1^*(X)$. ►

Замечание 3.5. Легко проверить, что в случае конечномерного векторного пространства X наименьший элемент $\lambda^* \in \mathcal{L}_1^*(X)$ обладает указанным в теореме 3.26 свойством и, следовательно, является максимальным элементом в $\mathcal{L}_1^*(X)$. Поэтому $\mathcal{L}_1^*(X)$ состоит из единственного элемента λ^*. Отсюда вновь следует, что в конечномерном векторном пространстве существует лишь одна линейная операция однозначного предела, причем она является также единственной вещественно линейной операцией однозначного предела. В конечномерном векторном пространстве существует только одна хаусдорфова векторная топология, хотя в $\mathbb{R}$ существует бесконечное множество хаусдорфовых топологий, определяющих операцию предела lim.

Теорема 3.27. *Если λ — максимальный элемент в $\mathcal{L}_1^*(X)$, то линейное пространство (X, λ) квазиполно.*

◄ Пусть $\hat{x}$ — фундаментальная и ограниченная последовательность в (X, λ). В силу теоремы 3.26 либо $\hat{x}$ сходится к нулю, либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{m} \hat{\alpha}_k\hat{x}_k \tag{4}$$

сходится к некоторому $y \neq 0$. Предположим, что имеет место второй случай, причем $\lim \hat{\alpha}_k = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$. С учетом (4) имеем

$$\alpha\hat{x}_1 = \hat{y} + \Big(\dot{\alpha} - \sum_{k=1}^{m} \hat{\alpha}_k\Big)\hat{x}_1 + \sum_{k=2}^{m} \hat{\alpha}_k(\hat{x}_1 - \hat{x}_k). \qquad (5)$$

В силу фундаментальности $\hat{x}$ последовательность

$$\sum_{k=2}^{m} \hat{\alpha}_k(\hat{x}_1 - \hat{x}_k)$$

сходится к нулю, а в силу ограниченности $\hat{x}$ последовательность

$$\Big(\dot{\alpha} - \sum_{k=1}^{m} \hat{\alpha}_k\Big)\hat{x}_1$$

тоже сходится к нулю. Поэтому из (5) получаем, что $\alpha\hat{x}_1$ сходится к $y \neq 0$. Отсюда следует, что $\alpha \neq 0$ и $\hat{x}_1$ сходится к $\alpha^{-1}y$. Но тогда $\hat{x}$ тоже сходится к $\alpha^{-1}y$. Таким образом, в обоих случаях последовательность $\hat{x}$ сходится. Следовательно, пространство $(X,\ \lambda)$ квазиполно. ▶

Теорема 3.28. *Если λ^* — наименьший элемент в $\mathcal{L}^*(X)$, то*

а) в линейном пространстве $(X,\ \lambda^*)$ предкомпактное множество ограничено, а линейная оболочка ограниченного множества конечномерна;

б) пространство $(X,\ \lambda^*)$ полно и в нем вещественное векторное подпространство замкнуто, а ограниченное множество относительно компактно;

в) в $(X,\ \lambda^*)$ поглощающее выпуклое множество является окрестностью нуля и система всех таких окрестностей нуля определяет операцию предела λ^*;

г) в $(X,\ \lambda^*)$ для всякого поглощающего и радиально уравновешенного множества v множество $v + v^+$ является окрестностью нуля;

д) $(X,\ \lambda^*)$ в случае бесконечномерного X не является пространством Фреше–Урысона, а X является в нем множеством первой категории и секвенциально первой категории, причем в случае, когда X имеет счетный базис Гамеля, пространство $(X,\ \lambda^*)$ локально выпукло.

◀ (а) Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — фундаментальная последовательность в $(X,\ \lambda^*)$. Тогда последовательность $(x_{n+1} - x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Отсюда вытекает, что линейная оболочка множества $\{x_{n+1} - x_n : n \in \mathbb{N}\}$ конечномерна. Но тогда линейная оболочка множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ тоже конечномерна. Поэтому последовательность $\hat{x}$ ограничена. Следовательно, предкомпактное множество ограничено.

Пусть M — ограниченное множество в (X, λ^*). Тогда для любой последовательности векторов $y_n \in M$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $n^{-1}y_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю и, следовательно, линейная оболочка множества $\{n^{-1}y_n : n \in \mathbb{N}\}$, конечномерна. Отсюда следует, что линейная оболочка множества M тоже конечномерна.

Утверждение б) легко вытекает из а).

(в) Пусть $u \subset X$ — поглощающее выпуклое подмножество. Рассмотрим в (X, λ^*) сходящуюся к нулю последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$. При помощи некоторой конечной системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$ каждый вектор x_n представляется в виде (1), где последовательность чисел (2) сходится к нулю. В равенстве (1) обозначим $\beta_{kn} = |\alpha_{kn}| r_n^{-1}$, $t_{kn} = \alpha_{kn}|\alpha_{kn}|^{-1}$ при $\alpha_{kn} \neq 0$ и $\beta_{kn} = 0$, $t_{kn} = 1$ при $\alpha_{kn} = 0$. Тогда получим

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kn} t_{kn} r_n e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

причем $|t_{kn}| = 1$, $\beta_{kn} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_{kn} = 1$ при $x_n \neq 0$. Так как множество u поглощающе и выпукло, то существует число $\varepsilon > 0$, для которого $\alpha e_k \in u$ при всех $|\alpha| \leqslant \varepsilon$ и $k = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $t_{kn} r_n e_k \in u$ для всех $n \geqslant n_0$ и $k = 1, 2, \ldots, m$. Отсюда в силу равенства (6) и выпуклости u вытекает, что $x_n \in u$ для всех $n \geqslant n_0$. Следовательно, u является окрестностью нуля.

Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность в X, почти вся лежащая в каждом поглощающем выпуклом подмножестве пространства X. Докажем, что $\hat{x}$ сходится к нулю в (X, λ^*). Сначала покажем, что линейная оболочка множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ конечномерна. Действительно, в противном случае $\hat{x}$ обладает линейно независимой подпоследовательностью $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$. Выберем в X базис Гамеля H так, чтобы $x_{i_n} \in H$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через G выпуклую оболочку множества $\{\alpha h : h \in H,\ |\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\}$. Очевидно, G поглощающе. Однако $x_{i_n} \notin G$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это противоречит условию, что последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в G. Тем самым конечномерность линейной оболочки Y множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ доказана. Пусть Y имеет размерность $m \geqslant 1$. Рассмотрим в Y некоторый базис $(e_1, e_2, \ldots, e_m)$. Выберем в X базис Гамеля E так, чтобы $e_k \in E$ для $k = 1, 2, \ldots, m$. Выпуклую оболочку множества $\{\alpha e : e \in E,\ |\alpha| \leqslant 1\}$ обозначим через M. Множество M поглощающе. Каждый вектор x_n представим в виде (1) и докажем, что последовательность чисел (2) сходится к нулю. Предположим противное. Тогда существуют такие число $r>0$ и строго возрастающая последовательность натуральных чисел i_n, $n\in\mathbb{N}$, что $r_{i_n}\geqslant 2r$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $x_{i_n}\notin rM$, $n\in\mathbb{N}$. Это противоречит условию, что последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в поглощающем выпуклом множестве rM. Следовательно, в представлениях (1) последовательность чисел (2) сходится к нулю. А это означает, что последовательность $\hat{x}$ сходится к нулю в $(X,\,\lambda^*)$. Поэтому система всех поглощающих выпуклых подмножеств векторного пространства X как система окрестностей нуля определяет операцию предела λ^*.

(г) Пусть подмножество $v\subset X$ поглощающе и радиально уравновешено. Рассмотрим в $(X,\,\lambda^*)$ сходящуюся к нулю последовательность $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$. Линейная оболочка Y множества $\{x_n:n\in\mathbb{N}\}$ конечномерна. Положим $w=Y\cap v\cap(-v)$. Очевидно, $\overline{w}=w^+\subset Y\cap v^+$. Кроме того, w поглощающе и вещественно уравновешено в векторном подпространстве $Y\subset X$. Поэтому $Y=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} nw$. Однако Y является множеством второй категории в конечномерном линейном подпространстве $(Y,\,\lambda)\subset(X,\,\lambda^*)$. Отсюда вытекает, что $(\overline{w})^\circ\neq\varnothing$, где внутренность взята в $(Y,\,\lambda)$. Так как $w\cap(\overline{w})^\circ\neq\varnothing$ и $w=-w$, то множество $w+w^+=w+\overline{w}$ является окрестностью нуля в $(Y,\,\lambda)$. Следовательно, последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в множестве $w+w^+\subset v+v^+$. Значит, $v+v^+$ является окрестностью нуля в пространстве $(X,\,\lambda^*)$.

(д) Пусть векторное пространство X бесконечномерно, а $(x_n:n\in\mathbb{N})$ — линейно независимая последовательность векторов в X. Рассмотрим множество $M=\{n^{-1}x_1+k^{-1}x_n:n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}\}$. Очевидно, что для каждого $n\in\mathbb{N}$ последовательность $(n^{-1}x_1+k^{-1}x_n:k\in\mathbb{N})$ сходится к $n^{-1}x_1$ в пространстве $(X,\,\lambda^*)$, а $(n^{-1}x_1:n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю. Однако никакая последовательность векторов из M не сходится к нулю в $(X,\,\lambda^*)$. Следовательно, $(X,\,\lambda^*)$ не является пространством Фреше—Урысона.

Выберем в X базис Гамеля H так, чтобы $x_n\in H$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Для каждого $i\in\mathbb{N}$ обозначим через X_i линейную оболочку множества $H\setminus\{x_n:n>i\}$. Очевидно, $X=\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$, причем векторное подпространство $X_i\subset X$ замкнуто в пространстве $(X,\,\lambda^*)$ и $X_i^-=X_i^\circ=\varnothing$. Поэтому X является множеством первой категории и секвенциально первой категории в $(X,\,\lambda^*)$.

Предположим теперь, что X имеет счетный базис Гамеля $(e_1, e_2, \ldots)$. Рассмотрим некоторую открытую окрестность нуля w в (X, λ^*). Докажем существование такой последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, что для каждого $i \in \mathbb{N}$ выпуклая оболочка M_i множества $\{re_n : |r| \leqslant r_n, 1 \leqslant n \leqslant i\}$ содержится в w. Применим метод индукции. Существование числа $r_1 > 0$, для которого выпуклое множество $M_1 = \{re_1 : |r| \leqslant r_1\}$ содержится в w, очевидно. Пусть для некоторого $\nu \in \mathbb{N}$ положительные числа $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ выбраны так, что $M_\nu \subset w$. Докажем существование числа $r_{\nu+1} > 0$, для которого $M_{\nu+1} \subset w$. Предположим противное. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдутся такие число α_m и вектор $x_m \in M_\nu$, что $|\alpha_m| < m^{-1}$ и $\alpha_m e_{\nu+1} + x_m \notin w$. Так как множество M_ν секвенциально компактно, то существует такая строго возрастающая последовательность натуральных чисел k_m, $m \in \mathbb{N}$, что последовательность $(x_{k_m} : m \in \mathbb{N})$ сходится к некоторому $x \in M_\nu$. Последовательность векторов $\alpha_{km} e_{\nu+1} + x_{k_m}$, $m \in \mathbb{N}$, тоже сходится к x. Однако множество w открыто и $x \in w$. Поэтому найдется такое $m_0 \in \mathbb{N}$, что $\alpha_{km} e_{\nu+1} + x_{k_m} \in w$ для всех $m \geqslant m_0$. Полученное противоречие доказывает существование требуемого числа $r_{\nu+1}$, а значит, и последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим через v выпуклую оболочку множества $\{re_n : |r| < r_n, n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, v поглощающе и $v \subset w$. Но тогда v является окрестностью нуля. В силу теоремы 3.14 $v = v^\circ$ и, значит, v открыто, а (X, λ^*) локально выпукло. ►

Теорема 3.29. *Пусть X_0 — векторное подпространство векторного пространства X, $\Phi = X/X_0$ — фактор-пространство, а $Ł_0$ — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что $\Lambda(\dot{0}) = X_0$. Тогда $Ł_0$ содержит наименьший элемент, а всякое непустое подмножество в $Ł_0$ имеет точную нижнюю границу. Кроме того, в $Ł_0$ совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу, и, следовательно, $Ł_0$ содержит максимальный элемент. При этом*

а) элемент $\Lambda_0 \in Ł_0$ является наименьшим тогда и только тогда, когда в фактор-пространстве (Φ, λ_0) пространства (X, Λ_0) по векторному подпространству $\Lambda_0(\dot{0}) = X_0$ операция предела λ_0 является наименьшим элементом в $\mathcal{L}^*(\Phi)$;

б) если $\Lambda_0 \in Ł_0$ — наименьший элемент, то в пространстве (X, Λ_0) последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю тогда и только тогда, когда для некоторой конечной системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_m$, линейная оболочка которой не содержит ненулевого вектора из X_0, векторы x_n представляются *в виде* $x_n = y_n + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k$ *с некоторыми* $y_n \in X_0$ *и числами* α_{kn}, *для которых* $\lim\limits_{n} \sum\limits_{k=1}^{m} |\alpha_{kn}| = 0$;

в) элемент $\Lambda \in Ł_0$ *является максимальным тогда и только тогда, когда в фактор-пространстве* (Φ, λ) *пространства* (X, Λ) *по векторному подпространству* $\Lambda(\dot{0}) = X_0$ *операция предела* λ *является максимальным элементом в* $\mathcal{L}_1^*(\Phi)$;

г) элемент $\Lambda \in Ł_0$ *является максимальным тогда и только тогда, когда в пространстве* (X, Λ) *каждая последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей* $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, *что для некоторых сходящихся числовых последовательностей* $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ *последовательность* $\hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ *сходится к вектору из* $X \backslash \Lambda(\dot{0})$;

д) для максимального элемента $\Lambda \in Ł_0$ *линейное пространство* (X, Λ) *квазиполно.* ►

Предложение 3.34. *Всякая ограниченная последовательность* $\hat{x}$ *векторов линейного пространства* (X, Λ) *либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору из* $X \backslash \Lambda(\dot{0})$, *либо* $\hat{x}$ *принадлежит ядру такой линейной операции предела* Λ' *в* X, *что* $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$, $\Lambda \leqslant \Lambda'$ *и любое* Λ'*-ограниченное подмножество в* X Λ*-ограничено.*

◄ В силу предложения 3.3 либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_m$, что для некоторых сходящихся числовых последовательностей $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \ldots, \hat{\alpha}_m$ последовательность $\hat{y} = \hat{\alpha}_1\hat{x}_1 + \hat{\alpha}_2\hat{x}_2 + \ldots + \hat{\alpha}_m\hat{x}_m$ сходится к некоторому $y \notin \Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ' в X, что $\Lambda'(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$ и $\Lambda \leqslant \Lambda'$. В первом случае обозначим $\lim \hat{\alpha}_k = \alpha_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$. В силу ограниченности $\hat{x}$ последовательности $(\hat{\alpha}_k - \dot{\alpha}_k)\hat{x}_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$, сходятся к нулю в (X, Λ). Поэтому из равенства

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \hat{x}_k + \sum_{k=1}^{m} (\hat{\alpha}_k - \dot{\alpha}_k)\hat{x}_k$$

получаем, что последовательность $\alpha_1\hat{x}_1 + \alpha_2\hat{x}_2 + \ldots + \alpha_m\hat{x}_m$ сходится к y. Во втором случае обозначим через $\hat{X}_0$ и $\hat{X}_0'$ ядра линейных операций предела Λ и Λ' соответственно. Пусть $\hat{Y}$ — линейная оболочка множества всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$ и их подпоследовательностей, когда $\hat{\alpha}$ пробегает все сходящиеся числовые последовательности. Как показано в доказательстве предложения 3.3, в качестве $\hat{X}_0'$ можно взять множество всех таких $\hat{\xi} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{\xi}' \prec \hat{\xi}$ найдется $\hat{\xi}'' \prec \hat{\xi}'$ из $\hat{Y} + \hat{X}_0$. Но тогда в силу Λ-ограниченности $\hat{x}$ каждая последовательность из $\hat{X}_0'$ тоже Λ-ограничена. Отсюда легко вытекает, что Λ'-ограниченное подмножество в X Λ-ограничено. ▶

Теорема 3.30. *Пусть (X, Λ') — линейное пространство, E — система всех Λ'-ограниченных подмножеств в X, а Ł — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что система всех Λ-ограниченных подмножеств совпадает с E. Тогда $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda'(\dot{0})$ для любого $\Lambda \in$ Ł, причем Ł содержит наименьший элемент, а всякое непустое подмножество в Ł имеет точную нижнюю границу. Кроме того, в Ł совершенно упорядоченное подмножество имеет точную верхнюю границу, и, следовательно, Ł содержит максимальный элемент. При этом*

а) элемент $\Lambda_0 \in$ Ł является наименьшим тогда и только тогда, когда в пространстве (X, Λ_0) для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{x}$ сходится к нулю;

б) элемент $\Lambda \in$ Ł является максимальным тогда и только тогда, когда в пространстве (X, Λ) каждая ограниченная последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору из $X \backslash \Lambda(\dot{0})$;

в) для максимального элемента $\Lambda \in$ Ł линейное пространство (X, Λ) квазиполно.

◀ Пусть $\Lambda \in$ Ł. Если $x \in \Lambda(\dot{0})$, то последовательность $\hat{x} = (nx : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в пространстве (X, Λ) и, значит, ограничена. Поэтому она ограничена также в пространстве (X, Λ'). Отсюда вытекает, что стационарная последовательность $\dot{x}$ сходится к нулю в (X, Λ'). Следовательно, $x \in \Lambda'(\dot{0})$. Аналогично доказывается, что если $y \in \Lambda'(\dot{0})$, то $y \in \Lambda(\dot{0})$. Тем самым равенство $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda'(\dot{0})$ доказано.

Линейную операцию предела Λ_0 в X определим равенством $\Lambda_0(\hat{x}) = \bigcap\{\Lambda(\hat{x}) : \Lambda \in \text{Ł}\}$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Пусть $\hat{x}$ — ограниченная последовательность в (X, Λ'), а $\hat{\alpha}$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность. Тогда $0 \in \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ для каждого $\Lambda \in$ Ł. Поэтому $0 \in \Lambda_0(\hat{\alpha}\hat{x})$. Отсюда вытекает, что в пространстве (X, Λ_0)

множество M ограничено тогда и только тогда, когда $M \in E$. Следовательно, $\Lambda_0 \in Ł$. Очевидно, Λ_0 является наименьшим элементом в Ł. Аналогично доказывается, что в Ł непустое подмножество имеет точную нижнюю границу.

Для каждого $\Lambda \in Ł$ обозначим через $\hat{X}_0(\Lambda)$ ядро линейной операции предела Λ. Пусть $Ł' \subset Ł$ — непустое совершенно упорядоченное подмножество. Положим $\hat{Y} = \bigcup\{\hat{X}_0(\Lambda) : \Lambda \in Ł'\}$. В силу совершенной упорядоченности $Ł'$ множество $\hat{Y}$ является векторным подпространством в $X^{\mathbb{N}}$ и удовлетворяет всем условиям теоремы 3.5, кроме, быть может, условия 5). Обозначим через $\hat{Y}_0$ множество таких $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ найдется $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{Y}$. Легко проверить, что множество $\hat{Y}_0$ удовлетворяет условиям 1)—6) теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции предела Λ_1 в X. Докажем, что $\Lambda_1 \in Ł$. Пусть $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — ограниченная последовательность в пространстве (X, Λ_1), а $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность. Стремящуюся к бесконечности последовательность $\hat{r} = (r_n : n \in \mathbb{N})$ положительных чисел выберем так, чтобы последовательность $\hat{r}\hat{\alpha}$ сходилась к нулю. Тогда $\hat{r}\hat{\alpha}\hat{x}$ сходится к нулю, т. е. $\hat{r}\hat{\alpha}\hat{x} \in \hat{Y}_0$. Однако каждая подпоследовательность последовательности $\hat{r}\hat{\alpha}\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y} = (r_{k_n}\alpha_{k_n}x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ из $\hat{Y}$. Имеем, что $\hat{y} \in \hat{X}_0(\Lambda)$ для некоторого $\Lambda \in Ł'$ и, значит, $[\hat{y}] \in E$. Так как числовая последовательность $\hat{\gamma} = \left(r_{k_n}^{-1} : n \in \mathbb{N}\right)$ сходится к нулю, то последовательность $\hat{\gamma}\hat{y} = (\alpha_{k_n}x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в пространстве (X, Λ'). Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{\alpha}\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к нулю в (X, Λ'). Но тогда $\hat{\alpha}\hat{x}$ тоже сходится к нулю в (X, Λ'). Отсюда получаем, что $[\hat{x}] \in E$. Следовательно, $\Lambda_1 \in Ł$. Значит, совершенно упорядоченное подмножество $Ł'$ имеет точную верхнюю границу в Ł. В силу леммы Цорна в Ł существует максимальный элемент.

(a) Пусть $\hat{X}_0' \subset X^{\mathbb{N}}$ — подмножество всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$, когда $\hat{x}$ пробегает все ограниченные последовательности в (X, Λ'), а $\hat{\alpha}$ пробегает все сходящиеся к нулю числовые последовательности. Множество $\hat{X}_0'$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.5, кроме, быть может, условия 5). Обозначим через $\hat{X}_0$ множество всех таких $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, что для каждого $\hat{y}' \prec \hat{y}$ найдется $\hat{y}'' \prec \hat{y}'$ из $\hat{X}_0'$. Множество $\hat{X}_0$ удовлетворяет условиям 1)—6) теоремы 3.5 и, значит, является ядром некоторой линейной операции предела Λ_0 в X. Очевидно, $\Lambda_0 \leqslant \Lambda$ для любого $\Lambda \in Ł$. Кроме того, $\Lambda_0 \in Ł$. Поэтому Λ_0 является наименьшим элементом в Ł. Из построения Λ_0 следует, что в $(X,\, \Lambda_0)$ каждая сходящаяся к нулю последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $\hat{x}' = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, представимой в виде $\hat{x}' = \hat{\alpha}\hat{y}$, где $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся к нулю последовательность чисел, а $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ — ограниченная последовательность векторов. Числовую последовательность $\hat{r} = (r_n : n \in \mathbb{N})$ определим следующим образом: $r_{k_n} = |\alpha_n|^{-\frac{1}{2}}$ при $\alpha_n \neq 0$, $r_{k_n} = n$ при $\alpha_n = 0$, а $r_i = 1$ для всех $i \in \mathbb{N} \backslash \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$. Последовательность $\hat{r}' = (r_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ не ограничена, а $(r_{k_n}\alpha_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Поэтому в силу ограниченности $\hat{y}$ последовательность $\hat{r}'\hat{x}'$ сходится к нулю. Но тогда $\hat{r}\hat{x}$ тоже сходится к нулю.

Пусть, обратно, элемент $\Lambda_0 \in Ł$ такой, что в пространстве $(X,\, \Lambda_0)$ каждая сходящаяся к нулю последовательность обладает указанным в утверждении а) свойством. Рассмотрим некоторые $\Lambda \in Ł$ и сходящуюся к нулю последовательность $\hat{x}$ в $(X,\, \Lambda_0)$. Очевидно, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y}$, для которой существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность $\hat{r} = (r_n : n \in \mathbb{N})$ положительных чисел, что последовательность $\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю в $(X,\, \Lambda_0)$. Так как $[\hat{r}\hat{y}] \in E$, а числовая последовательность $\hat{\gamma} = (r_n^{-1} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, то последовательность $\hat{y} = \hat{\gamma}\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю в $(X,\, \Lambda)$. Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к нулю в $(X,\, \Lambda)$. Но тогда $\hat{x}$ тоже сходится к нулю в $(X,\, \Lambda)$. Отсюда следует, что $\Lambda_0 \leqslant \Lambda$. Значит, Λ_0 является наименьшим элементом в Ł.

(б) Пусть $\Lambda \in Ł$ — максимальный элемент, а $\hat{x}$ — ограниченная последовательность в $(X,\, \Lambda)$. Согласно предложению 3.34, либо $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору из $X \backslash \Lambda(\dot{0})$, либо $\hat{x}$ принадлежит ядру такой линейной операции предела Λ_1 в X, что $\Lambda_1 \in Ł$ и $\Lambda \leqslant \Lambda_1$. Во втором случае $\Lambda = \Lambda_1$, так как Λ — максимальный элемент в Ł. Поэтому в данном случае $\hat{x}$ сходится к нулю.

Пусть, обратно, элемент $\Lambda \in Ł$ такой, что в $(X,\, \Lambda)$ каждая ограниченная последовательность обладает указанным в утверждении б) свойством. Рассмотрим некоторый элемент $\Lambda_2 \in Ł$, удовлетворяющий условию $\Lambda \leqslant \Lambda_2$, и последовательность $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, сходящуюся к нулю в (X, Λ_2). Очевидно, последовательность $\hat{x}$ Λ-ограничена. Предположим $\hat{x}$ не сходится к нулю в (X, Λ). Тогда $\hat{x}$ обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация $\hat{y}$ сходится к вектору $y \notin \Lambda(\dot{0}) = \Lambda_2(\dot{0})$. В силу $\Lambda \leqslant \Lambda_2$ последовательность $\hat{y}$ сходится к y в (X, Λ_2) и, значит, $y \in \Lambda_2(\dot{0})$. Полученное противоречие доказывает, что $\hat{x}$ сходится к нулю в (X, Λ). Отсюда вытекает, что $\Lambda_2 = \Lambda$, т. е. Λ является максимальным элементом в Ł.

(в) С учетом б) для максимального элемента $\Lambda \in$ Ł, как и в теореме 3.27, легко доказывается, что в (X, Λ) фундаментальная и ограниченная последовательность сходится. ►

Замечание 3.6. Пусть X_0 — векторное подпространство векторного пространства X, а Ł$_0$ — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что $\Lambda(\dot{0}) = X_0$. Тогда из теоремы 3.29 следует, что если $\Lambda' \in$ Ł$_0$ — наименьший или максимальный элемент, то в пространстве (X, Λ') каждая ограниченная последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору из $X \backslash X_0$.

Следствие 3.7. *Пусть (X, Λ') — линейное пространство, E — система всех ограниченных подмножеств в (X, Λ'), а Ł — частично упорядоченное множество всех таких линейных операций предела Λ в X, что система всех ограниченных подмножеств пространства (X, Λ) совпадает с E. Тогда*

а) если для некоторого $\Lambda \in$ Ł пространство (X, Λ) полуметризуемо, то Λ является наименьшим элементом в Ł;

б) если $\Lambda \in$ Ł такое, что в пространстве (X, Λ) каждое ограниченное множество секвенциально квазикомпактно, то Λ является максимальным элементом в Ł;

в) если в фактор-пространстве (Φ, λ') пространства (X, Λ') по векторному подпространству $\Lambda'(\dot{0})$ операция предела λ' является сильнейшей линейной операцией предела, то множество Ł состоит из единственного элемента Λ'. ►

В связи с утверждением в) следствия 3.7 см. примеры в § 16, n° 1, n° 17 и n° 18.

Теорема 3.31. *Пусть X — комплексное векторное пространство, а $\mathcal{L}_0^*(X)$ — множество всех вещественно линейных операций предела в X. Тогда*

а) для $\Lambda_0 \in \mathcal{L}_0^*(X)$ отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, определенное формулой $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda_0(\hat{x}) \cap (-\mathrm{i}\Lambda_0(\mathrm{i}\hat{x}))$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, является слабей-

шей линейной операцией предела в X*, удовлетворяющей условию* $\Lambda \leqslant \Lambda_0$*;*

б) точная нижняя граница Λ_1 *и точная верхняя граница* Λ_2 *в* $\mathcal{L}_0^*(X)$ *непустого подмножества* $E \subset \mathcal{L}^*(X)$ *принадлежат* $\mathcal{L}^*(X)$*.*

◀ (а) Легко проверяется, что Λ обладает указанными в теореме 1.3 свойствами и, следовательно, является операцией предела в X. Очевидно, $\Lambda(\mathrm{i}\hat{x}) = \mathrm{i}\Lambda(\hat{x})$ для всех $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Кроме того, из определения Λ и вещественной линейности операции предела Λ_0 следует, что для любых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и сходящейся последовательности $\hat{r}$ вещественных чисел имеет место равенство $\Lambda(\hat{r}\hat{x}) = r\Lambda(\hat{x})$, где $r = \lim \hat{r}$. Для любых $\hat{x}$ и $\hat{y}$ из $X^{\mathbb{N}}$ имеем

$$\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) = \Lambda_0(\hat{x}) \cap (-\mathrm{i}\Lambda_0(\mathrm{i}\hat{x})) + \Lambda_0(\hat{y}) \cap (-\mathrm{i}\Lambda_0(\mathrm{i}\hat{y})) \subset$$
$$\subset (\Lambda_0(\hat{x}) + \Lambda_0(\hat{y})) \cap (-\mathrm{i}\Lambda_0(\mathrm{i}\hat{x}) - \mathrm{i}\Lambda_0(\mathrm{i}\hat{y})) \subset$$
$$\subset \Lambda_0(\hat{x} + \hat{y}) \cap (-\mathrm{i}\Lambda_0(\mathrm{i}\hat{x} + \mathrm{i}\hat{y})) = \Lambda(\hat{x} + \hat{y}).$$

Пусть $\hat{\alpha}$ — последовательность комплексных чисел, причем $\alpha = \lim \hat{\alpha}$. Число α и последовательность $\hat{\alpha}$ представим в виде $\alpha = \beta + \mathrm{i}\gamma$ и $\hat{\alpha} = \hat{\beta} + \mathrm{i}\hat{\gamma}$, где $\beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\hat{\beta} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\hat{\gamma} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тогда

$$\alpha\Lambda(\hat{x}) = (\beta + \mathrm{i}\gamma)\Lambda(\hat{x}) \subset \beta\Lambda(\hat{x}) + \mathrm{i}\gamma\Lambda(\hat{x}) = \beta\Lambda(\hat{x}) + \gamma\Lambda(\mathrm{i}\hat{x}) =$$
$$= \Lambda(\hat{\beta}\hat{x}) + \Lambda(\mathrm{i}\hat{\gamma}\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\beta}\hat{x} + \mathrm{i}\hat{\gamma}\hat{x}) = \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}), \quad \hat{x} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Следовательно, $\Lambda \in \mathcal{L}^*(X)$. Из определения Λ следует, что Λ является слабейшей линейной операцией предела в X, удовлетворяющей условию $\Lambda \leqslant \Lambda_0$.

(б) Принадлежность $\Lambda_1 \in \mathcal{L}^*(X)$ следует из утверждения а) теоремы 3.25. Докажем, что $\Lambda_2 \in \mathcal{L}^*(X)$. С учетом а) обозначим через Λ' линейную операцию предела в X, определенную равенством $\Lambda'(\hat{x}) = \Lambda_2(\hat{x}) \cap (-\mathrm{i}\Lambda_2(\mathrm{i}\hat{x}))$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. По условию, имеет место включение $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda_2(\hat{x})$ для всех $\Lambda \in E$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Однако $\Lambda(\hat{x}) = -\mathrm{i}\Lambda(\mathrm{i}\hat{x}) \subset -\mathrm{i}\Lambda_2(\mathrm{i}\hat{x})$. Поэтому $\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda'(\hat{x})$ для всех $\Lambda \in E$ и $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$. Отсюда вытекает, что Λ' является верхней границей множества E в $\mathcal{L}_0^*(X)$ и, значит, $\Lambda_2 \leqslant \Lambda'$. Так как $\Lambda' \leqslant \Lambda_2$, то $\Lambda_2 = \Lambda'$. Следовательно, $\Lambda_2 \in \mathcal{L}^*(X)$. ▶

Замечание 3.7. Пусть X — векторное пространство, а $\Psi^*(X)$ — множество всех отображений $\psi : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, каждое из которых определяется равенством $\psi(\hat{x}) = \bigcup\limits_{\Lambda \in E} \Lambda(\hat{x})$, $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$, с некоторым непустым $E \subset \mathcal{L}^*(X)$. Отображение ψ может не быть операцией предела в принятом здесь смысле. Оно обладает указанными в теореме 1.3 свойствами 1), 2) и удовлетворяет условию 2) определения 3.1. Отображение $\psi\in\Psi^*(X)$, обладающее всеми указанными в теореме 1.3 свойствами, кроме, быть может, свойства 3), и удовлетворяющее условиям определения 3.1, называется линейной операцией псевдопредела в X и является равномерной операцией псевдопредела в X (см. замечание 2.1). Примером может служить отображение, соответствующее сходимости почти всюду (см. главу I, § 10, n° 1). Частично упорядоченное множество $\Psi^*(X)$ является полной решеткой, причем точной нижней и точной верхней границами всякого непустого подмножества $H\subset\Psi^*(X)$ являются соответственно элементы ψ' и ψ'' из $\Psi^*(X)$, определенные для всех $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ равенствами $\psi'(\hat{x})=\bigcap\limits_{\psi\in H}\psi(\hat{x})$ и $\psi''(\hat{x})=\bigcup\limits_{\psi\in H}\psi(\hat{x})$.

Предложение 3.35. *Пусть $(Y,\widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, f — линейное отображение векторного пространства X в Y, а Λ — слабейшая операция предела в X, при которой f секвенциально непрерывно. Тогда Λ является линейной операцией предела.*

◀ Согласно теореме 1.71, операция предела Λ определяется равенством $\Lambda(\hat{x})=f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}))$, где $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y}=(f(x_n):n\in\mathbb{N})$. Пусть $\hat{\alpha}$ — сходящаяся числовая последовательность, причем $\lim\hat{\alpha}=\alpha$. Тогда в силу линейности f и $\widetilde{\Lambda}$

$$\alpha\Lambda(\hat{x})=\alpha f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}))\subset f^{-1}(\alpha\widetilde{\Lambda}(\hat{y}))\subset f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{\alpha}\hat{y}))=\Lambda(\hat{\alpha}\hat{x}).$$

Пусть $\hat{x}'=(x_n':n\in\mathbb{N})$ и $\hat{x}''=(x_n'':n\in\mathbb{N})$ — последовательности в X, а $\hat{y}'=(f(x_n'):n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}''=(f(x_n''):n\in\mathbb{N})$. Тогда

$$\Lambda(\hat{x}')+\Lambda(\hat{x}'')=f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}'))+f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}''))=f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}'))+\widetilde{\Lambda}(\hat{y}''))\subset$$
$$\subset f^{-1}(\widetilde{\Lambda}(\hat{y}'+\hat{y}''))=\Lambda(\hat{x}'+\hat{x}'').$$

Тем самым линейность операции предела Λ доказана. ▶

С учетом теоремы 3.25 по аналогии с предложением 1.48 легко доказывается, что если (X,Λ) — пространство с операцией предела, а $f:X\to Y$ — отображение X в векторное пространство Y, то существует сильнейшая линейная операция предела $\widetilde{\Lambda}$ в Y, при которой f секвенциально непрерывно. Если же (X,Λ) — линейное пространство, то существует сильнейшая линейная операция предела $\widetilde{\Lambda}'$ в Y, при которой f секвенциально равномерно непрерывно.

Предложение 3.36. *Пусть (X, Λ) — комплексное линейное пространство, а f — линейное отображение X в комплексное векторное пространство Y. Тогда сильнейшая вещественно линейная операция предела $\widetilde{\Lambda}$ в Y, при которой f секвенциально непрерывно, является линейной операцией предела.*

◀ С учетом утверждения а) теоремы 3.31 обозначим через $\widetilde{\Lambda}'$ линейную операцию предела в Y, определенную равенством $\widetilde{\Lambda}'(\hat{y}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \cap (-\mathrm{i}\widetilde{\Lambda}(\mathrm{i}\hat{y}))$, $\hat{y} \in Y^{\mathbb{N}}$. Докажем, что отображение f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно. Пусть $x \in \Lambda(\hat{x})$ для некоторой последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X. Очевидно, $\mathrm{i}x \in \Lambda(\mathrm{i}\hat{x})$. Обозначим $y = f(x)$ и $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Имеем, что $\mathrm{i}y = f(\mathrm{i}x)$ и $\mathrm{i}y_n = f(\mathrm{i}x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в Y. По условию, $y \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ и $\mathrm{i}y \in \widetilde{\Lambda}(\mathrm{i}\hat{y})$. Поэтому $y \in \widetilde{\Lambda}'(\hat{y})$ и, значит, отображение f $(\Lambda, \widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно. Отсюда вытекает, что $\widetilde{\Lambda} \leqslant \widetilde{\Lambda}'$. Так как $\widetilde{\Lambda}' \leqslant \widetilde{\Lambda}$, то $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{\Lambda}'$. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}$ является линейной операцией предела. ▶

Предложение 3.37. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0 и секвенциальную топологию τ; f — линейное отображение X на векторное пространство Y; $X_0 = f^{-1}(0)$; $\widetilde{\Lambda}_1$ — сильнейшая операция предела в Y, при которой f секвенциально непрерывно; $\widetilde{\Lambda}_1'$ — сильнейшая топологическая операция предела в Y, при которой f секвенциально непрерывно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) В $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$ полная система окрестностей произвольного вектора y есть система $\widetilde{U}_y = \{y + f(u) : u \in U_0\}$. В частности, полная система окрестностей нуля есть система $\widetilde{U}_0 = \{f(u) : u \in U_0\}$ и, значит, $\widetilde{U}_y = \{y + \widetilde{u} : \widetilde{u} \in \widetilde{U}_0\}$.

б) Секвенциальная топология пространства $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$, а значит, и пространства $(Y, \widetilde{\Lambda}_1')$ есть система $\widetilde{\tau} = \{f(v) : v \in \tau\}$, причем топология $\widetilde{\tau}$ инвариантна относительно сдвигов, т. е. $\widetilde{\tau} = \{y + \widetilde{v} : \widetilde{v} \in \widetilde{\tau}\}$ для любого $y \in Y$. Следовательно, f является открытым отображением.

в) Имеют место равенства $\widetilde{\Lambda}_1(\dot{0}) = f(X_0^+)$ и $\widetilde{\Lambda}_1'(\dot{0}) = f(\overline{X}_0)$, где X_0^+ и $\overline{X}_0$ — квазизамыкание и замыкание в (X, Λ) ядра $X_0 = f^{-1}(0)$. Следовательно, в случае $X_0^+ \neq \overline{X}_0$ пространство $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$ не является топологическим.

◀ (а) В силу утверждения а) теоремы 1.72 $\widetilde{U}_y$ есть система всех множеств $f(G)$, где G — произвольная окрестность множества $f^{-1}(y)$ в (X, Λ). Очевидно, для любого $x \in f^{-1}(y)$ имеют место $f^{-1}(y) = x + X_0$ и $f(x) = y$. Если G — окрестность множества $x + X_0$, то множество $u = G - x$ является окрестностью нуля, причем $f(G) = f(x+u) = f(x) + f(u) = y + f(u)$. Обратно, если u — окрестность нуля, то множество $G = x + u + X_0$ является окрестностью множества $x + X_0$, причем $f(G) = f(x + u + X_0) = f(x) + f(u) = y + f(u)$. Поэтому $\widetilde{U}_y = \{y + f(u) : u \in U_0\}$.

(б) В силу утверждения в) теоремы 1.72 имеем $\widetilde{\tau} = \{\widetilde{v} \subset Y : f^{-1}(\widetilde{v}) \in \tau\}$. Однако если $v \in \tau$, то $f^{-1}(f(v)) = v + X_0 \in \tau$ и, значит, $f(v) \in \widetilde{\tau}$. Поэтому $\widetilde{\tau} = \{f(v) : v \in \tau\}$. Инвариантность топологии $\widetilde{\tau}$ относительно сдвигов следует из линейности f и инвариантности топологии τ относительно сдвигов.

(в) В силу утверждения е) теоремы 1.72 $f(X_0^+) \subset \widetilde{\Lambda}_1(\dot{0})$. Пусть $y \in \widetilde{\Lambda}_1(\dot{0})$, $x \in f^{-1}(y)$ и $u \in U_0$. Множество $x + u$ является окрестностью вектора x в (X, Λ), а множество $f(x+u) = f(x) + f(u) = y + f(u)$ является окрестностью вектора y в $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$. Поэтому $0 \in f(x+u)$ и, значит, $(x+u) \cap X_0 \neq \varnothing$. Отсюда следует, что $x \in X_0^+$ и $y = f(x) \in f(X_0^+)$. Но тогда $\widetilde{\Lambda}_1(\dot{0}) \subset f(X_0^+)$ и, значит, $\widetilde{\Lambda}_1(\dot{0}) = f(X_0^+)$.

Пусть теперь $y \in \widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0})$ и $x \in f^{-1}(y)$, а v — открытая окрестность нуля в (X, Λ). Множество $x + v$ является открытой окрестностью вектора x в (X, Λ), а множество $f(x+v) = y + f(v)$ — открытой окрестностью вектора y в каждом из пространств $(Y, \widetilde{\Lambda}_1)$ и $(Y, \widetilde{\Lambda}'_1)$. Поэтому $0 \in y + f(v) = f(x+v)$ и, значит, $(x+v) \cap X_0 \neq \varnothing$. Отсюда вытекает, что $x \in \overline{X}_0$ и $y = f(x) \in f(\overline{X}_0)$. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0}) \subset f(\overline{X}_0)$. Пусть, обратно, $x \in \overline{X}_0$ и $y = f(x)$, а $\widetilde{v}$ — открытая окрестность нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda}'_1)$. Множество $y + \widetilde{v}$ является открытой окрестностью вектора y в $(Y, \widetilde{\Lambda}'_1)$, а множество $f^{-1}(y + \widetilde{v}) = x + f^{-1}(\widetilde{v})$ — открытой окрестностью вектора x в (X, Λ). Поэтому $X_0 \cap (x + f^{-1}(\widetilde{v})) \neq \varnothing$ и, значит, $0 \in y + \widetilde{v}$. Отсюда, поскольку $\widetilde{\Lambda}'_1$ является топологической операцией предела, получаем $y \in \widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0})$, т. е. $f(x) \in \widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0})$. Следовательно, $f(\overline{X}_0) \subset \widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0})$ и, значит, $\widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0}) = f(\overline{X}_0)$. ▶

Теорема 3.32. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0 и секвенци-*

альную топологию τ*;* f *— линейное отображение* X *на векторное пространство* Y*;* $X_0 = f^{-1}(0)$*;* $\widetilde{\Lambda}$ *— сильнейшая линейная операция предела в* Y*, при которой* f *секвенциально непрерывно. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) $\widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = f(\overline{X}_0)$*, а, значит,* $\widetilde{\Lambda}$ *тогда и только тогда является операцией однозначного предела, когда* $X_0 = \overline{X}_0$*. В линейном пространстве* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *последовательность* $\hat{y}$ *сходится к* $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда каждая ее подпоследовательность обладает такой подпоследовательностью* $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$*, что существует последовательность векторов* $\xi_n \in \overline{f^{-1}(\eta_n)}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, сходящаяся в* (X, Λ) *к некоторому* $\xi \in \overline{f^{-1}(y)}$ *(или, что эквивалентно,* $\xi \in f^{-1}(y)$*).*

б) Система $\{f(u) + f(\overline{X}_0) : u \in U_0\}$ *является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства* $(Y, \widetilde{\Lambda})$*.*

в) Секвенциальная топология пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *есть система* $\{f(v) : v \in \tau\}$ *и, значит,* $\widetilde{\Lambda}$ *совпадает с сильнейшей топологической операцией предела в* Y*, при которой* f *секвенциально непрерывно.*

г) В случае $X_0 = \overline{X}_0$ *полная система окрестностей нуля пространства* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *есть система* $\{f(u) : u \in U_0\}$ *и, значит,* $\widetilde{\Lambda}$ *совпадает с сильнейшей операцией предела в* Y*, при которой отображение* f *секвенциально непрерывно.*

◀ (а) Обозначим через $\hat{Y}_0$ множество всех последовательностей $\hat{y}$ в Y, любая подпоследовательность каждой из которых обладает такой подпоследовательностью $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$, что существует последовательность векторов $\xi_n \in \overline{f^{-1}(\eta_n)}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к нулю в (X, Λ). Заметим, что если $y \in f(\overline{X}_0)$, то $\overline{f^{-1}(y)} = \overline{X}_0$, а если $y \notin f(\overline{X}_0)$, то $\overline{f^{-1}(y)} \cap \overline{X}_0 = \varnothing$. Поэтому $\dot{y} \in \hat{Y}_0$ для $y \in Y$ тогда и только тогда, когда $y \in f(\overline{X}_0)$. Легко проверить, что подмножество $\hat{Y}_0 \subset Y^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции предела $\widetilde{\Lambda}'$ в Y, причем $\widetilde{\Lambda}'(\dot{0}) = f(\overline{X}_0)$. Очевидно, в линейном пространстве $(Y, \widetilde{\Lambda}')$ последовательность $\hat{y}$ сходится к $y \in Y$ тогда и только тогда, когда каждая ее подпоследовательность обладает такой подпоследовательностью $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$, что найдется последовательность векторов $\xi_n \in \overline{f^{-1}(\eta_n)}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся в (X, Λ) к некоторому $\xi \in \overline{f^{-1}(y)}$. Кроме того, отображение f $(\Lambda,\widetilde{\Lambda}')$-секвенциально непрерывно. Значит, $\widetilde{\Lambda}\leqslant\widetilde{\Lambda}'$.

Пусть $\widetilde{\Lambda}'_1$ — сильнейшая топологическая операция предела в Y, при которой отображение f $(\Lambda,\widetilde{\Lambda}'_1)$-секвенциально непрерывно. В силу предложения 3.37 $\widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0})=f(\overline{X}_0)$. Так как $\widetilde{\Lambda}$ является топологической операцией предела, то $\widetilde{\Lambda}'_1\leqslant\widetilde{\Lambda}$ и, следовательно, $\widetilde{\Lambda}'_1(\dot{0})\subset\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, т. е. $f(\overline{X}_0)\subset\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$.

Пусть для последовательности $\hat{\eta}=(\eta_n:n\in\mathbb{N})\in Y^{\mathbb{N}}$ существует последовательность векторов $\xi_n\in\overline{f^{-1}(\eta_n)}$, $n\in\mathbb{N}$, сходящаяся к нулю в (X,Λ). В силу $(\Lambda,\widetilde{\Lambda})$-секвенциальной непрерывности f последовательность векторов $f(\xi_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. Однако $\eta_n\in f(\xi_n)+f(\overline{X}_0)\subset f(\xi_n)+\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому в силу утверждения в) теоремы 3.2 $\hat{\eta}$ сходится к нулю в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. Отсюда и из определения $\hat{Y}_0$ следует, что каждая подпоследовательность произвольной последовательности $\hat{y}\in\hat{Y}_0$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к нулю в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. Но тогда $\hat{y}$ тоже сходится к нулю в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. А это означает, что ядро $\hat{Y}_0$ линейной операции предела $\widetilde{\Lambda}'$ содержится в ядре линейной операции предела $\widetilde{\Lambda}$. Следовательно, $\widetilde{\Lambda}'\leqslant\widetilde{\Lambda}$. Тем самым $\widetilde{\Lambda}'=\widetilde{\Lambda}$ и утверждение а) доказано.

(б) Для любых $y\in Y$, $x\in f^{-1}(y)$ и $M\subset X$ имеют место равенства $f^{-1}(y)=x+X_0$, $\overline{f^{-1}(y)}=x+\overline{X}_0$ и $f^{-1}(f(M)+f(\overline{X}_0))=$ $=f^{-1}(f(M+\overline{X}_0))=M+\overline{X}_0+X_0=M+\overline{X}_0$. Отсюда с учетом равенств $x+X_0+\overline{X}_0=x+\overline{X}_0$ и $M+\overline{X}_0+\overline{X}_0=M+\overline{X}_0$ следует, что принадлежность $y\in f(M)+f(\overline{X}_0)$ равносильна включению $\overline{f^{-1}(y)}\subset M+\overline{X}_0$, которое, в свою очередь, равносильно $M\cap\overline{f^{-1}(y)}\neq\varnothing$.

Пусть u — окрестность нуля в (X,Λ). Докажем, что множество $\widetilde{v}=f(u)+f(\overline{X}_0)$ является окрестностью нуля в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. Рассмотрим произвольную последовательность $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ в $Y\setminus\widetilde{v}$. Имеем, что $u\cap\overline{f^{-1}(y_n)}=\varnothing$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому никакая последовательность векторов из множества $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{f^{-1}(y_n)}$ не сходится к нулю в (X,Λ). Но тогда в силу а) $\hat{y}$ не сходится к нулю в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. Отсюда следует, что $\widetilde{v}$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. При этом, очевидно, $\widetilde{v} = \widetilde{v} + f(\overline{X}_0)$.

Пусть, обратно, $\widetilde{u}$ — окрестность нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Тогда в силу предложения 3.7 и $\widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = f(\overline{X}_0)$ окрестность $\widetilde{u}$ содержит такую окрестность нуля $\widetilde{v}$, что $\widetilde{v} = \widetilde{v} + f(\overline{X}_0)$. В силу теоремы 1.57 из $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциальной непрерывности отображения f следует, что множество $u = f^{-1}(\widetilde{v})$ является окрестностью нуля в (X, Λ). При этом $f(u) = \widetilde{v} = f(u) + f(\overline{X}_0)$. Поэтому система $\{f(u) + f(\overline{X}_0) : u \in U_0\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

(в) Из б) следует, что если подмножество $M \subset X$ является окрестностью вектора x в (X, Λ), то $f(M) + f(\overline{X}_0)$ является окрестностью вектора $y = f(x)$ в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. В силу теоремы 3.12 для любого открытого множества v в (X, Λ) имеет место равенство $v + X_0 = v + \overline{X}_0$. Поэтому $f(v) = f(v + X_0) = f(v + \overline{X}_0) = f(v) + f(\overline{X}_0)$. Поскольку v является своей окрестностью в (X, Λ), из $f(v) = f(v) + f(\overline{X}_0)$ следует, что $f(v)$ является своей окрестностью в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Тем самым, если множество v открыто в (X, Λ), то $f(v)$ открыто в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. В силу теорем 1.61 и 1.63 из $(\Lambda, \widetilde{\Lambda})$-секвенциальной непрерывности f следует, что для любого открытого подмножества $\widetilde{v}$ пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ множество $f^{-1}(\widetilde{v})$ открыто в (X, Λ). Поэтому система $\{f(v) : v \in \tau\}$ является секвенциальной топологией пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

(г) В силу б) при $X_0 = \overline{X}_0$ система $\{f(u) : u \in U_0\}$ является полной системой окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. ▶

Предложение 3.38. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля U_0; f — линейное отображение X на векторное пространство Y; $\widetilde{\Lambda}$ — сильнейшая линейная операция предела в Y, при которой f секвенциально непрерывно. Тогда*

а) если (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона, то $(Y, \widetilde{\Lambda})$ тоже является пространством Фреше–Урысона, причем система $\{f(u) : u \in U_0\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$;

б) если (X, Λ) имеет конечную фундаментальную систему окрестностей нуля, то $(Y, \widetilde{\Lambda})$ тоже имеет конечную фундаментальную систему окрестностей нуля;

в) если (X, Λ) *имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля* $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, *то* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *имеет конечную или счетную фундаментальную систему окрестностей нуля* $\{f(v_n) : n \in \mathbb{N}\}$;

г) если (X, Λ) *имеет ограниченную выпуклую окрестность нуля* w, *то* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *имеет ограниченную выпуклую окрестность нуля* $f(w)$;

д) если операция предела Λ *определяется инвариантной относительно сдвигов полуметрикой* d *(полунормой* p*) на* X, *а* $X_0 = f^{-1}(0)$, *то операция предела* $\widetilde{\Lambda}$ *определяется инвариантной относительно сдвигов полуметрикой* $\widetilde{d}$ *(полунормой* $\widetilde{p}$*) на* Y, *заданной равенством*

$$\widetilde{d}(f(x), f(x')) = \inf\{d(x - x', z) : z \in X_0\}, \quad x \in X, \ x' \in X, \tag{7}$$

(соответственно $\widetilde{p}(f(x)) = \inf\{p(x - z) : z \in X_0\}$, $x \in X$*), причем если пространство* (X, Λ) *полно, то* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *тоже полно;*

е) если пространство (X, Λ) *полуметризуемо, то в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *последовательность* $(y_n : n \in \mathbb{N})$ *сходится к* $y \in Y$ *тогда и только тогда, когда последовательность некоторых векторов* $x_n \in f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится в* (X, Λ) *к некоторому* $x \in f^{-1}(y)$.

◀ (а) Пусть $\widetilde{u}$ — окрестность нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. В силу утверждения б) теоремы 3.32 существует такая окрестность нуля $\widetilde{v} \subset \widetilde{u}$, что $\widetilde{v} = f(u) + f(\overline{X}_0)$, где u — некоторая окрестность нуля в (X, Λ). Так как (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона, то u содержит открытую окрестность нуля v. Однако в силу утверждения в) теоремы 3.32 $f(v)$ является открытой окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, причем $f(v) \subset f(u) \subset \widetilde{v} \subset \widetilde{u}$. Следовательно, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ является пространством Фреше–Урысона. Кроме того, если V_0 — система всех открытых окрестностей нуля пространства (X, Λ), то в силу утверждения в) теоремы 3.32 система $\widetilde{V}_0 = \{f(v) : v \in V_0\}$ является системой всех открытых окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Поскольку $(Y, \widetilde{\Lambda})$ есть пространство Фреше–Урысона, $\widetilde{V}_0$ является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому система $\{f(u) : u \in U_0\}$ является полной системой окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

(б) Если (X, Λ) имеет конечную фундаментальную систему окрестностей нуля, то в силу предложения 3.9 множество X является единственной окрестностью нуля. Поэтому в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ множество Y является единственной окрестностью нуля.

(в) Если (X, Λ) имеет счетную фундаментальную систему окрестностей нуля $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, то в силу предложений 3.11 и 3.12 оно является пространством Фреше–Урысона. Поэтому в силу а) система $\{f(v_n) : n \in \mathbb{N}\}$ является конечной или счетной фундаментальной системой окрестностей нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

(г) Так как (X, Λ) имеет ограниченную выпуклую окрестность нуля w, то оно является пространством Фреше—Урысона. В силу секвенциальной непрерывности и линейности f множество $f(w)$ ограничено и выпукло в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, а в силу а) $f(w)$ является также окрестностью нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

(д) Проверить, что по формуле (7) определяется инвариантная относительно сдвигов полуметрика $\widetilde{d}$ на Y, нетрудно. С учетом б) и в) из равенств

$$f(\{x \in X : d(x, 0) < n^{-1}\}) = \{y \in Y : \widetilde{d}(y, 0) < n^{-1}\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

вытекает, что $\widetilde{d}$ определяет в Y операцию предела $\widetilde{\Lambda}$.

Пусть пространство (X, Λ) полно. Рассмотрим в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. Подпоследовательность $(y_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ выберем так, чтобы $\widetilde{d}(y_{i_n}, y_{i_{n+1}}) < 2^{-n}$. Тогда, действуя по индукции, можно так выбрать последовательность векторов $x_n \in f^{-1}(y_{i_n})$, $n \in \mathbb{N}$, что $d(x_n, x_{n+1}) < 2^{-n}$. Так как последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна, то она сходится к некоторому $x \in X$. Отсюда в силу секвенциальной непрерывности f следует, что последовательность векторов $f(x_n) = y_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $f(x)$. Поэтому $\hat{y}$ тоже сходится к $f(x)$. Следовательно, пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ полно.

Утверждение е) легко доказывается с учетом д). ▶

§ 9. Фактор-пространство линейного пространства по произвольному векторному подпространству

В теореме 3.3 было определено понятие фактор-пространства линейного пространства (X, Λ) по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$. Теперь введем понятие фактор-пространства линейного пространства по произвольному векторному подпространству.

Определение 3.14. *Пусть X_0 — векторное (вещественное векторное) подпространство линейного пространства (X, Λ), $\Phi = X/X_0$, а $\widetilde{\Lambda}$ — сильнейшая линейная (вещественно линейная) операция предела в Φ, при которой фактор-отображение $\pi : X \to \Phi$ секвенциально непрерывно. Тогда линейное пространство $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ называется фактор-пространством линейного пространства (X, Λ) по векторному (вещественному векторному) подпространству X_0.*

Отметим, что это определение фактор-пространства согласуется с определением, указанным в теореме 3.3 для частного случая $X_0 = \Lambda(\dot{0})$.

Замечание 3.8. Пусть X_0 — векторное подпространство комплексного линейного пространства (X, Λ), $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ — фактор-пространство пространства (X, Λ) по X_0, а $(X_{\mathbb{R}}, \Lambda)$ и $(\Phi_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Lambda})$ — вещественные линейные пространства, ассоциированные с (X, Λ) и $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ соответственно. Тогда из предложения 3.36 следует, что $(\Phi_{\mathbb{R}}, \widetilde{\Lambda})$ является фактор-пространством пространства $(X_{\mathbb{R}}, \Lambda)$ по X_0.

Очевидно, предложения 3.37, 3.38 и теорема 3.32 справедливы, в частности, для пространств (X, Λ), $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ и фактор-отображения π.

Теорема 3.33. *Пусть $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ — фактор-пространство линейного пространства (X, Λ) по векторному подпространству X_0, а $\Phi_0 = \overline{X}_0/X_0$. Тогда фактор-пространство $(\Phi/\Phi_0, \widetilde{\lambda})$ пространства $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ по векторному подпространству Φ_0 изоморфно фактор-пространству $(X/\overline{X}_0, \lambda)$ пространства (X, Λ) по векторному подпространству $\overline{X}_0$.*

◀ Обозначим $Y = X/\overline{X}_0$ и $\Psi = \Phi/\Phi_0$. В силу утверждения а) теоремы 3.32 (Y, λ) имеет операцию однозначного предела. Кроме того, в $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ имеет место $\Phi_0 = \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ и, следовтельно, $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ тоже имеет операцию однозначного предела. Каждое $y \in Y$ есть подмножество $y = x + \overline{X}_0$ векторного пространства X, где $x \in X$, а каждое $\psi \in \Psi$ есть подмножество $\psi = \varphi + \Phi_0$ фактор-пространства $\Phi = X/X_0$, где $\varphi \in \Phi$, причем φ есть подмножество $\varphi = x + X_0$ пространства X, где $x \in X$. Рассмотрим отображение $g : Y \to \Psi$, сопоставляющее каждому элементу $y = x + \overline{X}_0$ векторного пространства Y элемент $\psi = \varphi + \Phi_0$ векторного пространства Ψ, где $\varphi = x + X_0$, т. е. y и φ как подмножества линейного пространства (X, Λ) связаны равенством $\overline{\varphi}=y$. Отображение g является изоморфизмом векторного пространства Y на Ψ. Докажем, что оно является изоморфизмом линейного пространства (Y, λ) на $(\Psi, \widetilde{\lambda})$, т. е. отображения g и g^{-1} секвенциально непрерывны. В силу утверждения а) теоремы 3.32 в $(\varPhi, \widetilde{\Lambda})$ последовательность $(\varphi_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к элементу φ тогда и только тогда, когда в (Y, λ) последовательность элементов $y_n=\overline{\varphi}_n$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к элементу $y=\overline{\varphi}$, где $\overline{\varphi}_n$ и $\overline{\varphi}$ — замыкания множеств φ_n и φ в (X, Λ). Кроме того, в $(\varPhi, \widetilde{\Lambda})$ последовательность $(\varphi_n : n\in\mathbb{N})$, сходится к φ тогда и только тогда, когда в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ последовательность элементов $\psi_n=\varphi_n+\varPhi_0=g(y_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к элементу $\psi=\varphi+\varPhi_0=g(y)$. Тем самым в (Y, λ) последовательность $(y_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к y тогда и только тогда, когда в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ последовательность элементов $\psi_n=g(y_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к элементу $\psi=g(y)$. А это означает, что g является изоморфизмом (Y, λ) на $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. ►

Предложение 3.39. *Пусть X_0 — векторное подпространство линейного пространства (X, Λ), а $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})\in X^{\mathbb{N}}$. Если в (X, Λ) для каждой открытой окрестности нуля v имеет место $v\cap(x_n+\overline{X}_0)\neq\varnothing$ для всех $n\in\mathbb{N}$, кроме конечного числа значений, то существует такая последовательность натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$, что последовательность некоторых $y_n\in x_{i_n}+\overline{X}_0$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. При этом если (X, Λ) является прямой суммой своих линейных подпространств (X_0, Λ_0) и (X_1, Λ_1), а $(x_n+X_0)\cap X_1=\{x'_n\}$, $n\in\mathbb{N}$, то последовательность $(x'_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ тоже сходится к нулю.*

◄ Пусть $(\varPhi, \widetilde{\Lambda})$ — фактор-пространство линейного пространства (X, Λ) по векторному подпространству X_0, а $\pi : X\to\varPhi$ — фактор-отображение. Обозначим $\varphi_n=\pi(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$. Имеем, что $\overline{\pi^{-1}(\varphi_n)}=x_n+\overline{X}_0$, $n\in\mathbb{N}$. Если V'_0 — полная система открытых окрестностей нуля пространства (X, Λ), то в силу утверждения в) теоремы 3.32 система $\widetilde{V}'_0=\{\pi(v) : v\in V'_0\}$ является полной системой открытых окрестностей нуля фактор-пространства $(\varPhi, \widetilde{\Lambda})$. При этом $\pi(v)=\pi(v)+\pi(\overline{X}_0)$ для $v\in V'_0$. Поэтому для $v\in V'_0$ принадлежность $\varphi_n\in\pi(v)$ равносильна $v\cap(x_n+\overline{X}_0)\neq\varnothing$. Отсюда в силу условия предложения следует, что последовательность $\hat{\varphi}=(\varphi_n : n\in\mathbb{N})$ почти вся лежит в каждом $\widetilde{v}\in\widetilde{V}'_0$. Так как пространство $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ топологическое, то $\hat{\varphi}$ сходится к нулю в нем. Но тогда в силу утверждения а) теоремы 3.32 найдется такая последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, что последовательность некоторых $y_n \in \overline{\pi^{-1}(\varphi_{i_n})} = x_{i_n} + \overline{X}_0$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в (X, Λ). Отсюда в силу предложения 3.29 следует, что если $(X, \Lambda) = (X_0, \Lambda_0) \oplus (X_1, \Lambda_1)$, то последовательность однозначно определенных векторов $x'_{i_n} \in (x_{i_n} + X_0) \cap X_1$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в (X, Λ). ►

Теорема 3.34. *Пусть X_0 и X_1 — такие векторные подпространства линейного пространства (X, Λ), что $X = X_0 \oplus X_1$, а $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ — фактор-пространство пространства (X, Λ) по X_0. Пространство (X, Λ) тогда и только тогда является прямой суммой своих линейных подпространств (X_0, Λ_0) и (X_1, Λ_1), когда сужение на X_1 фактор-отображения $\pi : X \to \Phi$ является изоморфизмом (X_1, Λ_1) на $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$.*

◄ Пусть отображение $f : X_1 \to \Phi$ есть сужение на X_1 фактор-отображения π, а $p_1 : X \to X_1$ — проектирующее отображение, аннулирующееся на X_0. Ясно, что f является изоморфизмом X_1 на Φ. Поскольку фактор-отображение π секвенциально непрерывно, его сужение f секвенциально непрерывно. Очевидно, $\pi = fp_1$ и $p_1 = f^{-1}\pi$. Пусть τ, τ_1 и $\widetilde{\tau}$ — секвенциальные топологии пространств (X, Λ), (X_1, Λ_1) и $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$ соответственно. Допустим $(X, \Lambda) = (X_0, \Lambda_0) \oplus (X_1, \Lambda_1)$. Тогда отображение p_1 секвенциально непрерывно. Поэтому если $v_1 \in \tau_1$, то $v = p_1^{-1}(v_1) \in \tau$. Так как фактор-отображение π открыто, то $\pi(v) \in \widetilde{\tau}$. Однако из $\pi = fp_1$ следует, что $f(v_1) = \pi(v)$ и, значит, $f(v_1) \in \widetilde{\tau}$. Тем самым отображение f открыто. Поэтому обратное отображение f^{-1} $(\widetilde{\tau}, \tau_1)$-непрерывно и в силу теоремы 1.67 секвенциально непрерывно. Следовательно, f является изоморфизмом (X_1, Λ_1) на $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$.

Пусть, обратно, f является изоморфизмом (X_1, Λ_1) на $(\Phi, \widetilde{\Lambda})$. Тогда обратное отображение f^{-1} секвенциально непрерывно. Поскольку фактор-отображение π секвенциально непрерывно, из $p_1 = f^{-1}\pi$ следует, что отображение p_1 секвенциально непрерывно. Поэтому $(X, \Lambda) = (X_0, \Lambda_0) \oplus (X_1, \Lambda_1)$. ►

Отметим, что различные линейные пространства с одним и тем же носителем могут иметь одно и то же фактор-пространство по одному и тому же замкнутому векторному подпространству (см. пример в § 16, n° 8).

§ 10. Пополнение и квазипополнение линейных пространств

Определение 3.15. *Пополнением (квазипополнением) линейного пространства* (X, Λ) *называется всякое такое полное (квазиполное) линейное пространство* $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, *что*

1) $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ *содержит секвенциально всюду плотное линейное подпространство* $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$, *изоморфное* (X, Λ), *причем* $\widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset \widetilde{X}_0$;

2) ограничение $\widetilde{\Lambda}_1$ *операции предела* $\widetilde{\Lambda}$ *на некотором* $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$ *является сильнейшей линейной операцией предела;*

3) в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ *для каждой сходящейся к нулю последовательности* $(y_n : n \in \mathbb{N})$ *в представлениях* $y_n = y_n^0 + y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, *где* $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ *и* $y_n' \in \widetilde{X}_1$, *последовательность* $(y_n' : n \in \mathbb{N})$ *ограничена.*

Линейное пространство, содержащее неограниченную фундаментальную последовательность, не допускает пополнения.

Предложение 3.40. *Пусть* $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ *— квазипополнение линейного пространства* (X, Λ); $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$ *и* $(\widetilde{X}_1, \widetilde{\Lambda}_1)$ *— линейные подпространства в* $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, *удовлетворяющие условиям определения 3.15;* E *— базис Гамеля в* $\widetilde{X}_1 \neq \{0\}$; $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N}) \in \widetilde{X}^{\mathbb{N}}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) В $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ *последовательность* $\hat{y}$ *сходится к нулю тогда и только тогда, когда*

$$y_n = y_n^0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$, $e_k \in E$, m *— независящее от* n *натуральное число (оно может быть различным для различных* $\hat{y}$*), а* α_{kn} *— числа, множество которых ограничено, причем если последовательность натуральных чисел* $i_1 < i_2 < \ldots$ *такая, что для каждого* $k \leqslant m$ *последовательность чисел* α_{ki_n}, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к некоторому* α_k, *то последовательность векторов* $y_{i_n}^0$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к* $-\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$. *Следовательно, если* $\hat{y}$ *сходится к нулю, то в (1) любая подпоследовательность последовательности* $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ *обладает сходяшейся подпоследовательностью.*

б) Последовательность $\hat{y}$ *ограничена тогда и только тог-*

да, когда имеет место (1), где множество чисел α_{kn} *и последовательность* $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ *ограничены.*

в) Если последовательность $\hat{y}$ *фундаментальна, то имеет место (1), где множество чисел* α_{kn} *ограничено, а любая подпоследовательность последовательности* $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ *обладает фундаментальной подпоследовательностью.*

г) Ограничение $\widetilde{\Lambda}'$ *операции предела* $\widetilde{\Lambda}$ *на произвольном* $\widetilde{X}' = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$ *является сильнейшей линейной операцией предела. При этом если* $\hat{y}$ *сходится к нулю, то в* $y_n = \xi_n^0 + \xi_n'$, $n \in \mathbb{N}$, *где* $\xi_n^0 \in \widetilde{X}_0$ *и* $\xi_n' \in \widetilde{X}'$, *последовательность* $(\xi_n' : n \in \mathbb{N})$ *ограничена.*

◀ (а) Пусть $\hat{y}$ сходится к нулю. Тогда, согласно условию 3) определения 3.15, в $y_n = y_n^0 + y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, где $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ и $y_n' \in \widetilde{X}_1$, последовательность $(y_n' : n \in \mathbb{N})$ ограничена. Следовательно, для произвольной сходящейся к нулю последовательности чисел $\gamma_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(\gamma_n y_n' : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Однако, согласно условию 2) определения 3.15, $\widetilde{\Lambda}_1$ является сильнейшей операцией предела в $\widetilde{X}_1$. Поэтому в силу утверждения а) теоремы 3.25

$$\gamma_n y_n' = \sum_{k=1}^{m} \gamma_n \alpha_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $e_k \in E$, m — независящее от n натуральное число, а числа α_{kn} такие, что для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел $\gamma_n \alpha_{kn}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Отсюда в силу произвольности сходящейся к нулю последовательности чисел $\gamma_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, получаем ограниченность множества чисел α_{kn}. Тем самым

$$y_n' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

и, следовательно, имеет место (1). Если последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ такая, что для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому α_k, то в (1) $(y_{i_n}^0 : n \in \mathbb{N})$ сходится к $-\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$, так как $\hat{y}$ сходится к нулю. Из ограниченности множества чисел α_{kn} следует, что для каждого $k \leqslant m$ любая подпоследовательность последовательности чисел α_{kn}, $n \in \mathbb{N}$, обладает сходящейся подпоследовательностью. Поэтому в (1) любая подпоследовательность последовательности $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся подпоследовательностью.

Пусть, обратно, для $\hat{y}$ имеет место (1), где множество чисел α_{kn} ограничено, причем если последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ такая, что для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому α_k, то $(y_{i_n}^0 : n \in \mathbb{N})$ сходится к $-\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$. Отсюда в силу ограниченности множества чисел α_{kn} следует, что каждая подпоследовательность последовательности $\hat{y}$ обладает сходящейся к нулю подпоследовательностью. Поэтому $\hat{y}$ сходится к нулю.

(б) Пусть последовательность $\hat{y}$ ограничена. Тогда для произвольной сходящейся к нулю последовательности чисел $\gamma_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(\gamma_n y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Однако если $y_n = y_n^0 + y_n'$, где $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ и $y_n' \in \widetilde{X}_1$, то $\gamma_n y_n = \gamma_n y_n^0 + \gamma_n y_n'$. Отсюда с учетом $\gamma_n y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ и $\gamma_n y_n' \in \widetilde{X}_1$ в силу а) получаем

$$\gamma_n y_n = \gamma_n y_n^0 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_n \alpha_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где множество чисел $\gamma_n \alpha_{kn}$ ограничено. В силу произвольности сходящейся к нулю последовательности чисел $\gamma_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, множество чисел α_{kn} тоже ограничено. Из этих представлений получается (1). Так как в (1) множество чисел α_{kn} и последовательность $\hat{y}$ ограничены, то последовательность $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ тоже ограничена.

Пусть, обратно, для $\hat{y}$ имеет место (1), где множество чисел α_{kn} и последовательность $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ ограничены. Тогда, очевидно, последовательность $\hat{y}$ тоже ограничена.

(в) Пусть последовательность $\hat{y}$ фундаментальна. Обозначим $z_1 = y_1$ и $z_n = y_n - y_{n-1}$, $n > 1$. Тогда

$$y_n = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Однако $(z_\nu : \nu \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Поэтому

$$z_\nu = z_\nu^0 + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k\nu} e_k, \quad \nu \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

где $z_\nu^0 \in \widetilde{X}_0$, $e_k \in E$, а $\beta_{k\nu}$ — некоторые числа. Если обозначить

$$y_n^0 = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu^0, \quad \alpha_{kn} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{k\nu}, \quad n \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \ldots, m,$$

то из (3) и (4) получим (1). Докажем, что в (1) множество чисел α_{kn} ограничено. Предположим противное. Тогда для некоторого $k_0 \leqslant m$ существует такая последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, что последовательность чисел $|\alpha_{k_0 n} - \alpha_{k_0 i_n}|$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к бесконечности. Отсюда в силу

$$y_n - y_{i_n} = (y_n^0 - y_{i_n}^0) + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{kn} - \alpha_{ki_n}) e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

следует, что последовательность векторов $y_n - y_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, не сходится к нулю. А это противоречит условию фундаментальности $\hat{y}$. Поэтому в (1) множество чисел α_{kn} ограничено. Равенства (1) напишем в виде $y_n = y_n^0 + y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, где векторы $y_n' \in \widetilde{X}_1$ определяются равенствами (2). В силу ограниченности множества чисел α_{kn} из (2) следует, что каждая подпоследовательность последовательности $(y_n' : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся подпоследовательностью. Но тогда из $y_n^0 = y_n - y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, в силу фундаментальности $\hat{y}$ следует, что каждая подпоследовательность последовательности $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ обладает фундаментальной подпоследовательностью.

(г) Пусть $\widetilde{X}' = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$, E' — базис Гамеля в $\widetilde{X}'$, $\widetilde{\Lambda}'$ — ограничение операции предела $\widetilde{\Lambda}$ на $\widetilde{X}'$, а $\hat{y}$ сходится к нулю в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. В силу а) имеет место (1), где множество чисел α_{kn} ограничено. Очевидно, в (1) каждое e_k представляется в виде

$$e_k = e_k^0 + \sum_{\nu=1}^{s} \beta_{\nu k} e_\nu', \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

где $e_k^0 \in \widetilde{X}_0$, $e_\nu' \in E'$, а $\beta_{\nu k}$ — некоторые числа. Если обозначить

$$\xi_n^0 = y_n^0 + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k^0, \;\; \alpha_{\nu n}' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} \beta_{\nu k}, \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; \nu = 1, 2, \ldots, s,$$

то из (1) и (5) получим

$$y_n = \xi_n^0 + \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_{\nu n}' e_\nu', \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\xi_n^0 \in \widetilde{X}_0$, а множество чисел $\alpha_{\nu n}'$ ограничено. Положим

$$\xi_n' = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_{\nu n}' e_\nu', \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Тогда (6) принимает вид $y_n = \xi_n^0 + \xi_n'$, $n \in \mathbb{N}$, где $\xi_n' \in \widetilde{X}'$. При этом в силу ограниченности множества чисел $\alpha_{\nu n}'$ последовательность $(\xi_n' : n \in \mathbb{N})$ ограничена. В частности, если $y_n \in \widetilde{X}'$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $y_n = \xi_n'$, $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что в этом частном случае последовательность чисел

$$\beta_n' = \sum_{\nu=1}^{s} |\alpha_{\nu n}'|, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

сходится к нулю. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, что для каждого $\nu \leqslant s$ последовательность чисел $\alpha_{\nu i_n}'$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому числу α_ν', причем $|\alpha_1'| + |\alpha_2'| + \ldots + |\alpha_s'| \neq 0$. Поэтому в (7) последовательность векторов $y_{i_n} = \xi_{i_n}'$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к вектору

$$\xi' = \sum_{\nu=1}^{s} \alpha_\nu' e_\nu' \neq 0.$$

Отсюда следует, что сходящаяся к нулю последовательность $\hat{y}$ сходится также к ξ'. Тем самым $0 \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ и $\xi' \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Следовательно, $\xi' \in \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Однако в силу условия 1) определения 3.15 $\widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset \widetilde{X}_0$ и, значит, $\xi' \in \widetilde{X}_0$. А это противоречит тому, что $\xi' \neq 0$, $\xi' \in \widetilde{X}'$ и $\widetilde{X} = \widetilde{X}_0 \oplus \widetilde{X}'$. Полученное противоречие доказывает сходимость последовательности чисел (8) к нулю. Отсюда следует, что $\widetilde{\Lambda}'$ является сильнейшей линейной операцией предела в $\widetilde{X}'$. ►

Теорема 3.35. *Пусть линейное пространство (X, Λ) не квазиполно. Тогда*

а) оно допускает квазипополнение;

б) любые два его квазипополнения изоморфны;

в) если в нем каждая фундаментальная последовательность ограничена, то любое квазипополнение этого пространства является его пополнением.

◄ (а) Пусть $\varPhi = X/\Lambda(\dot{0})$. С учетом теоремы 3.3 рассмотрим фактор-пространство $(\varPhi, \lambda)$ линейного пространства (X, Λ) по векторному подпространству $\Lambda(\dot{0})$. Поскольку (X, Λ) не квазиполно, $(\varPhi, \lambda)$ тоже не квазиполно. Сначала докажем, что $(\varPhi, \lambda)$ допускает квазипополнение.

В множестве всех фундаментальных и ограниченных последовательностей элементов пространства $(\varPhi, \lambda)$ определим отношение эквивалентности, считая две последовательности эквивалентными, если их разность сходится к нулю в $(\varPhi, \lambda)$. Множество Ψ полученных классов эквивалентности наделим структурой векторного пространства следующим образом. Сумма $\psi_1+\psi_2=\psi'$ классов $\psi_1\in\Psi$ и $\psi_2\in\Psi$ есть класс $\psi'\in\Psi$, содержащий последовательность $\hat\varphi'=\hat\varphi_1+\hat\varphi_2$, где $\hat\varphi_1\in\psi_1$ и $\hat\varphi_2\in\psi_2$, а произведение $\alpha\psi=\psi''$ класса $\psi\in\Psi$ на число α есть класс $\psi''\in\Psi$, содержащий последовательность $\hat\varphi''=\alpha\hat\varphi$, где $\hat\varphi\in\psi$. Указанные операции сложения классов и умножения класса на число определены корректно, т. е. не зависят от выбора последовательностей $\hat\varphi_1$, $\hat\varphi_2$ и $\hat\varphi$. Введением этих операций множество Ψ превращается в векторное пространство, причем его нулевой элемент есть класс, содержащий стационарную последовательность, членами которой является нулевой элемент $\Lambda(\dot 0)$ пространства $\varPhi$, а противоположный к $\psi\in\Psi$ элемент есть класс $-\psi\in\Psi$, содержащий последовательность $-\hat\varphi$, где $\hat\varphi\in\psi$. Обозначим через Ψ_0 множество тех классов, каждый из которых содержит стационарную последовательность. Очевидно, Ψ_0 является векторным подпространством пространства Ψ и каждый класс $\psi\in\Psi_0$ содержит лишь одну стационарную последовательность. Пусть $\Psi_1=\Psi\ominus\Psi_0$, а E — базис Гамеля в Ψ_1. Рассмотрим подмножество $\hat\Psi_0\subset\Psi^{\mathbb N}$ тех последовательностей $\hat\psi=(\psi_1,\,\psi_2,\,\ldots)$ в Ψ, для которых

$$\psi_n=\xi_n+\sum_{k=1}^{m}\alpha_{kn}e_k,\quad n\in\mathbb N,\tag{9}$$

где $\xi_n\in\Psi_0$, $e_k\in E$, m — независящее от n натуральное число (оно может быть различным для различных $\hat\psi$), а α_{kn} — числа, множество которых ограничено, причем если последовательность натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$ такая, что для каждого $k\leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n\in\mathbb N$, сходится к некоторому α_k, а для каждого $n\in\mathbb N$ элемент $\varphi_n\in\varPhi$ такой, что $\dot\varphi_n\in\xi_n$, то последовательность $\hat\varphi'=(\varphi_{i_n}:n\in\mathbb N)$ фундаментальна и ограничена в $(\varPhi, \lambda)$ и принадлежит классу $\xi'=-\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k e_k$. С учетом предложения 3.15 легко проверить, что $\hat\Psi_0$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции однозначного предела $\widetilde\lambda$ в Ψ. Докажем, что линейное пространство $(\Psi, \widetilde\lambda)$ квазиполно. Сначала докажем сходимость в $(\Psi, \widetilde\lambda)$ фундаментальной и ограниченной последовательности $\hat\psi=(\psi_n:n\in\mathbb N)$ классов $\psi_n\in\Psi_0$. Пусть для каждого $n\in\mathbb N$ элемент $\varphi_n\in\varPhi$ такой, что $\dot\varphi_n\in\psi_n$. Положим

$\hat{\varphi}=(\varphi_n : n\in\mathbb{N})$. Рассмотрим некоторое $\hat{\psi}'\prec\hat{\psi}$ и соответствующее $\hat{\varphi}'\prec\hat{\varphi}$. В силу фундаментальности $\hat{\psi}$ последовательность $\hat{\psi}-\hat{\psi}'$ сходится к нулю в $(\Psi,\,\widetilde{\lambda})$. Значит, последовательность $\hat{\varphi}-\hat{\varphi}'$ фундаментальна и ограничена в $(\Phi,\,\lambda)$ и принадлежит классу, являющемуся нулевым элементом векторного пространства Ψ. Поэтому $\hat{\varphi}-\hat{\varphi}'$ сходится к нулю в $(\Phi,\,\lambda)$. Следовательно, последовательность $\hat{\varphi}$ фундаментальна в $(\Phi,\,\lambda)$. Если $\hat{\alpha}$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность, то в силу ограниченности $\hat{\psi}$ последовательность $\hat{\alpha}\hat{\psi}$ сходится к нулю в $(\Psi,\,\widetilde{\lambda})$. Это означает, что последовательность $\hat{\alpha}\hat{\varphi}$ фундаментальна и ограничена в $(\Phi,\,\lambda)$ и принадлежит классу, являющемуся нулевым элементом векторного пространства Ψ. Поэтому $\hat{\alpha}\hat{\varphi}$ сходится к нулю в $(\Phi,\,\lambda)$. Следовательно, последовательность $\hat{\varphi}$ ограничена в $(\Phi,\,\lambda)$. Тем самым из фундаментальности и ограниченности в $(\Psi,\,\widetilde{\lambda})$ последовательности $\hat{\psi}$ классов из Ψ_0 следует фундаментальность и ограниченность последовательности $\hat{\varphi}$ в $(\Phi,\,\lambda)$. Класс $\psi\in\Psi$, содержащий $\hat{\varphi}$, представим в виде

$$\psi=\xi+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k e_k,$$

где $\xi\in\Psi_0$, $e_k\in E$, а α_k — некоторые числа. Очевидно, что если $\varphi\in\Phi$ — элемент, для которого $\dot{\varphi}\in\xi$, то $\hat{\varphi}-\dot{\varphi}\in\xi'=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k e_k$. Отсюда в силу

$$\psi_n-\psi=(\psi_n-\xi)-\sum_{k=1}^{m}\alpha_k e_k,\quad n\in\mathbb{N},$$

следует, что $\hat{\psi}-\dot{\psi}\in\hat{\Psi}_0$ и, значит, $\hat{\psi}$ сходится к ψ в $(\Psi,\,\widetilde{\lambda})$.

Заметим, что если для каждого $k\leqslant m$ последовательность чисел α_{kn}, $n\in\mathbb{N}$, сходится к некоторому α_k, то последовательность классов

$$\xi_n'=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{kn}e_k,\quad n\in\mathbb{N},\tag{10}$$

где $e_k\in E$, сходится в $(\Psi,\,\widetilde{\lambda})$ к $\xi'=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k e_k$.

Рассмотрим теперь в $(\Psi,\widetilde{\lambda})$ произвольную фундаментальную и ограниченную последовательность $\hat{\psi}=(\psi_n : n\in\mathbb{N})$. Обозначим $\eta_1=\psi_1$ и $\eta_n=\psi_n-\psi_{n-1}$, $n>1$. Тогда

$$\psi_n = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Из фундаментальности $\hat{\psi}$ следует, что последовательность $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$, т. е. $\hat{\eta} \in \hat{\Psi}_0$. Поэтому

$$\eta_\nu = \xi_\nu^0 + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k\nu} e_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

где $\xi_\nu^0 \in \Psi_0$, $e_k \in E$, а $\beta_{k\nu}$ — некоторые числа. Если обозначить

$$\xi_n = \sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^0, \quad \alpha_{kn} = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{k\nu}, \quad n \in \mathbb{N}, \ k = 1, 2, \ldots, m,$$

то из (11) и (12) получим (9). Докажем, что в (9) множество чисел α_{kn} ограничено. Предположим противное. Тогда для некоторого натурального $k_0 \leqslant m$ найдется такая последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$, что последовательность чисел $|\alpha_{k_0 n} - \alpha_{k_0 i_n}|$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к бесконечности. Отсюда в силу

$$\psi_n - \psi_{i_n} = (\xi_n - \xi_{i_n}) + \sum_{k=1}^{m} (\alpha_{kn} - \alpha_{ki_n}) e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

следует, что последовательность классов $\psi_n - \psi_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, не принадлежит $\hat{\Psi}_0$ и, значит, не сходится к нулю в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. А это противоречит условию фундаментальности $\hat{\psi}$. Поэтому в (9) множество чисел α_{kn} ограничено. Равенства (9) напишем в виде $\psi_n = \xi_n + \xi_n'$, $n \in \mathbb{N}$, где классы $\xi_n' \in \Psi_1$ определяются равенствами (10). В силу ограниченности множества чисел α_{kn} из (10) следует, что $(\xi_n' : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся подпоследовательностью в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. Но тогда из $\xi_n = \psi_n - \xi_n'$, $n \in \mathbb{N}$, в силу фундаментальности и ограниченности $\hat{\psi}$ следует, что $(\xi_n : n \in \mathbb{N})$ обладает фундаментальной и ограниченной подпоследовательностью. Однако, как уже было доказано, такая подпоследовательность классов из Ψ_0 сходится в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. Учитывая это, из $\psi_n = \xi_n + \xi_n'$, $n \in \mathbb{N}$, получим, что фундаментальная последовательность $\hat{\psi}$ обладает сходящейся подпоследовательностью в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ и, следовательно, сама сходится в этом пространстве. Тем самым квазиполнота $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ доказана.

Докажем, что $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ является квазипополнением пространства $(\varPhi, \lambda)$. Проверим секвенциальную всюду плотность векторного подпространства $\Psi_0 \subset \Psi$. Пусть $\psi \in \Psi$ и $\hat{\varphi} \in \psi$, причем $\hat{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через ξ_n класс, содержащий стационарную последовательность $\dot{\varphi}_n$. Имеем, что $\xi_n \in \Psi_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Класс ψ представим в виде

$$\psi = \xi + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k,$$

где $\xi \in \Psi_0$, $e_k \in E$, а α_k — некоторые числа. Очевидно,

$$\psi - \xi_n = (\xi - \xi_n) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Пусть элемент $\varphi \in \varPhi$ такой, что $\dot{\varphi} \in \xi$. Тогда $\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_n \in \xi - \xi_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и, кроме того, $\dot{\varphi} - \hat{\varphi} \in \xi - \psi = -\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$. Отсюда с учетом (13) вытекает, что последовательность классов $\psi - \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежит множеству $\hat{\Psi}_0$ и, значит, сходится к нулю в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. Следовательно, последовательность классов $\xi_n \in \Psi_0$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к ψ в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. А это означает, что Ψ_0 секвенциально всюду плотно в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$. Каждому $\varphi \in \varPhi$ сопоставим класс $\psi \in \Psi_0$, содержащий стационарную последовательность $\dot{\varphi}$. Тогда получим линейное биективное отображение f пространства $(\varPhi, \lambda)$ на подпространство $(\Psi_0, \widetilde{\lambda}_0) \subset (\Psi, \widetilde{\lambda})$. Непосредственно из определения $\widetilde{\lambda}$ вытекает, что f и f^{-1} секвенциально непрерывны в нуле и, следовательно, секвенциально непрерывны. Это означает, что $(\Psi_0, \widetilde{\lambda}_0)$ изоморфно $(\varPhi, \lambda)$. Очевидно также то, что ограничение $\widetilde{\lambda}_1$ на Ψ_1 операции предела $\widetilde{\lambda}$ является сильнейшей линейной операцией предела. Кроме того, если в $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ последовательность $\hat{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots)$ сходится к нулю, то в представлениях (9) последовательность классов (10) ограничена. Следовательно, $(\Psi, \widetilde{\lambda})$ является квазипополнением пространства $(\varPhi, \lambda)$.

Перейдем теперь к построению квазипополнения пространства (X, Λ). Пусть $(X_*, \Lambda_*) \subset (X, \Lambda)$ — линейное подпространство с носителем $X_* = \Lambda(\dot{0})$. Ясно, что $\Lambda_*(\hat{x}) = X_*$ для любого $\hat{x} \in X_*^{\mathbb{N}}$. Рассмотрим $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda}) = (X_*, \Lambda_*) \times (\Psi, \widetilde{\lambda})$. Очевидно, $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ квазиполно, а прямое произведение $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0) = (X_*, \Lambda_*) \times (\Psi_0, \widetilde{\lambda}_0)$

является его секвенциально всюду плотным линейным подпространством. Для любого $\Psi_1 = \Psi \ominus \Psi_0$ декартово произведение $\widetilde{X}_1 = \{0\} \times \Psi_1$ является алгебраическим дополнением векторного подпространства $\widetilde{X}_0$ в $\widetilde{X}$, т. е. $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$. Очевидно также то, что $\widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset \widetilde{X}_0$ (здесь символ 0 обозначает нулевой вектор пространства $\widetilde{X}$). Легко убедиться, что операция предела $\widetilde{\Lambda}_1$ линейного подпространства $(\widetilde{X}_1, \widetilde{\Lambda}_1) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ является сильнейшей линейной операцией предела в $\widetilde{X}_1$. При этом если в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ последовательность векторов $y_n \in \widetilde{X}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю, то в представлениях $y_n = y_n^0 + y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, где $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ и $y_n' \in \widetilde{X}_1$, последовательность $(y_n' : n \in \mathbb{N})$ ограничена. Убедимся в том, что линейное подпространство $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ изоморфно пространству (X, Λ). Рассмотрим некоторое $X_1 = X \ominus X_*$. В силу предложения 3.28 (X, Λ) является прямой суммой линейных подпространств (X_*, Λ_*) и $(X_1, \Lambda_1) \subset (X, \Lambda)$, т. е. $(X, \Lambda) = (X_*, \Lambda_*) \oplus (X_1, \Lambda_1)$, причем (X_1, Λ_1) изоморфно фактор-пространству $(\varPhi, \lambda)$ пространства (X, Λ) по векторному подпространству X_*. Однако подпространство $(\Psi_0, \widetilde{\lambda}_0) \subset (\Psi, \widetilde{\lambda})$ тоже изоморфно $(\varPhi, \lambda)$. Поэтому $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$ изоморфно (X, Λ). Значит, $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ является квазипополнением пространства (X, Λ).

(б) Докажем, что любые два квазипополнения $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ и (X', Λ') линейного пространства (X, Λ) изоморфны. Пусть $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ и $(X_0', \Lambda_0') \subset (X', \Lambda')$ — линейные подпространства, удовлетворяющие условиям определения 3.15. Эти подпространства изоморфны, поскольку каждое из них изоморфно (X, Λ). Пусть $f_0 : \widetilde{X}_0 \to X_0'$ — изоморфизм подпространства $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$ на (X_0', Λ_0'). Если в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $y_n \in \widetilde{X}_0$ сходится, то в (X', Λ') последовательность $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $z_n \in X_0'$, где $z_n = f_0(y_n)$, тоже сходится. Действительно, рассмотрим произвольное $\hat{y}' \prec \hat{y}$ и соответствующее $\hat{z}' \prec \hat{z}$. Разность $\hat{y} - \hat{y}'$ сходится к нулю в $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$. Поскольку f_0 является изоморфизмом, разность $\hat{z} - \hat{z}'$ тоже сходится к нулю в (X_0', Λ_0'). Поэтому последовательность $\hat{z}$ фундаментальна. Если числовая последовательность $\hat{\alpha}$ сходится к нулю, то $\hat{\alpha}\hat{y}$ сходится к нулю в $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$. Но тогда $\hat{\alpha}\hat{z}$ сходится к нулю в (X_0', Λ_0') и, значит, последовательность $\hat{z}$ ограничена.

Однако фундаментальная и ограниченная последовательность $\hat{z}$ сходится в квазиполном пространстве (X', Λ'). Ясно, что если $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \cap \widetilde{X}_0 = \varnothing$, то $\Lambda'(\hat{z}) \cap X'_0 = \varnothing$, а если $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \cap \widetilde{X}_0 \neq \varnothing$, то $\Lambda'(\hat{z}) \cap X'_0 \neq \varnothing$, причем $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \subset \widetilde{X}_0$ и $\Lambda'(\hat{z}) \subset X'_0$. Вместе со сходящимися последовательностями $\hat{y}$ и $\hat{z}$ рассмотрим последовательности $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{X}_0$ и $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$ в X'_0, где $\eta_n = f_0(\xi_n)$. Если $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{\xi})$, то $\Lambda'(z) = \Lambda'(\hat{\eta})$. Действительно, так как $\hat{y} - \hat{\xi}$ сходится к нулю в $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\Lambda}_0)$, то $\hat{z} - \hat{\eta}$ сходится к нулю в (X'_0, Λ'_0). Поэтому $\Lambda'(\hat{z}) = \Lambda'(\hat{\eta})$.

Пусть $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$, а E — базис Гамеля в $\widetilde{X}_1$. Так как $\widetilde{X}_0$ секвенциально всюду плотно в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, то для каждого $e \in E$ существует сходящаяся к e последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{X}_0$. Тогда последовательность $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $z_n = f_0(y_n)$ сходится в (X', Λ'). Выберем некоторое $h \in \Lambda'(z)$. Из $e \notin \widetilde{X}_0$ следует, что $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \cap \widetilde{X}_0 = \varnothing$ и, значит, $\Lambda'(\hat{z}) \cap X'_0 = \varnothing$. Поэтому $h \notin X'_0$. Каждому $e \in E$ сопоставим выбранное h, множество которых обозначим через H. Пусть X'_1 — линейная оболочка множества H. Указанное соответствие $e \mapsto h$ продолжим по линейности на $\widetilde{X}_1$. Тогда получим некоторое линейное отображение $f_1 : \widetilde{X}_1 \to X'_1$ векторного подпространства $\widetilde{X}_1$ на X'_1. Очевидно, что если последовательность $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $\xi_n \in \widetilde{X}_0$ сходится к $\xi \in \widetilde{X}_1$, то последовательность $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $\eta_n = f_0(\xi) \in X'_0$ сходится к $\eta = f_1(\xi) \in X'_1$. Если $\xi \neq 0$ и, значит, $\xi \notin \widetilde{X}_0$, то $\widetilde{\Lambda}(\hat{\xi}) \cap \widetilde{X}_0 = \varnothing$. Тогда $\Lambda'(\hat{\eta}) \cap X'_0 = \varnothing$ и, значит, $f_1(\xi) \notin X'_0$. Отсюда в силу $\widetilde{X}_0 \cap \widetilde{X}_1 = \{0\}$ имеем $X'_0 \cap X'_1 = \{0\}$, причем для вектора $\xi \in \widetilde{X}_1$ равенство $f_1(\xi) = 0$ имеет место только при $\xi = 0$. Поэтому линейное отображение f_1 биективно. Докажем, что $X' = X'_0 \oplus X'_1$. Поскольку X'_0 секвенциально всюду плотно в (X', Λ'), для произвольного $z \in X'$ существует последовательность векторов $z_n \in X'_0$, $n \in \mathbb{N}$, сходящаяся к z. Тогда последовательность векторов $y_n = f_0^{-1}(z_n) \in \widetilde{X}_0$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому $y \in \widetilde{X}$. Вектор y представим в виде $y = y^0 + y'$, где $y^0 \in \widetilde{X}_0$ и $y' \in \widetilde{X}_1$. Обозначим $z^0 = f_0(y^0) \in X'_0$ и $z' = f_1(y') \in X'_1$. Очевидно, последовательность векторов $y_n - y^0 \in \widetilde{X}_0$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к y'. Поэтому последовательность векторов $z_n - z^0 \in X'_0$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к z'. Следовательно, $z^0 + z'$ является пределом последовательности $(z_n : n\in\mathbb{N})$ и, значит, $z^0+z'-z\in\Lambda'(\dot{0})\subset X'_0$. Обозначим $\eta=z_0+z'-z$ и $\eta_0=z_0-\eta$. В силу $z^0\in X'_0$ и $\eta\in X'_0$ имеем $\eta^0\in X'_0$. Таким образом, $z=\eta^0+z'$, где $\eta^0\in X'_0$ и $z'\in X'_1$, причем в силу $X'_0\cap X'_1=\{0\}$ это представление единственно. Следовательно, $X'=X'_0\oplus X'_1$ и, значит, $X'_1=X'\ominus X'_0$. Однако операции предела линейных подпространств $(\widetilde{X}_1,\,\widetilde{\Lambda}_1)\subset(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$ и $(X'_1,\,\Lambda'_1)\subset(X',\,\Lambda')$ являются сильнейшими операциями предела в $\widetilde{X}_1$ и X'_1 соответственно. Отсюда легко заключить, что линейные биективные отображения f_1 и f_1^{-1} секвенциально непрерывны и, значит, f_1 является изоморфизмом $(\widetilde{X}_1,\,\widetilde{\Lambda}_1)$ на $(X'_1,\,\Lambda'_1)$.

Произвольное $y\in\widetilde{X}$ представим в виде $y=y^0+y'$, где $y^0\in\widetilde{X}_0$ и $y'\in\widetilde{X}_1$. Отображение $f:\widetilde{X}\to X'$ определим по формуле $f(y)=$ $=f_0(y^0)+f_1(y')$. Очевидно, f является линейным биективным отображением $\widetilde{X}$ на X'. Докажем, что f и f^{-1} секвенциально непрерывны. Рассмотрим в $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$ произвольную сходящуюся к нулю последовательность $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ и ее члены представим в виде $y_n=y_n^0+y'_n$, $n\in\mathbb{N}$, где $y_n^0\in\widetilde{X}_0$ и $y'_n\in\widetilde{X}_1$. В силу утверждения а) предложения 3.40

$$y'_n=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{kn}e_k,\quad n\in\mathbb{N},$$

где $e_k\in E$, m — независящее от n натуральное число, а α_{kn} — числа, множество которых ограничено. Ясно, что каждая подпоследовательность последовательности $\hat{y}'=(y'_n : n\in\mathbb{N})$ обладает сходящейся в $(\widetilde{X}_1,\,\widetilde{\Lambda}_1)$ подпоследовательностью. Пусть последовательность натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$ такая, что $(y'_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ сходится к некоторому $y'\in\widetilde{X}_1$. Тогда из $y_n=y_n^0+y'_n$, $n\in\mathbb{N}$, следует, что $(y^0_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ сходится к $-y'$ в $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$, так как $\hat{y}$ сходится к нулю. В силу доказанных выше свойств отображений f_0 и f_1 в $f(y_n)=f_0(y_n^0)+f_1(y'_n)$, $n\in\mathbb{N}$, последовательности векторов $f_0(y^0_{i_n})$ и $f_1(y'_{i_n})$, $n\in\mathbb{N}$, сходятся соответственно к $f_1(-y')=-f_1(y')$ и $f_1(y')$ в $(X',\,\Lambda')$. Поэтому $(f(y_{i_n}) : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю в $(X',\,\Lambda')$. Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности векторов $f(y_n)$, $n\in\mathbb{N}$, обладает сходяшейся к нулю подпоследовательностью. Следовательно, указанная последовательность сама сходится к нулю. А это означает, что линейное биективное отображение f секвенциально непрерывно в нуле. Аналогично доказывается секвенциальная непрерывность в нуле отображения f^{-1}. В силу линейности f и f^{-1} они секвенциально непрерывны. Поэтому f является изоморфизмом $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ на (X', Λ').

(в) Пусть в $(X,\, \Lambda)$ любая фундаментальная последовательность ограничена, а $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ — некоторое квазипополнение пространства $(X,\, \Lambda)$. Докажем, что в $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ любая фундаментальная последовательность тоже ограничена. Пусть $(\widetilde{X}_0,\, \widetilde{\Lambda}_0) \subset \subset (\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ — линейное подпространство, удовлетворяющее условиям определения 3.15. Поскольку $(\widetilde{X}_0,\, \widetilde{\Lambda}_0)$ изоморфно пространству $(X,\, \Lambda)$, в $(\widetilde{X}_0,\, \widetilde{\Lambda}_0)$ любая фундаментальная последовательность ограничена. Рассмотрим в $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ произвольную фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. В силу утверждения в) предложения 3.40 в $y_n = y_n^0 + y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, где $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ и $y_n' \in \widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$, последовательность $(y_n' : n \in \mathbb{N})$ ограничена, а любая подпоследовательность последовательности $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ обладает фундаментальной подпоследовательностью, которая в рассматриваемом случае ограничена. Отсюда следует, что последовательность $(y_n^0 : n \in \mathbb{N})$ тоже ограничена. Поэтому последовательность $\hat{y}$ ограничена. Значит, в квазиполном пространстве $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ любая фундаментальная последовательность сходится. Следовательно, $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ полно и является пополнением пространства $(X,\, \Lambda)$. ►

Легко заметить, что если $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — квазипополнение комплексного линейного пространства $(X,\, \Lambda)$, а $(Y_{\mathbb{R}},\, \widetilde{\Lambda})$ и $(X_{\mathbb{R}},\, \Lambda)$ — вещественные линейные пространства, ассоциированные с $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ и $(X,\, \Lambda)$ соответственно, то $(Y_{\mathbb{R}},\, \widetilde{\Lambda})$ является квазипополнением пространства $(X_{\mathbb{R}},\, \Lambda)$.

Замечание 3.9. Пусть $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ — квазипополнение линейного пространства $(X,\, \Lambda)$, $(\widetilde{X}_0,\, \widetilde{\Lambda}_0) \subset (\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ — линейное подпространство, удовлетворяющее условиям определения 3.15, а $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$. Тогда если $\widetilde{X}_1$ бесконечномерно, то в силу теоремы 3.28 $(\widetilde{X},\, \widetilde{\Lambda})$ не является пространством Фреше–Урысона.

Замечание 3.10. Из предложения 3.21 и теоремы 3.35 следует, что если в линейном пространстве $(X,\, \Lambda)$, имеющем полную систему окрестностей нуля U_0, система окрестностей нуля

$\{u+u : u \in U_0\}$ определяет операцию предела Λ, то любое квазипополнение пространства (X, Λ) является его пополнением.

Пополнение нормируемого линейного пространства может не быть метризуемым (см. пример в § 16, n° 10). Поэтому метризуемое линейное пространство (X, λ) нельзя отождествить с линейным пространством с метрикой (X, ρ), где ρ — инвариантная относительно сдвигов метрика, определяющая операцию предела λ, причем их нельзя отождествить даже в случае, когда метрика ρ определяется нормой.

Если (X, λ) — полное метрическое линейное пространство, а ρ — неинвариантная относительно сдвигов метрика на X, определяющая операцию предела λ, то пространство с метрикой (X, ρ) может не быть полным (см. пример в § 16, n° 4). Более того, если $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$ — пополнение неполного пространства с метрикой (X, ρ), а $\widetilde{\lambda}$ — операция предела пространства $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho})$, то пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\lambda})$ может не быть линейным.

Пусть (X, Λ) — неполное линейное пространство, а (X, R) — пространство с секвенциальной равномерностью, ассоциированное с (X, Λ). Пространство (X, R) допускает пополнение $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$, хотя (X, Λ) может не допускать пополнения. Более того, если $\widetilde{\Lambda}$ — операция предела пространства $(\widetilde{X}, \widetilde{R})$, то пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ может не быть линейным. Поэтому понятия пополнений пространств (X, Λ) и (X, R) являются совершенно различными понятиями и, следовательно, пространство (X, Λ) нельзя отождествить с пространством (X, R).

Пусть (X, λ) — полное линейное пространство с операцией однозначного предела, $(X_1, \lambda_1) \subset (X, \lambda)$ — неполное линейное подпространство, а X_1^+ — квазизамыкание векторного подпространства X_1 в (X, λ). Очевидно, (X_1, λ_1) допускает пополнение, причем в качестве носителя его пополнения может служить X_1^+, а в пополнении (X_1^+, λ_1') в качестве подпространства, удовлетворяющего условиям определения 3.15, может служить (X_1, λ_1). Пополнение (X_1^+, λ_1') может не совпадать с подпространством $(X_1^+, \lambda_2) \subset (X, \lambda)$, т. е. $\lambda_1' \neq \lambda_2$ (см. пример в § 16, n° 9). При этом, очевидно, $\lambda_1' < \lambda_2$. Кроме того, квазизамыкание X_1^+ может не быть замкнутым в (X, λ) и, значит, подпространство (X_1^+, λ_2) может не быть полным.

Всюду в дальнейшем, говоря о пополнении (квазипополнении) $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ линейного пространства $(X, \Lambda) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, будем считать, что (X, Λ) служит для $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ в качестве подпространства, удовлетворяющего условиям определения 3.15.

Предложение 3.41. *Пусть (X, Λ) — неполное линейное пространство, имеющее такую систему окрестностей нуля V_0, определяющую операцию предела Λ, что для каждого $v\in V_0$ существует $u\in V_0$, уравновешение w которого удовлетворяет включению $w+w\subset v$, а $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ — пополнение пространства $(X, \Lambda)\subset(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. Тогда в системе $V_0'=\{v^+ : v\in V_0\}$, где квазизамыкание взято в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, для каждого $\widetilde{v}\in V_0'$ существует $\widetilde{u}\in V_0'$, уравновешение $\widetilde{w}$ которого удовлетворяет включению $\widetilde{w}+\widetilde{w}\subset\widetilde{v}$. При этом V_0', рассматриваемая как система окрестностей нуля в $\widetilde{X}$, определяет линейную операцию предела Λ', для которой справедливы утверждения*

а) $(X, \Lambda)\subset(\widetilde{X}, \Lambda')$ и $\widetilde{\Lambda}\leqslant\Lambda'$;

б) $\Lambda'(\hat{x})=\widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ для любого $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$ и, в частности, $\Lambda'(\dot{0})=$ $=\widetilde{\Lambda}(\dot{0})=\Lambda(\dot{0})$;

в) если Λ — операция однозначного предела, то пространства $(\widetilde{X}, \Lambda')$ и $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ хаусдорфовы.

◀ Пусть u — окрестность нуля в (X, Λ). Докажем, что в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ квазизамыкание u^+ поглощающе. Рассмотрим произвольное $y\in\widetilde{X}$. Так как X секвенциально всюду плотно в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, то существует последовательность $\hat{x}=(x_1, x_2, \ldots)$ в X, сходящаяся к y, т. е. $y\in\widetilde{\Lambda}(\hat{x})$. В силу того, что (X, Λ) является линейным подпространством для $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, существует окрестность нуля $\widetilde{u}$ в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, для которой $u=\widetilde{u}\cap X$. Последовательность $\hat{x}$, будучи сходящейся, ограничена в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому существует такое число $r>0$, что $rx_n\in\widetilde{u}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Однако $rx_n\in X$ и, значит, $rx_n\in u$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Отсюда следует, что $ry\in u^+$, т. е. u^+ поглощающе.

Очевидно, в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ для любого множества H имеет место включение
$$\bigcup_{|\alpha|\leqslant 1}\alpha H^+\subset\Big(\bigcup_{|\alpha|\leqslant 1}\alpha H\Big)^+,$$
т. е. уравновешение квазизамыкания H^+ содержится в квазизамыкании уравновешения множества H. Кроме того, $H^++H^+\subset$ $\subset(H+H)^+$.

В силу условия, наложенного на систему V_0, из доказанных утверждений следует, что каждое $\widetilde{v}\in V_0'$ поглощающе в $\widetilde{X}$ и для нее существует $\widetilde{u}\in V_0'$, уравновешение $\widetilde{w}$ которого удовлетворяет включению $\widetilde{w}+\widetilde{w}\subset\widetilde{v}$. Поэтому V_0' удовлетворяет условиям предложения 3.5 и, следовательно, является системой окрестностей нуля в $\widetilde{X}$, определяющей некоторую линейную операцию предела Λ'.

(а) Докажем, что $(X,\,\Lambda)\subset(\widetilde{X},\,\Lambda')$. Квазизамыкание множества $v\in V_0$ в пространстве $(X,\,\Lambda)$ обозначим через $(v)_0^+$. Очевидно, $(v)_0^+=X\cap v^+$. Следовательно, система V_0' окрестностей нуля пространства $(\widetilde{X},\,\Lambda')$ индуцирует в X систему окрестностей нуля $V_0''=\{(v)_0^+ : v\in V_0\}$. С другой стороны, для каждого $v\in V_0$ существует такое $u\in V_0$, что $u+u\subset v$. Однако в силу теоремы 3.12 $(u)_0^+\subset u+u$ и, значит, $(u)_0^+\subset v$. Поэтому в X системы окрестностей нуля V_0 и V_0'' определяют одну и ту же линейную операцию предела Λ. Отсюда следует, что $(X,\,\Lambda)$ является линейным подпространством для $(\widetilde{X},\,\Lambda')$.

Теперь докажем, что $\widetilde{\Lambda}\leqslant\Lambda'$. Для этого достаточно доказать, что каждое $\widetilde{v}\in V_0'$ является окрестностью нуля в $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$. Пусть $\widetilde{v}=v^+$, где $v\in V_0$, а множество $u\in V_0$ выбрано так, чтобы $u+u\subset$ $\subset v$. Рассмотрим в $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$ произвольную сходящуюся к нулю последовательность $\hat{y}=(y_1,\,y_2,\,\ldots)$ и докажем, что она почти вся лежит в v^+. Пусть $\widetilde{X}_1=\widetilde{X}\ominus X$, а E — базис Гамеля в $\widetilde{X}_1$. Члены последовательности $\hat{y}$ представим в виде $y_n=x_n+x_n'$, $n\in\mathbb{N}$, где $x_n\in X$ и $x_n'\in\widetilde{X}_1$. В силу предложения 3.40

$$x_n'=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{kn}e_k,\quad n\in\mathbb{N},\tag{14}$$

где $e_k\in E$, m — независящее от n натуральное число, а α_{kn} — числа, множество которых ограничено. Если последовательность натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$ такая, что для каждого $k\leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n\in\mathbb{N}$, сходится к некоторому α_k, то $(x_{i_n}' : n\in\mathbb{N})$ сходится к $x'=\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k e_k$ в каждом из $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$ и $(\widetilde{X},\,\Lambda')$, а $(x_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ сходится к $-x'$ в $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$. Поскольку последовательность $(x_{i_n}'-x' : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю в $(\widetilde{X},\,\Lambda')$, найдется такое $n'\in\mathbb{N}$, что $x_{i_n}'-x'\in u^+$ для всех $n\geqslant n'$.

Из сходимости последовательности $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ следует, что она фундаментальна в этом пространстве, а значит, и в (X, Λ). Поэтому найдется такое $n'' \in \mathbb{N}$, что $x_{i_n} - x_{i_{n+\nu}} \in u$ для всех $n \geqslant n''$ и $\nu \in \mathbb{N}$. Однако для каждого $n \geqslant n''$ последовательность векторов $x_{i_n} - x_{i_{n+\nu}}$, $\nu \in \mathbb{N}$, сходится к $x_{i_n} + x'$ в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому $x_{i_n} + x' \in u^+$ для всех $n \geqslant n''$. Пусть $n_0 = \max\{n', n''\}$. Тогда $y_{i_n} = (x_{i_n} + x') + (x'_{i_n} - x') \in u^+ + u^+ \subset v^+$ для всех $n \geqslant n_0$, т. е. последовательность $(y_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ почти вся лежит в v^+. Из (14) в силу ограниченности множества чисел α_{kn} следует, что любая подпоследовательность последовательности $(x'_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью, сходящейся в каждом из пространств $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ и $(\widetilde{X}, \Lambda')$ к одному и тому же вектору. Поэтому в силу сделанных выше рассуждений каждая подпоследовательность последовательности $\hat{y}$ обладает подпоследовательностью, которая почти вся лежит в v^+. Но тогда $\hat{y}$ почти вся лежит в v^+. Отсюда следует, что v^+ является окрестностью нуля в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. А это влечет $\widetilde{\Lambda} \leqslant \Lambda'$.

(б) Пусть $\hat{x}$ — последовательность в X, сходящаяся в пространстве $(\widetilde{X}, \Lambda')$ к некоторому $x \in \widetilde{X}$, т. е. $x \in \Lambda'(\hat{x})$. Выберем последовательность $\hat{y}$ в X так, чтобы $x \in \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Тогда $x \in \Lambda'(\hat{y})$ и, значит, $0 \in \Lambda'(\hat{x} - \hat{y})$. Однако $\hat{x} - \hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$ и $(X, \Lambda) \subset (\widetilde{X}, \Lambda')$. Поэтому $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$. Отсюда в силу $\widetilde{\Lambda} \leqslant \Lambda'$ получаем $\Lambda'(\hat{x}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$.

(в) Если Λ — операция однозначного предела, то из б) следует, что Λ' и $\widetilde{\Lambda}$ тоже являются операциями однозначного предела. Но тогда в силу предложения 3.10 $(\widetilde{X}, \Lambda')$ хаусдорфово. Поскольку $\widetilde{\Lambda} \leqslant \Lambda'$, пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ тоже хаусдорфово. ▶

В предложении 3.41 пространство $(\widetilde{X}, \Lambda')$ может не быть полным (см. пример в § 16, n° 9).

Теорема 3.36. *Пусть (X, Λ) — неполное линейное пространство, имеющее фундаментальную систему окрестностей нуля $V_0 = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$, а $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ — пополнение пространства $(X, \Lambda) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. Тогда система $V'_0 = \{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$, где квазизамыкание взято в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, рассматриваемая как система окрестностей нуля в $\widetilde{X}$, определяет такую линейную операцию предела Λ', что пространство $(\widetilde{X}, \Lambda')$ полно и в нем V'_0 является фундаментальной системой окрестностей нуля. При* *этом для пространств* $(\widetilde{X}, \Lambda')$ *и* $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ *справедливы все утверждения предложения 3.41. Кроме того, если в* (X, Λ) *существует ограниченная выпуклая окрестность нуля* w*, то квазизамыкание* w^+ *множества* w *в* $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ *является ограниченной выпуклой окрестностью нуля пространства* $(\widetilde{X}, \Lambda')$.

◀ В силу пределожения 3.12 можно считать, что фундаментальная система окрестностей нуля $V_0 = \{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ пространства (X, Λ) состоит из уравновешенных открытых окрестностей нуля, удовлетворяющих включению $v_{n+1} + v_{n+1} \subset v_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В силу предложения 3.41 система $V_0' = \{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$, где квазизамыкание берется в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$, рассматриваемая как система окрестностей нуля в $\widetilde{X}$, определяет некоторую линейную операцию предела Λ'. С учетом включений $v_{n+1} \subset v_n$, $n \in \mathbb{N}$, легко доказывается, что V_0' является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Ясно, что для $(\widetilde{X}, \Lambda')$ и $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ справедливы все утверждения предложения 3.41. Докажем полноту пространства $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Рассмотрим в пространстве $(\widetilde{X}, \Lambda')$ произвольную фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y^{(n)} : n \in \mathbb{N})$. В силу $\widetilde{\Lambda} \leqslant \Lambda'$ множество X секвенциально всюду плотно в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Поэтому для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность векторов $x_i^{(n)} \in X$, $i \in \mathbb{N}$, сходящаяся к $y^{(n)}$ в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Но тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность векторов $x_i^{(n)} - y^{(n)}$, $i \in \mathbb{N}$, почти вся лежит в каждой окрестности нуля из системы V_0'. Следовательно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $i_n \in \mathbb{N}$, что $x_{i_n}^{(n)} - y^{(n)} \in v_n^+$. В силу $v_{k+1}^+ \subset v_k^+$, $k \in \mathbb{N}$, последовательность $\hat{x} = (x_{i_n}^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в $(\widetilde{X}, \Lambda')$, так как последовательность $\hat{y}$ фундаментальна в этом пространстве. В силу $(X, \Lambda) \subset (\widetilde{X}, \Lambda')$ последовательность $\hat{x}$ фундаментальна в (X, Λ), а значит, и в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. Поскольку $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ полно, $\hat{x}$ сходится в нем, а значит, и в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Из $0 \in \Lambda'(\hat{x} - \hat{y})$ следует, что $\hat{y}$ тоже сходится в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Значит, $(\widetilde{X}, \Lambda')$ полно.

Пусть в (X, Λ) существует ограниченная выпуклая окрестность нуля w. Рассмотрим квазизамыкание w^+ множества w в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. В силу утверждения б) предложения 3.41 w^+ является также квазизамыканием множества w в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. При этом w^+

является окрестностью нуля в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. Согласно утверждению д) теоремы 3.13, w^+ выпукло. Поскольку $(\widetilde{X}, \Lambda')$ удовлетворяет условиям теоремы 3.18, w^+ ограничено. Тем самым w^+ является ограниченной выпуклой окрестностью нуля в $(\widetilde{X}, \Lambda')$. ▶

Теорема 3.37. *Пусть $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ и $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$ — квазипополнения линейных пространств $(X, \Lambda) \subset (\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ и $(X', \Lambda') \subset (\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$ соответственно, а $f : X \to X'$ — секвенциально непрерывное линейное отображение. Тогда существует секвенциально непрерывное линейное отображение $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$, удовлетворяющее равенству $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, причем если Λ' является операцией однозначного предела, то такое отображение $\widetilde{f}$ единственно. Кроме того, если f является изоморфизмом (X, Λ) на (X', Λ'), то всякое его секвенциально непрерывное линейное продолжение $\widetilde{f}$ на $\widetilde{X}$ является изоморфизмом $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ на $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$.*

◀ Пусть $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus X$, а E — базис Гамеля в $\widetilde{X}_1$. Для каждого $e \in E$ существует последовательность $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ в X, сходящаяся к e в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$. Очевидно, последовательность $\hat{\xi}$ фундаментальна и ограничена в (X, Λ). Поэтому в силу секвенциальной непрерывности f последовательность $\hat{\eta} = (f(\xi_n) : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна и ограничена в (X', Λ'). Значит, $\hat{\eta}$ сходится в $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$. Обозначим $M_e = \widetilde{\Lambda}'(\hat{\eta})$. Множество M_e не зависит от выбора последовательности $\hat{\xi}$ в X, сходящейся к e. Выберем некоторое $y_e \in M_e$ и определим линейное отображение $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}'$ следующим образом: произвольное $x \in \widetilde{X}$ представим в виде

$$x = \xi + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k,$$

где $\xi \in X$, $e_k \in E$, а α_k — некоторые числа, и положим

$$\widetilde{f}(x) = f(\xi) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_{e_k}.$$

Очевидно, $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Докажем, что $\widetilde{f}$ секвенциально непрерывно. С учетом предложения 3.1 достаточно доказать секвенциальную непрерывность $\widetilde{f}$ в нуле. Рассмотрим в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ произвольную сходящуюся к нулю последовательность

$\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$. Обозначим $z_n=\widetilde{f}(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, и рассмотрим также последовательность $\hat{z}=(z_n : n\in\mathbb{N})$ в $\widetilde{X}'$. В силу предложения 3.40 имеем

$$x_n = \xi_n + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{15}$$

где $\xi_n\in X$, $e_k\in E$, m — независящее от n натуральное число, а α_{kn} — числа, множество которых ограничено. Очевидно,

$$z_n = f(\xi_n) + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} y_{e_k}, \quad n\in\mathbb{N}. \tag{16}$$

Если последовательность натуральных чисел $i_1<i_2<\ldots$ такая, что для каждого $k\leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n\in\mathbb{N}$, сходится к некоторому α_k, то в (15) последовательность $(\xi_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ сходится в $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ к $-\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k e_k$. Но тогда в (16) в силу выбора y_e, $e\in E$, и линейности f последовательность $(f(\xi_{i_n}) : n\in\mathbb{N})$ сходится в $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$ к $-\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k y_{e_k}$. Следовательно, $(z_{i_n} : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю в $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$. Отсюда в силу ограниченности множества чисел α_{kn} следует, что любая подпоследовательность последовательности $\hat{z}$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к нулю в $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$. Поэтому $\hat{z}$ сходится к нулю в $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$. А это означает, что отображение $\widetilde{f}$ секвенциально непрерывно в нуле.

В случае, когда Λ', а значит, и $\widetilde{\Lambda}'$ являются операциями однозначного предела, при построении отображения $\widetilde{f}$ для каждого $e\in E$ вектор y_e определяется однозначно. Более того, построенное отображение $\widetilde{f}$ не зависит от выбора $\widetilde{X}_1$ и E. Следовательно, в указанном случае требуемое отображение $\widetilde{f}$ единственно.

Докажем, что если отображение f является изоморфизмом (X, Λ) на (X', Λ'), то всякое его секвенциально непрерывное линейное продолжение $\widetilde{f}$ на $\widetilde{X}$ является изоморфизмом $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ на $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$.

Пусть $\widetilde{f}(x)=0$ для некоторого $x\in\widetilde{X}$. Выберем сходящуюся к x последовательность $\hat{x}=(x_n : n\in\mathbb{N})$ в X. В силу секвенциальной непрерывности $\widetilde{f}$ последовательность $(f(x_n) : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю. Так как f является изоморфизмом, то $\hat{x}$ сходится к нулю и, значит, $x \in X$. Поэтому $x = f^{-1}(0) = 0$. Отсюда вытекает, что линейное отображение $\widetilde{f}$ взаимно однозначное.

Пусть $y \in \widetilde{X}' \backslash X'$. Выберем сходящуюся к y последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в X'. Положим $x_n = f^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к некоторому $x \in \widetilde{X} \backslash X$. Поэтому $y \in \widetilde{f}(x) + \Lambda'(\dot{0})$. Обозначим $\eta = y - \widetilde{f}(x)$ и $z = f^{-1}(\eta)$. Очевидно, что $\widetilde{f}(x+z) = \widetilde{f}(x) + \widetilde{f}(z) = \widetilde{f}(x) + \eta = y$. Значит, $\widetilde{f}$ отображает $\widetilde{X}$ на $\widetilde{X}'$. Тем самым отображение $\widetilde{f}$ биективное.

Остается доказать, что обратное отображение $\widetilde{f}^{-1}$ секвенциально непрерывно. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность $(y_n : n \in \mathbb{N})$ в $\widetilde{X}'$. Положим $x_n = \widetilde{f}^{-1}(y_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Нужно доказать, что последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. С этой целью рассмотрим некоторые $\widetilde{X}_1' = \widetilde{X}' \ominus X'$ и базис Гамеля E' в $\widetilde{X}_1'$. Векторы y_n представим в виде

$$y_n = y_n' + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} e_k', \quad n \in \mathbb{N},$$

где $y_n' \in X'$, $e_k' \in E'$, $m \in \mathbb{N}$, а α_{kn} — некоторые числа. В силу утверждения а) предложения 3.40 число m не зависит от n, а множество чисел α_{kn} ограничено, причем если последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \ldots$ такая, что для каждого $k \leqslant m$ последовательность чисел α_{ki_n}, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторому α_k, то последовательность векторов y_{i_n}', $n \in \mathbb{N}$, сходится к $-\sum_{k=1}^{m} \alpha_k e_k'$. Очевидно,

$$x_{i_n} = f^{-1}(y_{i_n}') + \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki_n} \widetilde{f}^{-1}(e_k'), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Последовательность векторов $\sum_{k=1}^{m} \alpha_{ki_n} \widetilde{f}^{-1}(e_k')$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \widetilde{f}^{-1}(e_k')$, а последовательность векторов $f^{-1}(y_{i_n}')$, $n \in \mathbb{N}$, будучи фундаментальной, сходится к некоторому $\xi \in \widetilde{X}$. Но тогда $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к $x = \xi + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \widetilde{f}^{-1}(e_k')$. Из секвенциальной непрерывности $\widetilde{f}$ следует, что $\widetilde{f}(x) \in \Lambda'(\dot{0})$. Поэтому $x \in X$

и, значит, $f(x) \in \Lambda'(\dot{0})$. Так как f является изоморфизмом, то $x \in \Lambda(\dot{0})$. А это означает, что $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Таким образом, каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает сходящейся к нулю подпоследовательностью. Но тогда $\hat{x}$ сходится к нулю и, следовательно, линейное отображение $\widetilde{f}^{-1}$ секвенциально непрерывно. Тем самым $\widetilde{f}$ является изоморфизмом $(\widetilde{X}, \widetilde{\Lambda})$ на $(\widetilde{X}', \widetilde{\Lambda}')$. ►

В связи с теоремой 3.37 отметим, что секвенциально непрерывный линейный функционал, определенный на незамкнутом векторном подпространстве Y линейного пространства с операцией однозначного предела (X, λ), может не допускать секвенциально непрерывного продолжения на квазизамыкание Y^+ (см. пример в § 16, n° 9). Однако справедлива

Теорема 3.38. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, имеющие полные системы окрестностей нуля* U_0 *и* $\widetilde{U}_0$ *соответственно, причем* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *полно и система окрестностей нуля* $\widetilde{V}_0 = \{\widetilde{u}_0 + \widetilde{u}_0 : \widetilde{u}_0 \in \widetilde{U}_0\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$*, а для каждого* $u_0 \in U_0$ *существует такое* $v_0 \in U_0$*, что* $v_0 + v_0 \subset u_0$*. Пусть, кроме того,* $G \subset X$*, а* $f : G \to Y$ *— секвенциально равномерно непрерывное отображение. Тогда существует секвенциально равномерно непрерывное отображение* $\varphi : \overline{G} \to Y$*, удовлетворяющее равенству* $\varphi(x) = f(x)$ *для всех* $x \in G$*, и если* $\widetilde{\Lambda}$ *является операцией однозначного предела, то такое отображение* φ *единственно. При этом*

а) если отображение f *линейно (вещественно линейно), то отображение* φ *может быть выбрано линейным (вещественно линейным);*

б) если отображение f *положительно однородно, вещественно однородно или однородно, то отображение* φ *может быть выбрано соответственно положительно однородным, вещественно однородным или однородным;*

в) если отображение f *аддитивно, а* $\alpha G \subset G$ *для любого рационального числа* α*, то отображение* φ *может быть выбрано аддитивным;*

г) если отображение f *аддитивно, а* $\widetilde{\Lambda}$ *является операцией однозначного предела, то отображение* φ *аддитивно.*

◄ Пусть $x \in \overline{G} \backslash G$. В силу утверждения е) предложения 3.11 (X, Λ) является пространством Фреше–Урысона. Следовательно, $\overline{G} = G^+$ и существует сходящаяся к x последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в G. Из фундаментальности $\hat{x}$ и секвенциально равномерной непрерывности f следует, что последовательность $\hat{y}=(f(x_n):n\in\mathbb{N})$ фундаментальна в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. Так как $(Y,\widetilde{\Lambda})$ полно, то $\hat{y}$ сходится. Обозначим $M_x=\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$. Легко убедиться, что M_x не зависит от выбора сходящейся к x последовательности $\hat{x}\in G^{\mathbb{N}}$. Выберем некоторое $y_x\in M_x$ и определим отображение $\varphi:\overline{G}\to Y$ следующим образом: $\varphi(x)=f(x)$ при $x\in G$ и $\varphi(x)=y_x$ при $x\in\overline{G}\backslash G$. Докажем, что отображение φ секвенциально равномерно непрерывно. Рассмотрим произвольную пару последовательностей $\hat{\xi}=(\xi_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\xi}'=(\xi'_n:n\in\mathbb{N})$ в $\overline{G}$, удовлетворяющую условию $0\in\Lambda(\hat{\xi}-\hat{\xi}')$. Обозначим $\eta_n=\varphi(\xi_n)$, $\eta'_n=\varphi(\xi'_n)$ и рассмотрим также последовательности $\hat{\eta}=(\eta_n:n\in\mathbb{N})$, $\hat{\eta}'=$ $=(\eta'_n:n\in\mathbb{N})$ в Y. Покажем, что $0\in\widetilde{\Lambda}(\hat{\eta}-\hat{\eta}')$. С этой целью для каждого $n\in\mathbb{N}$ выберем последовательности $\hat{x}_n=(x_{ni}:i\in\mathbb{N})$, $\hat{x}'_n=(x'_{ni}:i\in\mathbb{N})$ в G так, чтобы $0\in\Lambda(\hat{x}_n-\dot{\xi}_n)$ и $0\in\Lambda(\hat{x}'_n-\dot{\xi}'_n)$. Положим $y_{ni}=f(x_{ni})$, $y'_{ni}=f(x'_{ni})$ и рассмотрим последовательности $\hat{y}_n=(y_{ni}:i\in\mathbb{N})$, $\hat{y}'_n=(y'_{ni}:i\in\mathbb{N})$ в Y. Согласно построению отображения φ, для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем $0\in\widetilde{\Lambda}(\hat{y}_n-\dot{\eta}_n)$ и $0\in\widetilde{\Lambda}(\hat{y}'_n-\dot{\eta}'_n)$. Пусть $\widetilde{v}_0\in\widetilde{V}_0$. Выберем уравновешенную окрестность нуля $\widetilde{u}_0\in\widetilde{U}_0$ так, чтобы $\widetilde{u}_0+\widetilde{u}_0\subset\widetilde{v}_0$. В силу секвенциально равномерной непрерывности f для $\widetilde{u}_0$ существует такая окрестность нуля $u_0\in U_0$, что $f(x)-f(x')\in\widetilde{u}_0$ для всех x и x' из G, удовлетворяющих условию $x-x'\in u_0$. Выберем уравновешенную окрестность нуля $v_0\in U_0$ так, чтобы $v_0+v_0\subset u_0$. Очевидно, существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $\xi_n-\xi'_n\in v_0$ для всех $n\geqslant m$. Кроме того, для каждого $n\in\mathbb{N}$ существует такое $i_n\in\mathbb{N}$, что $(x_{ni}-x'_{ni})-(\xi_n-\xi'_n)\in v_0$ и $(y_{ni}-y'_{ni})-(\eta_n-\eta'_n)\in\widetilde{u}_0$ для всех $i\geqslant i_n$. Отсюда следует, что $x_{ni}-x'_{ni}\in v_0+v_0\subset u_0$ при $n\geqslant m$ и $i\geqslant i_n$. Поэтому $y_{ni}-y'_{ni}\in\widetilde{u}_0$ при $n\geqslant m$ и $i\geqslant i_n$. Но тогда $\eta_n-\eta'_n\in\widetilde{u}_0+\widetilde{u}_0\subset\widetilde{v}_0$ для всех $n\geqslant m$ и, значит, $0\in\widetilde{\Lambda}(\hat{\eta}-\hat{\eta}')$. Утверждение о единственности φ очевидно.

(а) Пусть отображение f линейно (вещественно линейно). Тогда G является векторным (вещественным векторным) подпространством в X. В силу утверждения г) теоремы 3.13 замыкание $\overline{G}$ тоже является векторным (вещественным векторным) подпространством. Выберем некоторые $G_1=\overline{G}\ominus G$ и базис (вещественный базис) Гамеля H в G_1. Для каждого $x\in\overline{G}\backslash G$ рассмотрим указанные выше подмножество $M_x\subset Y$ и вектор $y_x\in M_x$. Вектор x единственным образом представляется в виде $x = \xi + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, где $\xi \in G$, $m \in \mathbb{N}$, $e_i \in H$, а α_i — число (вещественное число). Отображение $\varphi : \overline{G} \to Y$ определим следующим образом: $\varphi(\xi) = f(\xi)$ при $\xi \in G$ и $\varphi(x) = f(\xi) + \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_{e_i}$ при $x \in \overline{G} \backslash G$. Очевидно, отображение φ линейно (вещественно линейно). Однако $\varphi(x) \in M_x$ для каждого $x \in \overline{G} \backslash G$. Поэтому φ секвенциально равномерно непрерывно.

(б) Пусть отображение f положительно однородно. Тогда $rG = G$ для всех чисел $r > 0$. В силу утверждения б) теоремы 3.13 $r\overline{G} = \overline{G}$ для всех $r > 0$. Ясно, что $0 \in \overline{G}$, причем если $0 \in G$, то $f(0) = 0$. Подмножество $E \subset \overline{G} \backslash (G \cup \{0\})$ выберем так, чтобы $\overline{G} \backslash (G \cup \{0\}) = \bigcup\limits_{r>0} rE$ и $E \cap (rE) = \varnothing$ для всех $r > 0$, $r \neq 1$. Для каждого $x \in \overline{G} \backslash G$ рассмотрим опять подмножество $M_x \subset Y$ и вектор $y_x \in M_x$. Отображение $\varphi : \overline{G} \to Y$ определим следующим образом: $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) = f(x)$ при $x \in G$, $\varphi(rx) = ry_x$ при $x \in E$ для всех $r > 0$. Очевидно, отображение φ положительно однородно. Однако $ry_x \in M_{rx}$ для всех $x \in E$ и $r > 0$. Поэтому φ секвенциально равномерно непрерывно.

В случае, когда f однородно (вещественно однородно), доказательство проводится аналогично.

(в) Пусть отображение f аддитивно, а $\alpha G \subset G$ для любого рационального α. Так как в рассматриваемом случае $G + G \subset G$, то $\alpha G + \beta G \subset G$ для любых рациональных α и β. В силу утверждений а) и б) теоремы 3.13 $\overline{G}$ является вещественным векторным подпространством в X. Ясно, что G и $\overline{G}$ могут быть рассмотрены как векторные пространства над полем рациональных чисел (для таких пространств тоже можно ввести понятия векторного подпространства, прямой суммы векторных подпространств, алгебраического дополнения векторного подпространства, линейной зависимости и линейной независимости системы векторов, линейной оболочки системы векторов, базиса Гамеля и др.). Учитывая это, а также однородность аддитивного отображения f относительно умножения на рациональное число, доказательство можно завершить повторением рассуждений, сделанных в доказательстве утверждения а).

(г) В рассматриваемом случае отображение φ определяется однозначно, а $G + G \subset G$ и, значит, $\overline{G} + \overline{G} \subset \overline{G}$. Поэтому аддитивность φ непосредственно следует из его построения. ►

§ 11. Группы, кольца и алгебры с операцией предела последовательности

1. Некоторые обозначения и определения, принятые для векторных пространств, будем использовать также для групп.

Определение 3.16. *Пространство (X, Λ) называется группой с операцией предела последвательности (короче — группой с операцией предела), а Λ называется групповой операцией предела последовательности (короче — групповой операцией предела), если*

1) X — группа (для удобства аддитивная, но не обязательно коммутативная);

2) $-\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(-\hat{x})$ для любой сходящейся последовательности $\hat{x}$ в (X, Λ);

3) $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ в (X, Λ).

С группой с операцией предела (X, Λ) связываются отношения секвенциальной равномерности R, R_1 и R_2 в $X^{\mathbb{N}}$, где R_1 и R_2 — множества таких $(\hat{x}, \hat{y}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$ и $0 \in \Lambda(-\hat{x} + \hat{y})$ соответственно, а $R = R_1 \cap R_2$. Каждое из отношений R, R_1 и R_2 определяет в X операцию предела Λ, причем R_1 называется правым, а R_2 — левым отношением секвенциальной равномерности, ассоциированным с (X, Λ). Если группа X коммутативна, то $R = R_1 = R_2$. Таким образом, всякая группа с операцией предела является секвенциально равномерным, а значит, и топологическим пространством.

Теорема 3.39. *В группе с операцией предела (X, Λ)*

а) $\Lambda(\dot{0})$ является замкнутой нормальной подгруппой, а каждая окрестность элемента из $\Lambda(\dot{0})$ является окрестностью для $\Lambda(\dot{0})$, причем пересечение всех окрестностей нуля совпадает с $\Lambda(\dot{0})$;

б) для любой сходящейся последовательности $\hat{x}$ в (X, Λ) и любого $x \in \Lambda(\hat{x})$ имеют место равенства $\Lambda(\hat{x}) = x + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0}) + x$, причем $\Lambda(\hat{x})$ замкнуто, а для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ множества $\Lambda(\hat{x})$ и $\Lambda(\hat{y})$ либо не пересекаются, либо совпадают;

в) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ — сходящаяся последовательность, $\hat{x}' \prec \hat{x}$, $\hat{z}$ — последовательность в $\Lambda(\hat{x})$, а $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность элементов $\xi_n \in \Lambda(\dot{x}_n)$, то $\Lambda(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x}') = \Lambda(\hat{z}) = \Lambda(\hat{\xi})$;

г) если последовательность $\hat{x}$ либо сходится, либо не обладает сходящейся подпоследовательностью, то $\overline{[\hat{x}]} = [\hat{x}]^+ = \Lambda(\hat{x}) \cup ([\hat{x}] + \Lambda(\dot{0}))$, причем в первом случае замыкание $\overline{[\hat{x}]}$ окрестностно компактно;

д) всякое секвенциально компактное подмножество M в X секвенциально относительно компактно и $\overline{M} = M^+ = M + \Lambda(\dot{0})$, а, следовательно, каждая последовательность $\hat{x} \in \overline{M}^{\mathbb{N}}$ обладает подпоследовательностью, имеющей предел в M, и для $\hat{x}$ существует такое $\hat{y} \in M^{\mathbb{N}}$, что $\Lambda(\hat{x} - \hat{y}) = \Lambda(-\hat{x} + \hat{y}) = \Lambda(\dot{0})$;

е) если подмножество $H \subset X$ открыто или замкнуто, то $H = H + \Lambda(\dot{0})$;

ж) $\Lambda(-\hat{x}) = -\Lambda(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$;

з) $\Lambda(\hat{x} + \hat{y}) = \Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y})$ для любых $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ и $\hat{y} \in X^{\mathbb{N}}$, таких, что $\Lambda(\hat{x}) \cup \Lambda(\hat{y}) \neq \varnothing$. ►

Пусть (X, Λ) — группа с операцией предела; $\varPhi = X/\Lambda(\dot{0})$ — фактор-группа группы X по нормальной подгруппе $\Lambda(\dot{0})$; $\hat{\varPhi} \subset \varPhi^{\mathbb{N}}$ — подмножество всех таких последовательностей $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ элементов $\varphi_n = x_n + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{x}_n) \in \varPhi$, что последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ элементов $x_n \in X$ сходится в (X, Λ); $\widetilde{\lambda} : \hat{\varPhi} \to \varPhi$ — отображение, определенное равенством $\widetilde{\lambda}(\hat{\varphi}) = \Lambda(\hat{x})$ для всех $\hat{\varphi} \in \hat{\varPhi}$. Тогда $\widetilde{\lambda}$ определено корректно и является операцией однозначного предела в $\varPhi$, причем пространство $(\varPhi, \widetilde{\lambda})$ является группой с операцией предела и называется фактор-группой группы с операцией предела (X, Λ) по нормальной подгруппе $\Lambda(\dot{0})$. Если (X, R) и $(\varPhi, \widetilde{R})$ — пространства с секвенциальной равномерностью, ассоциированные с (X, Λ) и $(\varPhi, \widetilde{\lambda})$ соответственно, то $(\varPhi, \widetilde{R})$ является фактор-пространством пространства (X, R), а фактор-отображение $\pi : X \to \varPhi$, сопоставляющее каждому $x \in X$ элемент $\varphi = x + \Lambda(\dot{0}) = \Lambda(\dot{x})$ из $\varPhi$, открыто, $(\Lambda, \widetilde{\lambda})$-секвенциально непрерывно, $(R, \widetilde{R})$-секвенциально равномерно непрерывно и удовлетворяет равенству $\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$ для всех x и y из X.

Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, являющееся групповой операцией предела в группе X, вполне определяется заданием множества $\hat{X}_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(\dot{0}))$, называемого ядром групповой операции предела Λ и состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей в (X, Λ).

Если $(S_x : x \in X)$ — структура сходимости в группе X, соответствующая групповой операции предела Λ, то S_0 является ядром для Λ, причем $S_x = \dot{x} + S_0 = S_0 + \dot{x}$ для всех $x \in X$.

Теорема 3.40. *Подмножество $\hat{X}_0 \subset X^{\mathbb{N}}$ является ядром групповой операции предела в группе X тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $\hat{X}_0$ — подгруппа группы $X^{\mathbb{N}}$;

2) если $\hat{x} \in \hat{X}_0$ и $\hat{x}' \prec \hat{x}$, то $\hat{x}' \in \hat{X}_0$;

3) $\dot{x} + \hat{\xi} - \dot{x} \in \hat{X}_0$ для любых $x \in X$ и $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$;

4) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{X}_0$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$;

5) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что $\dot{x}_n \in \hat{X}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$.

При этом $\hat{X}_0$ является ядром групповой операции однозначного предела в группе X тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям 1)—4) и не содержит отличной от $\dot{0}$ стационарной последовательности. ▶

Если U_0 — полная система окрестностей нуля группы с операцией предела (X, Λ), то для каждого $x \in X$ система $U_x = \{x + u : u \in U_0\}$ является полной системой окрестностей точки x, причем $U_x = \{u + x : u \in U_0\} = \{(x + u) \cap (u + x) : u \in U_0\}$. Кроме того, секвенциальная топология группы с операцией предела инвариантна относительно сдвигов.

Будем говорить, что группа с операцией предела (X, Λ) изоморфна группе с операцией предела (X', Λ'), если найдется секвенциально непрерывное биективное отображение $f : X \to X'$, удовлетворяющее равенству $f(x + y) = f(x) + f(y)$ для всех x и y из X и имеющее секвенциально непрерывное обратное отображение f^{-1}. При этом f называется изоморфизмом (X, Λ) на (X', Λ').

В группе (X, Λ) последовательность $\hat{x}$ называется фундаментальной, если $\Lambda(\hat{x} - \hat{x}') = \Lambda(-\hat{x} + \hat{x}') = \Lambda(\dot{0})$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Группа с операцией предела называется полной, если в ней любая фундаментальная последовательность сходится.

Очевидно, что если в некоммутативной группе с операцией предела (X, Λ) существуют фундаментальная последовательность $\hat{x}$ и сходящаяся к нулю последовательность $\hat{\xi}$, такие, что

$0 \notin \Lambda(\hat{x} + \hat{\xi} - \hat{x})$, то (X, Λ) не может служить подгруппой с операцией предела для полной группы с операцией предела.

Пусть X — коммутативная группа, а X_0 — ее подгруппа. Тогда существует подмножество $X_1 \subset X$ (вообще говоря, неединственное), содержащее нуль и такое, что каждое $x \in X$ единственным образом представляется в виде $x = x^0 + x'$, где $x^0 \in X_0$ и $x' \in X_1$. При этом с целью сохранения аналогии с векторными пространствами для X_1 удобно использовать обозначение $X_1 = X \ominus X_0$.

Определение 3.17. *Пополнением коммутативной группы с операцией однозначного предела* (X, λ) *называется всякая полная коммутативная группа с операцией однозначного предела* $(\widetilde{X}, \widetilde{\lambda})$, *удовлетворяющая условиям*

1) $(\widetilde{X}, \widetilde{\lambda})$ *содержит секвенциально всюду плотную подгруппу с операцией предела* $(\widetilde{X}_0, \widetilde{\lambda}_0)$, *изоморфную* (X, λ);

2) ограничение $\widetilde{\lambda}_1$ *операции предела* $\widetilde{\lambda}$ *на некотором* $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X} \ominus \widetilde{X}_0$ *является сильнейшей операцией предела;*

3) в $(\widetilde{X}, \widetilde{\lambda})$ *для каждой сходящейся к нулю последовательности* $(y_n : n \in \mathbb{N})$ *в представлениях* $y_n = y_n^0 + y_n'$, $n \in \mathbb{N}$, *где* $y_n^0 \in \widetilde{X}_0$ *и* $y_n' \in \widetilde{X}_1$, *множество* $\{y_n' : n \in \mathbb{N}\}$ *конечно.*

Теорема 3.41. *Всякая неполная коммутативная группа с операцией однозначного предела допускает пополнение, причем любые два ее пополнения изоморфны.* ▶

2. Пусть X — кольцо (ассоциативное). Для подмножеств M и G кольца X обозначим через MG множество всех произведений xy, где $x \in M$ и $y \in G$. Произведение $\hat{x}\hat{y}$ последовательностей $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ в кольце X определим равенством $\hat{x}\hat{y} = (x_n y_n : n \in \mathbb{N})$. Очевидно, множество $X^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей в кольце X тоже является кольцом.

Определение 3.18. *Пространство* (X, Λ) *называется кольцом с операцией предела последовательности (короче — кольцом с операцией предела), а* Λ *называется кольцевой операцией предела последовательности (короче — кольцевой операцией предела), если*

1) X *— кольцо;*

2) $-\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(-\hat{x})$ *для любой сходящейся последовательности* $\hat{x}$ *в* (X, Λ);

3) $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ *и* $\Lambda(\hat{x})\Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x}\hat{y})$ *для любых сходящихся последовательностей* $\hat{x}$ *и* $\hat{y}$ *в* (X, Λ).

Кольцо с операцией предела является коммутативной аддитивной группой с операцией предела.

В кольце с операцией предела (X, Λ) множество $\Lambda(\dot{0})$ является замкнутым двусторонним идеалом, а для любых сходящихся последовательностей $\hat{x}$, $\hat{y}$ и любых $x \in \Lambda(\hat{x})$, $y \in \Lambda(\hat{y})$ имеют место равенства $\Lambda(\hat{x}\hat{y}) = \Lambda(\hat{x})\Lambda(\hat{y}) = xy + \Lambda(\dot{0})$.

Фактор-пространство $(\varPhi, \widetilde{\lambda})$ кольца с операцией предела (X, Λ) по идеалу $\Lambda(\dot{0})$ является кольцом с операцией однозначного предела.

Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, являющееся кольцевой операцией предела в кольце X, вполне определяется заданием множества $\hat{X}_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(\dot{0}))$, называемого ядром кольцевой операции предела Λ и состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей в (X, Λ).

Теорема 3.42. *Подмножество $\hat{X}_0 \subset X^{\mathbb{N}}$ является ядром кольцевой операции предела в кольце X тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $\hat{X}_0$ — подкольцо кольца $X^{\mathbb{N}}$;

2) если $\hat{x} \in \hat{X}_0$ и $\hat{x}' \prec \hat{x}$, то $\hat{x}' \in \hat{X}_0$;

3) $\dot{x}\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ и $\hat{\xi}\dot{x} \in \hat{X}_0$ для любых $x \in X$ и $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$;

4) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{X}_0$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$;

5) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что $\dot{x}_n \in \hat{X}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$.

При этом $\hat{X}_0$ является ядром кольцевой операции однозначного предела в кольце X тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям 1)—4) и не содержит отличной от $\dot{0}$ стационарной последовательности. ▶

Определение 3.19. *В кольце с операцией предела (X, Λ) множество M называется мультипликативно ограниченным, если $0 \in \Lambda(\hat{x}\hat{\xi})$ и $0 \in \Lambda(\hat{\xi}\hat{x})$ для любой последовательности $\hat{x}$ в M и любой сходящейся к нулю последовательности $\hat{\xi}$ в (X, Λ).*

С кольцом (X, Λ) связывается отношение секвенциальной равномерности R в $X^{\mathbb{N}}$, состоящее из таких $(\hat{x}, \hat{y}) \in X^{\mathbb{N}} \times X^{\mathbb{N}}$, что $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{y})$. Оно определяет в X операцию предела Λ.

При помощи каждого элемента ξ кольца (X, Λ) определим отображения $B'_\xi : X \to X$ и $B''_\xi : X \to X$, положив соответственно $B'_\xi(x) = x\xi$ и $B''_\xi(x) = \xi x$ для всех $x \in X$. Рассмотрим системы отображений $\mathcal{B}' = \{B'_\xi : \xi \in X\}$ и $\mathcal{B}'' = \{B''_\xi : \xi \in X\}$. Легко убедиться, что в кольце с операцией предела (X, Λ), обладающего единицей, мультипликативная ограниченность множества равносильна его $\mathcal{B}'$-ограниченности и $\mathcal{B}''$-ограниченности (см. определение 2.17).

В кольце (X, Λ) последовательность $\hat{x}$ называется фундаментальной, если $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$.

Если в кольце (X, Λ) последовательности $\hat{x}$ и $\hat{y}$ фундаментальны и мультипликативно ограничены, то такова и последовательность $\hat{x}\hat{y}$.

Кольцо (X, Λ) называется полным (квазиполным), если в нем любая фундаментальная (фундаментальная и мультипликативно ограниченная) последовательность сходится.

Очевидно, что если в кольце (X, Λ) существует фундаментальная последовательность, не являющаяся мультипликативно ограниченной, то (X, Λ) не может служить подкольцом для полного кольца с операцией предела, так как сходящаяся последовательность мультипликативно ограничена.

3. Пусть X — алгебра, т. е. X есть векторное пространство в котором определена операция умножения $xy \in X$ произвольных двух векторов x и y из X, удовлетворяющая условиям $x(yz) = (xy)z$, $x(y+z) = xy + xz$, $(y+z)x = yx + zx$ и $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ для любых $z \in X$ и числа α. Ясно, что $X^{\mathbb{N}}$ тоже является алгеброй.

Определение 3.20. *Пространство* (X, Λ) *называется алгеброй с операцией предела последовательности над числовым пространством* $(\mathbb{K}, \lim)$ *(короче — алгеброй с операцией предела), а* Λ *называется алгебраической операцией предела последовательности (короче — алгебраической операцией предела), если*

1) X *— алгебра над полем* $\mathbb{K}$*;*

2) $\alpha\Lambda(\hat{x}) \subset \Lambda(\hat{\alpha}\hat{x})$ *для любых сходящихся последовательностей* $\hat{\alpha}$ *в* $(\mathbb{K}, \lim)$ *и* $\hat{x}$ *в* (X, Λ)*, где* $\alpha = \lim \hat{\alpha}$*;*

3) $\Lambda(\hat{x}) + \Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x} + \hat{y})$ *и* $\Lambda(\hat{x})\Lambda(\hat{y}) \subset \Lambda(\hat{x}\hat{y})$ *для любых сходящихся последовательностей* $\hat{x}$ *и* $\hat{y}$ *в* (X, Λ).

Алгебра с операцией предела (X, Λ) является линейным пространством и кольцом с операцией предела, причем множество $\Lambda(\dot{0})$ является замкнутым двусторонним идеалом алгебры.

Отображение $\Lambda : X^{\mathbb{N}} \to 2^X$, являющееся алгебраической операцией предела в алгебре X, вполне определяется заданием множества $\hat{X}_0 = \Lambda^{-1}(\Lambda(\dot{0}))$, называемого ядром алгебраической операции предела Λ и состоящего из всех сходящихся к нулю последовательностей в (X, Λ).

Из теорем 3.5 и 3.42 вытекает

Теорема 3.43. *Подмножество $\hat{X}_0 \subset X^{\mathbb{N}}$ является ядром алгебраической операции предела в алгебре X тогда и только тогда, когда выполняются условия*

1) $\hat{X}_0$ — подалгебра алгебры $X^{\mathbb{N}}$;

2) если $\hat{x} \in \hat{X}_0$ и $\hat{x}' \prec \hat{x}$, то $\hat{x}' \in \hat{X}_0$;

3) $\hat{\alpha}\dot{x} \in \hat{X}_0$ для любых $x \in X$ и сходящейся к нулю числовой последовательности $\hat{\alpha}$;

4) $\hat{\alpha}\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ для любых $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ и сходящейся числовой последовательности $\hat{\alpha}$;

5) $\dot{x}\hat{\xi} \in \hat{X}_0$ и $\hat{\xi}\dot{x} \in \hat{X}_0$ для любых $x \in X$ и $\hat{\xi} \in \hat{X}_0$;

6) если $\hat{x} \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что для каждого $\hat{x}' \prec \hat{x}$ существует $\hat{x}'' \prec \hat{x}'$ из $\hat{X}_0$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$;

7) если $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in X^{\mathbb{N}}$ такое, что $\dot{x}_n \in \hat{X}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\hat{x} \in \hat{X}_0$.

При этом $\hat{X}_0$ является ядром алгебраической операции однозначного предела в алгебре X тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условиям 1)—6) и не содержит отличной от $\dot{0}$ стационарной последовательности. ►

В алгебре с операцией предела (X, Λ) последовательность $\hat{x}$ называется фундаментальной, если $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$ для любого $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Алгебра с операцией предела называется полной, если в ней любая фундаментальная последовательность сходится.

§ 12. Пространства отображений в линейное пространство

Пусть X и Y — непустые множества, а $\mathcal{F}$ — множество всех отображений X в Y. Если Y является группой (для удобства аддитивной, но не обязательно коммутативной), то $\mathcal{F}$ тоже является группой, в которой сумма $f + g$ отображений f и g из $\mathcal{F}$ определяется равенством $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $x \in X$. Если при этом группа Y коммутативна, то группа $\mathcal{F}$ тоже коммутативна. Если же Y — векторное пространство над числовым полем $\mathbb{K}$, то $\mathcal{F}$ тоже является векторным пространством над $\mathbb{K}$, в котором произведение αf отображения $f \in \mathcal{F}$ на число $\alpha \in \mathbb{K}$ определяется равенством $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $x \in X$ (произведение αf может быть определено также равенством $(\alpha f)(x) = \overline{\alpha} f(x)$).

Замечание 3.11. Введенные в § 10 главы II понятия и связанные с ними утверждения для пространств с секвенциальной равномерностью могут быть распространены на группы с операцией предела, причем эти понятия и утверждения могут быть сформулированы в терминах операций предела (вместо отношений секвенциальной равномерности) и окрестностей нуля (вместо окружений). Для отображений в коммутативную группу с операцией предела некоторые из этих утверждений могут быть усилены. Это относится к тем утверждениям (за исключением теорем 2.39, 2.48 и 2.49), в которых предполагается, что полная система окружений $\widetilde{U}$ или полная система открытых окружений $\widetilde{W}$ пространства с секвенциальной равномерностью $(Y, \widetilde{R})$ такая, что система окружений $\{\mathrm{u}^3 : \mathrm{u} \in \widetilde{U}\}$ или $\{\mathrm{w}^3 : \mathrm{w} \in \widetilde{W}\}$ определяет отношение секвенциальной равномерности $\widetilde{R}$. В случае коммутативной группы с операцией предела $(Y, \widetilde{\Lambda})$, имеющей полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$ и полную систему открытых окрестностей нуля $\widetilde{W}_0$, указанные утверждения могут быть доказаны соответственно в предположении, что система окрестностей нуля $\{u + u : u \in \widetilde{U}_0\}$ или $\{w + w : w \in \widetilde{W}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$ (подобное усиление допускает также теорема 2.28 в § 9 главы II). Для предкомпактной системы F отображений в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ утверждения теорем 2.39, 2.48 и 2.49 верны также при указанном условии на $\widetilde{U}_0$. Доказательство сказанного основывается на использовании секвенциальной непрерывности операции сложения и секвенциальной непрерывности симметрии группы. Отметим, что такое усиление теоремы 2.24 уже было сделано в теореме 3.38.

Сформулируем для линейных пространств определения 2.19, 2.20, 2.21 и теоремы 2.37, 2.44, 2.54.

Определение 3.21. *Пусть X — непустое множество, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство. Будем говорить, что последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ отображений X в Y сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на $M \subset X$, а f является равномерным пределом последовательности $\hat{f}$ на M, если для любой последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в M последовательность $(f_n(x_n) - f(x_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Если $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом множестве из некоторой системы $\mathfrak{S}$ подмножеств множества X, то будем говорить,* *что* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на системе* $\mathfrak{S}$*, а* f *является* $\mathfrak{S}$*-равномерным пределом последовательности* $\hat{f}$*.*

Определение 3.22. *Пусть* (X, Λ) *— пространство с операцией предела, а* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство. Система* F *отображений* $G \subset X$ *в* Y *называется равностепенно секвенциально непрерывной в точке* $x_0 \in G$*, если для любой сходящейся к* x_0 *последовательности* $(x_n : n \in \mathbb{N})$ *в* G *и любой последовательности отображений* $f_n \in F$*,* $n \in \mathbb{N}$*, последовательность* $(f_n(x_n) - f_n(x_0) : n \in \mathbb{N})$ *сходится к нулю в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$*. Если* F *равностепенно секвенциально непрерывна в каждой точке подмножества* $G' \subset G$*, то она называется равностепенно секвенциально непрерывной на* G'*, причем в случае* $G' = G$ *она просто называется равностепенно секвенциально непрерывной.*

Определение 3.23. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства. Система* F *отображений* $G \subset X$ *в* Y *называется равностепенно секвенциально равномерно непрерывной на* $G' \subset G$*, если для любых последовательностей* $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N}) \in G^{\mathbb{N}}$*, и* $\hat{x}' = (x'_n : n \in \mathbb{N}) \in G'^{\mathbb{N}}$*, таких, что* $0 \in \Lambda(\hat{x} - \hat{x}')$*, и любой последовательности отображений* $f_n \in F$*,* $n \in \mathbb{N}$*, последовательность* $(f_n(x_n) - f_n(x'_n) : n \in \mathbb{N})$ *сходится к нулю в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *(в случае* $G' = G$ *она просто называется равностепенно секвенциально равномерно непрерывной).*

Теорема 3.44. *Пусть* (X, Λ) *— пространство с операцией предела,* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, а* $\hat{f}$ *— равностепенно секвенциально непрерывная последовательность отображений* X *в* Y*, сходящаяся поточечно на* X *к отображению* $f : X \to Y$*. Если* f *секвенциально непрерывно, то* $\hat{f}$ *сходится к* f *равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в* X*, а если полная система окрестностей нуля* $\widetilde{U}_0$ *пространства* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *такая, что система окрестностей нуля* $\{u + u : \ u \in \widetilde{U}_0\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$*, то* f *секвенциально непрерывно.* ▶

Теорема 3.45. *Пусть* (X, Λ) *— сепарабельное пространство с операцией предела,* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, имеющее такую полную систему окрестностей нуля* $\widetilde{U}_0$*, что система окрестностей нуля* $\{u + u : u \in \widetilde{U}_0\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$*,* $\mathcal{C}$ *— множество всех секвенциально непрерывных отображений* X *в* Y*,* $\mathfrak{S}$ *— система всех секвенциально квазикомпактных подмножеств в* X*, а* $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ *— опера-*

ция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{C}$. Тогда для предкомпактности (секвенциальной квазикомпактности) подмножества $F \subset \mathcal{C}$ в линейном пространстве $(\mathcal{C},\, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ необходимо и достаточно выполнение условий

1) для каждого $x \in X$ множество $\{f(x) : f \in F\}$ предкомпактно (секвенциально квазикомпактно) в $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$;

2) F равностепенно секвенциально непрерывно. ▶

Теорема 3.46. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ и $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, причем $(X,\, \Lambda)$ сепарабельно, а $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ имеет такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u + u : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, $\mathfrak{S}$ — система всех вполне ограниченных подмножеств в X, $\mathfrak{C}_S$ — множество всех отображений X в Y, секвенциально равномерно непрерывных на каждом множестве из $\mathfrak{S}$, $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathfrak{C}_S$. Тогда для предкомпактности (секвенциальной квазикомпактности) подмножества $F \subset \mathfrak{C}_S$ в линейном пространстве $(\mathfrak{C}_S,\, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ необходимо и достаточно выполнение условий*

1) для каждого $x \in X$ множество $\{f(x) : f \in F\}$ предкомпактно (секвенциально квазикомпактно) в $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$;

2) F равностепенно секвенциально равномерно непрерывно на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. ▶

Отметим, что в теоремах 3.45 и 3.46 линейность операции предела $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ можно доказать с использованием теоремы 1.69 и предложений 2.28, 3.21.

Пусть X — непустое множество; $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — группа с операцией предела; $\mathcal{F} = Y^X$; Λ_M — операция предела в группе $\mathcal{F}$, соответствующая поточечной сходимости на $M \subset X$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X; $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{F}$. Тогда Λ_M и $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ являются групповыми операциями предела и, значит, функциональные пространства $(\mathcal{F},\, \Lambda_M)$ и $(\mathcal{F},\, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ являются группами с операцией предела. Если $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, то Λ_M является линейной операцией предела в векторном пространстве $\mathcal{F}$ и, значит, $(\mathcal{F},\, \Lambda_M)$ является линейным пространством. Однако $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ может не быть линейной операцией предела в $\mathcal{F}$, а именно: $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ удовлетворяет условию 3) определения 3.1, а условие 2) выполняется для почти стационарных числовых последовательностей, но может не выполняться для некоторых сходящихся числовых последовательностей. Несмотря на это, пространство $(\mathcal{F},\, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ содержит подпространства, являющиеся линейными пространствами (например, рассмотренные в теоремах 3.45 и 3.46 подпространства $(\mathcal{C},\ \Lambda_{\mathfrak{S}})$ и $(\mathfrak{C}_S,\ \Lambda_{\mathfrak{S}})$ при соответствующей системе $\mathfrak{S}$). Найдем наибольшее по отношению включения подпространство в $(\mathcal{F},\ \Lambda_{\mathfrak{S}})$, являющееся линейным пространством.

Определение 3.24. *Пусть X — непустое множество, а $(Y,\ \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство. Отображение $f\colon X\to Y$ называется ограниченным на $M\subset X$, если $f(M)$ ограничено в $(Y,\ \widetilde{\Lambda})$. Система F отображений X в Y называется равномерно ограниченной на M, если $\bigcup\limits_{f\in F} f(M)$ ограничено в $(Y,\ \widetilde{\Lambda})$. Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X. Отображение f называется ограниченным на системе $\mathfrak{S}$, если оно ограничено на каждом множестве из $\mathfrak{S}$. Система отображений F называется равномерно ограниченной на системе $\mathfrak{S}$, если она равномерно ограничена на каждом множестве из $\mathfrak{S}$.*

В линейном пространстве ограниченность последовательности есть ее ограниченность на $\mathbb{N}$ как функции.

Определение 3.25. *Пусть $(X,\ \Lambda)$ и $(Y,\ \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ называется $(\Lambda,\ \widetilde{\Lambda})$-ограниченным (короче — ограниченным), если оно ограничено на каждом ограниченном подмножестве пространства $(X,\ \Lambda)$. Система F отображений X в Y называется $(\Lambda,\ \widetilde{\Lambda})$-равномерно ограниченной (короче — равномерно ограниченной), если она равномерно ограничена на каждом ограниченном подмножестве пространства $(X,\ \Lambda)$.*

Теорема 3.47. *Пусть X — непустое множество; $(Y,\ \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство; $\mathcal{F}=Y^X$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X; $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{F}$; $\mathcal{F}'\subset\mathcal{F}$ — подмножество всех ограниченных на системе $\mathfrak{S}$ отображений. Тогда*

а) для отображения $f\in\mathcal{F}$ и произвольной сходящейся к нулю последовательности чисел $\alpha_n,\ n\in\mathbb{N}$, последовательность $(\alpha_n f : n\in\mathbb{N})$ тогда и только тогда сходится к нулю в пространстве $(\mathcal{F},\ \Lambda_{\mathfrak{S}})$, когда $f\in\mathcal{F}'$;

б) $(\mathcal{F}',\ \Lambda'_{\mathfrak{S}})\subset(\mathcal{F},\ \Lambda_{\mathfrak{S}})$ — наибольшее по отношению включения подпространство, являющееся линейным пространством, причем если каждое множество из $\mathfrak{S}$ конечно, то $\mathcal{F}'=\mathcal{F}$;

в) в линейном пространстве $(\mathcal{F}',\ \Lambda'_{\mathfrak{S}})$ множество ограничено тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено на системе $\mathfrak{S}$. ▶

Предложение 3.42. *Пусть X — непустое множество, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, $\mathcal{F}'$ — множество всех ограниченных на $M \subset X$ отображений X в Y, а $\Lambda'_{\{M\}}$ — операция предела в $\mathcal{F}'$ равномерной сходимости на M. Тогда*

а) если $\widetilde{\Lambda}$ определяется инвариантной относительно сдвигов полуметрикой $\widetilde{d}$ на Y, то $\Lambda'_{\{M\}}$ может быть определено инвариантной относительно сдвигов полуметрикой d' на $\mathcal{F}'$, заданной равенством $d'(f, g) = \sup\limits_{x \in M} \widetilde{d}(f(x), g(x))$ для всех f и g из $\mathcal{F}'$, причем если $\widetilde{d}$ является метрикой и $M = X$, то d' тоже является метрикой;

б) если $\widetilde{\Lambda}$ определяется полунормой $\widetilde{p}$ на Y, то $\Lambda'_{\{M\}}$ может быть определено полунормой p' на $\mathcal{F}'$, заданной равенством $p'(f) = \sup\limits_{x \in M} \widetilde{p}(f(x))$ для всех $f \in \mathcal{F}'$, причем если $\widetilde{p}$ является нормой и $M = X$, то p' тоже является нормой. ►

Из предложения 3.17 вытекает

Теорема 3.48. *Пусть X — непустое множество; $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, имеющее полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$ и полную систему открытых окрестностей нуля $\widetilde{W}_0$; $\mathcal{F} = Y^X$; Λ_M — операция предела в $\mathcal{F}$ поточечной сходимости на $M \subset X$; $F \subset \mathcal{F}$ — равномерно ограниченное на M подмножество. Тогда*

а) если система окрестностей нуля $\{u^+ : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, то в линейном пространстве $(\mathcal{F}, \Lambda_M)$ квазизамыкание F^+ равномерно ограничено на M;

б) если система окрестностей нуля $\{\overline{w} : w \in \widetilde{W}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, то в $(\mathcal{F}, \Lambda_M)$ замыкание $\overline{F}$ равномерно ограничено на M. ►

Теорема 3.49. *Пусть X — непустое множество, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, имеющее такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\widetilde{V}_0 = \{u + u : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Если последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ ограниченных на $M \subset X$ отображений X в Y сходится к отображению $f : X \to Y$ равномерно на M, то f ограничено на M, а $\hat{f}$ равномерно ограничена на M.*

◀ Пусть $v\in\widetilde{V}_0$. Выберем уравновешенную окрестность нуля $u\in\widetilde{U}_0$ так, чтобы $u+u\subset v$. Поскольку $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M, найдется такое $i\in\mathbb{N}$, что $f_i(x)-f(x)\in u$ для всех $x\in M$. В силу ограниченности f_i на M существует число $r\in(0;\,1)$, для которого $rf_i(M)\subset u$. Но тогда $rf_i(x)-rf(x)\in\in ru\subset u$ и, значит, $rf(x)\in u-u=u+u\subset v$ для всех $x\in M$. Отсюда следует ограниченность f на M. С учетом этого легко доказывается также равномерная ограниченность $\hat{f}$ на M. ▶

Отметим, что теорема 3.49 следует также из теоремы 2.57 с учетом замечания 3.11. Теорема 2.33 для линейных пространств принимает следующую формулировку.

Теорема 3.50. *Пусть X — непустое множество, $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — полное (квазиполное) линейное пространство, $\mathcal{F}=Y^X$, а Λ_M — операция предела в $\mathcal{F}$ поточечной сходимости на $M\subset X$. Тогда линейное пространство $(\mathcal{F},\,\Lambda_M)$ полно (квазиполно).* ▶

Из теорем 2.34 и 3.49 вытекает

Теорема 3.51. *Пусть X — непустое множество; $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, имеющее такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u+u : u\in\widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$; $\mathcal{F}=Y^X$; $\mathfrak{S}$ — некоторая система подмножеств в X; $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{F}$. Тогда множество $\mathcal{F}'$ всех ограниченных на системе $\mathfrak{S}$ отображений X в Y замкнуто в пространстве $(\mathcal{F},\,\Lambda_{\mathfrak{S}})$, причем если пространство $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ полно, то $(\mathcal{F},\,\Lambda_{\mathfrak{S}})$ как коммутативная группа с операцией предела и подпространство $(\mathcal{F}',\,\Lambda'_{\mathfrak{S}})\subset(\mathcal{F},\,\Lambda_{\mathfrak{S}})$ как линейное пространство полны.* ▶

Предложение 3.43. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, а $f : X\to Y$ — такое отображение, что $f(nx)=\!=nf(x)$ для всех $x\in X$ и $n\in\mathbb{N}$ (следовательно, $f(rx)=rf(x)$ для любого рационального числа $r\geqslant 0$). Если f ограничено, то $f(\Lambda(\dot{0}))\subset\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, а для любых ограниченной последовательности векторов $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$, и сходящейся к нулю последовательности чисел α_n, $n\in\mathbb{N}$, последовательность векторов $f(\alpha_n x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. Если же f еще и аддитивно, то $f(rx)\in\in rf(x)+\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для всех $x\in X$ и $r\in\mathbb{R}$.*

◀ Так как для $x\in\Lambda(\dot{0})$ последовательность $(nx : n\in\mathbb{N})$ ограничена, то и последовательность векторов $f(nx)=nf(x)$, $n\in\mathbb{N}$, ограничена. Поэтому $f(x)\in\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, т. е. $f(\Lambda(\dot{0}))\subset\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Пусть последовательность векторов $x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}$, ограничена, а последовательность чисел $\alpha_n,\ n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Сходящуюся к нулю последовательность рациональных $r_n > 0,\ n \in \mathbb{N}$, выберем так, чтобы последовательность чисел $r_n^{-1}\alpha_n,\ n \in \mathbb{N}$, была ограниченной. Тогда последовательности векторов $r_n^{-1}\alpha_n x_n$ и $f(r_n^{-1}\alpha_n x_n),\ n \in \mathbb{N}$, тоже ограничены. Следовательно, последовательность векторов $f(\alpha_n x_n) = r_n f(r_n^{-1}\alpha_n x_n),\ n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. В случае аддитивного f рассмотрим $x \in X,\ r \in \mathbb{R}$ и сходящуюся к r последовательность рациональных $r_n,\ n \in \mathbb{N}$. Так как $f(rx) = r_n f(x) + f((r - r_n)x)$, а последовательность векторов $f((r - r_n)x),\ n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю, то $f(rx) \in rf(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. ►

Теорема 3.52. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, а* F *— некоторая система таких отображений* $f : X \to Y$*, что* $f(nx) = nf(x)$ *для всех* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$*. Тогда*

а) если система F *равностепенно секвенциально непрерывна в нуле, то она равномерно ограничена;*

б) если в (X, Λ) *для каждой сходящейся к нулю последовательности* $\hat{x}$ *существует такая неограниченная числовая последовательность* $\hat{r}$*, что* $\hat{r}\hat{x}$ *сходится к нулю, то равномерно ограниченная система* F *равностепенно секвенциально непрерывна в нуле;*

в) если система F *равномерно ограничена на некоторой окрестности нуля пространства* (X, Λ)*, то она равностепенно секвенциально непрерывна в нуле.*

◄ (а) Рассмотрим последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ в F, ограниченную последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ в (X, Λ) и сходящуюся к нулю последовательность рациональных чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Из равенств $f_n(0) = 0$, $f_n(r_n x_n) = r_n f_n(x_n)$ и равностепенно секвенциальной непрерывности в нуле системы F следует, что последовательность $(r_n f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю.

(б) Рассмотрим последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ в F и сходящуюся к нулю последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в (X, Λ). Пусть $\hat{x}' \prec \hat{x}$. Из условия, наложенного на (X, Λ), следует, что $\hat{x}'$ обладает подпоследовательностью $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, для которой существует стремящаяся к бесконечности последовательность рациональных чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что последовательность $(r_n x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. В силу равномерной ограниченности F последовательность $(f_{k_n}(r_n x_{k_n}) : n \in \mathbb{N})$ ограничена, а последовательность векторов $r_n^{-1} f_{k_n}(r_n x_{k_n}) = f_{k_n}(x_{k_n})$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Тем самым каждая подпоследовательность последовательности $\hat{y} = (f_n(x_n) : n \in \mathbb{N})$ обладает сходящейся к нулю подпоследовательностью. Значит, $\hat{y}$ сходится к нулю.

(в) Пусть система F равномерно ограничена на окрестности нуля u пространства $(X,\,\Lambda)$. Тогда для окрестности нуля w в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ найдется такое рациональное $r>0$, что $rf(u)\subset w$ для всех $f\in F$. Однако $rf(u)=f(ru)$. Поэтому $f(v)\subset w$ для окрестности нуля $v=ru$ пространства $(X,\,\Lambda)$ и всех $f\in F$. ►

Предложение 3.44. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства. Если система аддитивных отображений X в Y равностепенно секвенциально непрерывна в одной точке, то она равностепенно секвенциально равномерно непрерывна.* ►

Предложение 3.45. *Пусть X — векторное пространство; $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство; $\mathcal{F}=Y^X$; $\mathfrak{S}$ — покрытие для X; $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{F}$; $\hat{f}=(f_n:n\in\mathbb{N})$ — сходящаяся последовательность в пространстве $(\mathcal{F},\,\Lambda_{\mathfrak{S}})$. Тогда для каждого $Y_0=Y\ominus\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ существует единственное $f\in\Lambda_{\mathfrak{S}}(\hat{f})$, такое, что для каждого $x\in X$ множество $Y_0\cap\widetilde{\Lambda}(\hat{f}(x))$, где $\hat{f}(x)=(f_n(x):n\in\mathbb{N})$, состоит из единственного вектора $f(x)$. При этом*

а) если для некоторого числового множества A равенство $f_n(\alpha x)=\alpha f_n(x)$ выполняется для всех $x\in X$, $\alpha\in A$ и $n\in\mathbb{N}$, то $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ для всех $x\in X$ и $\alpha\in A$;

б) если все f_n, $n\in\mathbb{N}$, аддитивны, то и f аддитивно.

◄ Пусть $f_0\in\Lambda_{\mathfrak{S}}(\hat{f})$. Так как $\mathfrak{S}$ покрывает X, то $\hat{f}$ сходится к f_0 также поточечно на X. Ясно, что для каждого $x\in X$ множество $Y_0\cap\widetilde{\Lambda}(\hat{f}(x))$ одноэлементно. Каждому $x\in X$ сопоставим единственный элемент указанного множества. Тогда получим отображение $f:X\to Y$, где $f(x)\in Y_0\cap\widetilde{\Lambda}(\hat{f}(x))$ для каждого $x\in X$. Докажем, что $\hat{f}$ сходится к f также в $(\mathcal{F},\,\Lambda_{\mathfrak{S}})$. Пусть $M\in\mathfrak{S}$ и $(x_n:n\in\mathbb{N})\in M^{\mathbb{N}}$. Имеем, что последовательность векторов $f_n(x_n)-f_0(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. Кроме того, $f_0(x_i)\in\widetilde{\Lambda}(\hat{f}(x_i))$ и $f(x_i)\in\widetilde{\Lambda}(\hat{f}(x_i))$ для каждого $i\in\mathbb{N}$. Поэтому $f_0(x_i)-f(x_i)\in\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Следовательно, последовательность векторов $f_0(x_n)-f(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. Но тогда последовательность векторов $f_n(x_n)-f(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, тоже сходится к нулю в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. А это означает, что $\hat{f}$ сходится к f в $(\mathcal{F},\,\Lambda_{\mathfrak{S}})$. Остальные утверждения очевидны. ►

Из теорем 2.30, 3.51, 3.52 и предложений 3.44, 3.45 с учетом замечания 3.11 вытекает

Следствие 3.8. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, причем* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *имеет такую полную систему окрестностей нуля* $\widetilde{U}_0$, *что система окрестностей нуля* $\{u+u : u\in\widetilde{U}\}$ *определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$; $\mathcal{F}=Y^X$; $\mathfrak{S}$ *— некоторая система подмножеств в* X, *содержащая систему всех таких множеств* $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ *векторов из* X, *что последовательность* $(x_n : n\in\mathbb{N})$ *сходится к нулю;* $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ *— операция предела* $\mathfrak{S}$*-равномерной сходимости в* $\mathcal{F}$; $\widetilde{\mathcal{F}}$ *— множество всех секвенциально непрерывных аддитивных отображений* X *в* Y; A *— числовое множество, которое содержит* $\mathbb{N}$ *и содержится в поле чисел каждого из векторных пространств* X *и* Y; $\mathcal{F}_0$ *— множество всех секвенциально непрерывных в нуле отображений* $f : X\to Y$, *удовлетворяющих равенству* $f(\alpha x)=\alpha f(x)$ *для всех* $x\in X$ *и* $\alpha\in A$. *Тогда*

а) если $\widetilde{\Lambda}$ *является операцией однозначного предела, то множества* $\widetilde{\mathcal{F}}$ *и* $\mathcal{F}_0$ *замкнуты в пространстве* $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$;

б) если $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *полно, то подпространства пространства* $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$, *имеющие соответственно носители* $\widetilde{\mathcal{F}}$, $\mathcal{F}_0$ *и* $\widetilde{\mathcal{F}}\cap\mathcal{F}_0$, *как линейные пространства полны.* ▶

Следующее предложение и доказанная ниже теорема 3.54, в которых существенно используется расширенное понятие окрестности, имеют отношения к *борнологическим, бочечным, инфрабочечным* и *ультрабочечным* пространствам, рассматриваемым в теории топологических векторных пространств (см. [70], с. 585, 586, 651, и приведенное ниже замечание 3.14).

Предложение 3.46. *В линейном пространстве* (X, Λ) *радиально уравновешенное множество, поглощающее каждую сходящуюся к нулю последовательность, поглощает каждое ограниченное множество. Кроме того, относительно* (X, Λ) *следующие условия попарно эквивалентны:*

1) в (X, Λ) *для каждой сходящейся к нулю последовательности* $\hat{x}$ *существует такая неограниченная числовая последовательность* $\hat{r}$, *что* $\hat{r}\hat{x}$ *сходится к нулю;*

2) в (X, Λ) *всякое радиально уравновешенное множество, которое поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, является окрестностью нуля;*

3) в (X, Λ) *всякое радиально уравновешенное множество, которое поглощает каждое ограниченное множество, является окрестностью нуля.*

◀ Пусть радиально уравновешенное подмножество $M\subset X$ поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, а

$G \subset X$ — ограниченное подмножество. Предположим M не поглощает G. Тогда существует такая последовательность векторов $x_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, что $n^{-2}x_n \notin M$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $(n^{-1}x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, то $rn^{-1}x_n \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором $r > 0$. Но тогда $n^{-2}x_n \in M$ для всех $n > r^{-1}$, поскольку M радиально уравновешено. Полученное противоречие доказывает, что M поглощает G. Из доказанного вытекает эквивалентность условий 2) и 3).

Докажем, что из условия 1) следует 2). Допустим радиально уравновешенное подмножество $M \subset X$ поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, но не является окрестностью нуля. Тогда существует сходящаяся к нулю последовательность векторов $x_n \in X \setminus M$, $n \in \mathbb{N}$. Из условия 1) следует существование такой подпоследовательности $(x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$, что для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\hat{y} = (r_n x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. По условию, M поглощает $\hat{y}$, т. е. $rr_n x_{i_n} \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором $r > 0$. Однако $rr_n > 1$ для всех $n \geqslant n'$ при некотором $n' \in \mathbb{N}$. Поэтому $x_{i_n} \in M$ для всех $n \geqslant n'$. Полученное противоречие доказывает, что M является окрестностью нуля.

Теперь докажем, что из условия 2) следует 1). Пусть последовательность $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю. Предположим $\hat{r}\hat{x}$ не сходится к нулю для любой неограниченной числовой последовательности $\hat{r}$. Тогда $x_n \notin \Lambda(\dot{0})$ для всех $n \geqslant n'$ при некотором $n' \in \mathbb{N}$. Обозначим $H = \{\alpha x_n : |\alpha| \geqslant 1,\ n \geqslant n'\}$. Множество $M = X \setminus H$ уравновешено. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $y_n \in H$. Имеем, что $y_n = r_n x_{i_n}$, где $i_n \in \mathbb{N}$ и r_n — некоторые числа, причем $i_n \geqslant n'$ и $\alpha x_{i_n} \notin H$ для любого α с $|\alpha| < 1$. В силу предположений относительно $\hat{x}$ последовательность $(r_n x_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ может сходиться к нулю только тогда, когда $|r_n| < r$ для некоторого $r > 1$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $r^{-1}y_n \in M$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то M поглощает $\hat{y}$. Поэтому M поглощает любую сходящуюся к нулю последовательность и, по условию 2), является окрестностью нуля. Значит, сходящаяся к нулю последовательность $\hat{x}$ почти вся лежит в M. Однако, согласно построению M, $x_n \notin M$ для всех $n \geqslant n'$. Это противоречие доказывает, что для $\hat{x}$ выполняется условие 1). ▶

Предложение 3.47. *Относительно линейного пространства (X, Λ) следующие условия эквивалентны:*

1) в (X, Λ) выпуклая оболочка ограниченного множества ограничена;

2) в (X, Λ) для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов x_n и чисел $\gamma_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, выпуклая оболочка множества $\{\gamma_n x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничена. ▶

Теорема 3.53. *В полуметризуемом линейном пространстве (X, Λ) фундаментальная последовательность обладает подпоследовательностью, имеющей ограниченную выпуклую оболочку, а если в (X, Λ) выпуклая оболочка всякой сходящейся к нулю последовательности ограничена, то (X, Λ) локально выпукло.*

◀ Пусть d — такая инвариантная относительно сдвигов полуметрика на X, определяющая операцию предела Λ, что открытые шары с центром в нуле уравновешены. Подпоследовательность $\hat{x}' = (x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ фундаментальной последовательности векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, выберем так, чтобы $d(0, x_{k_i} - x_{k_s}) < 2^{-i}$ для всех $s > i$ и $i \in \mathbb{N}$. Докажем, что выпуклая оболочка E множества $\{x_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ ограничена. Рассмотрим последовательность векторов $y_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, и сходящуюся к нулю последовательность чисел r_n, $n \in \mathbb{N}$. Для $\varepsilon > 0$ выберем $\nu \in \mathbb{N}$ так, чтобы $2^{1-\nu} < \varepsilon$. Каждый вектор y_n представляется в виде $y_n = \sum\limits_{i=1}^{m_n} t_{ni} x_{k_i}$ с натуральным $m_n > \nu$ и числами $t_{ni} \geqslant 0$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{m_n} t_{ni} = 1$. В силу ограниченности $\hat{x}'$ существует такое $\delta \in (0; 1)$, что $d(0, r x_{k_i}) < \frac{\varepsilon}{2(\nu+1)}$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и числа r с $|r| < \delta$. Очевидно, $d(0, r x_{k_i} - r x_{k_s}) < 2^{-i}$ при $s > i$ и $|r| < \delta$. Выберем $n' \in \mathbb{N}$ так, чтобы $|r_n| < \delta$ при $n \geqslant n'$. Тогда из равенства

$$r_n y_n = \sum_{i=1}^{\nu} r_n t_{ni} x_{k_i} + \Bigl(\sum_{i=\nu+1}^{m_n} t_{ni}\Bigr) r_n x_{k_{m_n}} + \sum_{i=\nu+1}^{m_n} r_n t_{ni} (x_{k_i} - x_{k_{m_n}})$$

при $n \geqslant n'$ получим, что $d(0, r_n y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum\limits_{i=\nu+1}^{m_n} 2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-\nu} < \varepsilon$. Поэтому последовательность $(r_n y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю и, значит, множество E ограничено.

Докажем второе утверждение. Выберем в (X, Λ) фундаментальную систему окрестностей нуля $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ так, чтобы каждое множество u_n было уравновешенным и $2u_{n+1} \subset u_n$. Пусть v_n — выпуклая оболочка множества u_n. Тогда $2v_{n+1} \subset v_n$. Система окрестностей нуля $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в X некоторую линейную операцию предела Λ_0, причем $\Lambda \leqslant \Lambda_0$ и пространство (X, Λ_0) полуметризуемо. Докажем, что $\Lambda_0 = \Lambda$, т. е. всякая сходящаяся к нулю в (X, Λ_0) последовательность $\hat{z}$ сходится к нулю и в (X, Λ). Для некоторой стремящейся к бесконечности последовательности $\hat{r}$ положительных чисел последовательность $\hat{r}\hat{z}$ сходится к нулю в (X, Λ_0). Так как $\hat{r}\hat{z}$ почти вся лежит в каждом v_n, то в (X, Λ) сходящуюся к нулю последовательность можно выбрать так, чтобы множество $[\hat{r}\hat{z}]$ содержалось в ее выпуклой оболочке, ограниченной в (X, Λ) по условию. Но тогда $[\hat{r}\hat{z}]$ ограничено в (X, Λ), а $\hat{z}$ сходится к нулю. Тем самым $\Lambda_0 = \Lambda$, а $\{v_n : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в (X, Λ), т. е. пространство (X, Λ) локально выпукло. ►

Предложение 3.48. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, в котором квазизамыкание секвенциально квазикомпактного множества ограничено, а V_0 — некоторая система окрестностей нуля, определяющая операцию предела Λ. Если существует такая система вещественно уравновешенных подмножеств $v_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, что $v_{n+1} + v_{n+1} \subset v_n$ и каждое $v \in V_0$ содержит некоторое v_n, а при каждом $n \in \mathbb{N}$ квазизамыкание v_n^+ является окрестностью нуля пространства (X, Λ), то (X, Λ) полуметризуемо и $\{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ является в нем фундаментальной системой окрестностей нуля.*

◄ Система окрестностей нуля $\{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в X некоторую вещественно линейную операцию предела Λ_0, причем $\Lambda \leqslant \Lambda_0$ и пространство (X, Λ_0) полуметризуемо. Докажем, что $\Lambda_0 = \Lambda$, т. е. сходящаяся к нулю в (X, Λ_0) последовательность $(x_i : i \in \mathbb{N})$ сходится к нулю и в (X, Λ). Стремящуюся к бесконечности последовательность чисел $r_i > 0$, $i \in \mathbb{N}$, выберем так, чтобы последовательность векторов $y_i = r_i x_i$, $i \in \mathbb{N}$, сходилась к нулю в (X, Λ_0), а последовательность натуральных $k_1 < k_2 < \ldots$ выберем так, чтобы $y_i \in v_n^+$ для всех $i \geqslant k_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}$, таких, что $k_n \leqslant i < k_{n+1}$, выберем последовательность векторов $z_{i\nu} \in v_n$, $\nu \in \mathbb{N}$, сходящуюся к y_i в (X, Λ). Рассмотрим множество $M = \{z_{i\nu} : i \geqslant k_1,\ \nu \in \mathbb{N}\}$. Так как каждое $v \in V_0$ содержит некоторое v_n, то каждая последовательность векторов из M обладает подпоследовательностью, сходящейся в (X, Λ) либо к нулю, либо к некоторому y_i. Поэтому M секвенциально квазикомпактно в (X, Λ). По условию, в (X, Λ) квазизамыкание M^+ ограничено. С учетом $y_i \in M^+$, $i \geqslant k_1$, последовательность $(y_i : i \in \mathbb{N})$ ограничена в (X, Λ), а последовательность векторов $x_i = r_i^{-1} y_i$, $i \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. ►

Предложение 3.49. *Пусть (X, Λ) и (X, Λ') — линейные пространства, причем (X, Λ) полуметризуемо и фундаментальные в нем последовательности сходятся в (X, Λ'). Тогда* *а) если в (X, Λ') квазизамыкание секвенциально квазикомпактного множества Λ-ограничено, то (X, Λ) полно;*

б) если выпуклая оболочка сходящейся к нулю в (X, Λ) последовательности имеет Λ-ограниченное квазизамыкание в (X, Λ'), то (X, Λ) полно.

◀ (а) В (X, Λ) фундаментальную систему окрестностей нуля $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, состоящую из уравновешенных окрестностей нуля, выберем так, чтобы $u_{n+1} + u_{n+1} \subset u_n$. Тогда $u_{n+1}^+ + u_{n+1}^+ \subset \subset u_n^+$, где квазизамыкания взяты в (X, Λ'). Система окрестностей нуля $\{u_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в X некоторую линейную операцию предела Λ_0, причем $\Lambda \leqslant \Lambda_0$ и пространство (X, Λ_0) полуметризуемо. По аналогии с доказательством предложения 3.48 доказывается равенство $\Lambda_0 = \Lambda$, в силу которого $\{u_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля пространства (X, Λ). Рассмотрим в (X, Λ) фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ и окрестность нуля u_i. Найдется такое $n' \in \mathbb{N}$, что $y_n - y_{n'} \in u_{i+1}$ для всех $n \geqslant n'$. Последовательности $\hat{y}$ и $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$, где $x_n = y_{n'+n} - y_{n'} \in u_{i+1}$, будучи фундаментальными в (X, Λ), сходятся в (X, Λ'). Очевидно, $\Lambda'(\hat{y}) = y_{n'} + \Lambda'(\hat{x})$ и $\Lambda'(\hat{x}) \subset u_{i+1}^+$. Если $y \in \Lambda'(\hat{y})$, то $y - y_{n'} \in u_{i+1}^+$ и $y_n - y = (y_n - y_{n'}) - (y - y_{n'}) \in u_{i+1} - u_{i+1}^+ \subset u_i^+$ для всех $n \geqslant n'$. Поэтому $y \in \Lambda(\hat{y})$.

(б) Рассмотрим в (X, Λ) фундаментальную последовательность $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$. По условию, $\hat{y}$ сходится в (X, Λ') к некоторому $y \in X$. Выберем подпоследовательность $\hat{y}' = (y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ так, чтобы последовательность векторов $x_n = 2^{n+1}(y_{k_n} - y_{k_{n+1}})$, $n \in \mathbb{N}$, сходилась к нулю в (X, Λ). Легко проверить, что

$$2^n(1 - 2^{-m})^{-1}(y_{k_n} - y_{k_{n+m}}) = \sum_{i=0}^{m-1} (1 - 2^{-m})^{-1} 2^{-i-1} x_{i+n},$$

$\sum\limits_{i=0}^{m-1} (1-2^{-m})^{-1} 2^{-i-1} = 1$ при любых $n \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность векторов $2^n(1 - 2^{-m})^{-1}(y_{k_n} - y_{k_{n+m}})$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к $2^n(y_{k_n} - y)$ в (X, Λ'). По условию, выпуклая оболочка множества $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ имеет Λ-ограниченное квазизамыкание в (X, Λ'). Поэтому множество $\{2^n(y_{k_n} - y) : n \in \mathbb{N}\}$ Λ-ограничено. Значит, последовательность $(y_{k_n} - y : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в (X, Λ), т. е. $y \in \Lambda(\hat{y}')$. Но тогда $y \in \Lambda(\hat{y})$. ▶

Ясно, что предложение 3.47 и теорему 3.53 можно соотнести также к топологическим векторным пространствам. Поскольку в этих пространствах замыкание ограниченного множества ограничено, из утверждения а) предложения 3.49 вытекает

Следствие 3.9. *Пусть $(X,\,\tau)$ и $(X,\,\tau')$ — топологические векторные пространства, имеющие одну и ту же систему ограниченных подмножеств. Если $(X,\,\tau)$ полуметризуемо и фундаментальные в нем последовательности сходятся в $(X,\,\tau')$, то $(X,\,\tau)$ полно.* ▶

Полуметризуемое линейное (или топологическое векторное) пространство полно и при условии, что для любой сходящейся к нулю последовательности векторов $x_n,\ n\in\mathbb{N}$, последовательность векторов $\sum\limits_{n=1}^{i} 2^{-n}x_n,\ \ i\in\mathbb{N}$, сходится (в случае локально выпуклого пространства это условие также необходимо).

Замечание 3.12. Пусть $(X,\,\Lambda)$ — неполное полуметризуемое линейное пространство, а Λ' — максимально слабая линейная операция предела в X, порождающая ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и Λ. Из утверждения в) теоремы 3.30 и утверждения а) предложения 3.49 следует, что линейное пространство $(X,\,\Lambda')$ содержит секвенциально квазикомпактное подмножество, квазизамыкание которого не ограничено. Поэтому линейная операция предела Λ' не может определяться векторной топологией. Более того, система окрестностей нуля $\{u^+ : u\in U_0'\}$, где U_0' — полная система окрестностей нуля пространства $(X,\,\Lambda')$, не определяет операцию предела Λ' (в связи с этим см. также примеры в § 16, n° 1 и n° 2).

Предложение 3.50. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ — линейное пространство, $M\subset X$ — непустое ограниченное выпуклое подмножество, G и G' — выпуклые оболочки множеств $M\cup(-M)+\Lambda(\dot{0})$ и $M^+\cup(-M^+)$ соответственно, $\hat{e}=(e_n : n\in\mathbb{N})$ — последовательность векторов $e_n\in G$, $(\alpha_n : n\in\mathbb{N})$ — последовательность вещественных чисел, а $\hat{s}=(s_i : i\in\mathbb{N})$ — последовательность векторов $s_i=\sum\limits_{n=1}^{i}\alpha_n e_n$, причем $r=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|<\infty$. Тогда*

а) последовательность $\hat{s}$ фундаментальна и ограничена;

б) если для произвольных последовательностей векторов $x_n\in M$ и чисел $\gamma_n>0,\ \ n\in\mathbb{N}$, последовательность векторов $\sum\limits_{n=1}^{i}\gamma_n x_n,\ i\in\mathbb{N}$, при $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$ сходится, то $\hat{s}$ тоже сходится и $\Lambda(\hat{s})\subset rG'+\Lambda(\dot{0})$ (очевидно, $rG'+\Lambda(\dot{0})=rG'$ при $r\neq 0$).

◀ (а) Множество G ограничено и вещественно уравновешено. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha_n>0$, $n\in\mathbb{N}$. Для каждого $i\in\mathbb{N}$ обозначим $r_i=\sum\limits_{n=1}^{i}\alpha_n$ и $h_i=r_i^{-1}s_i\in G$. Докажем фундаментальность последовательности $(h_i:i\in\mathbb{N})$. Рассмотрим некоторую подпоследовательность $(h_{k_i}:i\in\mathbb{N})$ (будем считать $k_1>1$). Положим $g_i=(r_{k_i}-r_i)^{-1}(s_{k_i}-s_i)\in G$. Тогда $h_{k_i}-h_i=$ $=r_{k_i}^{-1}(r_{k_i}-r_i)(g_i-h_i)$. Имеем, что $\lim\limits_i r_i=r\neq 0$ и $\lim\limits_i(r_{k_i}-r_i)=0$. Так как последовательности $(h_i:i\in\mathbb{N})$ и $(g_i:i\in\mathbb{N})$ ограничены, то последовательность $(h_{k_i}-h_i:i\in\mathbb{N})$ сходится к нулю, т. е. $(h_i:i\in\mathbb{N})$ фундаментальна. Но тогда последовательность векторов $s_i=r_ih_i$, $i\in\mathbb{N}$, тоже фундаментальна и ограничена.

В общем случае пусть $\alpha_n'=\frac{1}{2}(|\alpha_n|+\alpha_n)$, $\alpha_n''=\frac{1}{2}(|\alpha_n|-\alpha_n)$. Тогда $\alpha_n'\geqslant 0$, $\alpha_n''\geqslant 0$, $|\alpha_n|=\alpha_n'+\alpha_n''$, $\alpha_n=\alpha_n'-\alpha_n''$, $s_i=s_i'-s_i''$, где $s_i'=\sum\limits_{n=1}^{i}\alpha_n'e_n$, $s_i''=\sum\limits_{n=1}^{i}\alpha_n''e_n$. Из доказанного выше утверждения легко вытекает, что последовательности $\hat{s}'=(s_i':i\in\mathbb{N})$ и $\hat{s}''=(s_i'':i\in\mathbb{N})$ фундаментальны и ограничены. Поэтому последовательность $\hat{s}=\hat{s}'-\hat{s}''$ тоже фундаментальна и ограничена.

(б) Вектор $e_n\in G$ представим в виде $e_n=t_ne_n'-(1-t_n)e_n''+\xi_n$, где $e_n'\in M$, $e_n''\in M$, $\xi_n\in\Lambda(\dot{0})$ и $t_n\in[0;\,1]$. С использованием определенных выше чисел α_n' и α_n'' введем обозначения $a_n=$ $=\alpha_n't_n+\alpha_n''(1-t_n)$, $b_n=\alpha_n''t_n+\alpha_n'(1-t_n)$, $r'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $r''=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$. При этом, очевидно, $a_n+b_n=\alpha_n'+\alpha_n''=|\alpha_n|$ и $r'+r''=r$. Положим $x_n=a_n^{-1}(\alpha_n't_ne_n'+\alpha_n''(1-t_n)e_n'')\in M$ при $a_n\neq 0$ и $x_n=0$ при $a_n=0$, а $y_n=b_n^{-1}(\alpha_n''t_ne_n'+\alpha_n'(1-t_n)e_n'')\in M$ при $b_n\neq 0$ и $y_n=0$ при $b_n=0$. Легко проверяется равенство $s_i=z_i'-z_i''+\eta_i$, где $z_i'=\sum\limits_{n=1}^{i}a_nx_n$, $z_i''=\sum\limits_{n=1}^{i}b_ny_n$, $\eta_i=\sum\limits_{n=1}^{i}\alpha_n\xi_n$. Так как $a_n\geqslant 0$, $b_n\geqslant 0$, то из условия, наложенного на M, вытекает, что последовательности $\hat{z}'=(z_i':i\in\mathbb{N})$ и $\hat{z}''=(z_i'':i\in\mathbb{N})$ сходятся, причем для $\hat{\eta}=(\eta_i:i\in\mathbb{N})$ имеем $\Lambda(\hat{\eta})=\Lambda(\dot{0})$. Поэтому последовательность $\hat{s}=\hat{z}'-\hat{z}''+\hat{\eta}$ сходится. Однако, как нетрудно убедиться, $\Lambda(\hat{z}')\subset r'M^+ +\Lambda(\dot{0})$ и $\Lambda'(\hat{z}'')\subset r''M^+ +\Lambda(\dot{0})$. Следовательно, $\Lambda(\hat{s})=\Lambda(\hat{z}')-\Lambda(\hat{z}'')\subset r'M^+ - r''M^+ +\Lambda(\dot{0})\subset rG'+\Lambda(\dot{0})$. ▶

Предложение 3.51. *Пусть* $\hat{e} = (e_n : n \in \mathbb{N})$ *— последовательность векторов в линейном пространстве* (X, Λ), E^+ *— квазизамыкание выпуклой оболочки* E *последовательности* $\hat{e}$, E' *— выпуклая оболочка множества* $E^+ \cup (-E^+)$, *а* l_1 *— полное нормированное вещественное линейное пространство всех числовых последовательностей* $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N})$, *для которых* $\|\hat{\alpha}\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. *Предположим, что для каждого* $\hat{\alpha} \in l_1$ *последовательность* $\hat{s} = (s_i : i \in \mathbb{N})$ *векторов* $s_i = \sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n e_n$ *сходится в* (X, Λ), *и примем множество* $\Lambda(\hat{s})$ *(или предел последовательности* $\hat{s}$ *в случае операции однозначного предела* Λ*) в качестве суммы ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. *Обозначим через* X_1 *множество всех векторов* $x \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ *при всех* $\hat{\alpha} \in l_1$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) X_1 *является вещественным векторным подпространством в* X *(оно может не быть замкнутым в* (X, Λ)*), причем* $\Lambda(\dot{0}) \subset X_1$ *и* $e_n \in X_1$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

б) Функционал $p : X_1 \to \mathbb{R}_+$, *определенный равенством*

$$p(x) = \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| : (\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1,\ x \in \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \Big\}, \qquad x \in X_1,$$

является полунормой на X_1, *причем* $p(e_n) \leqslant 1$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

в) Вещественное линейное пространство (X_1, Λ_1) *с операцией предела* Λ_1, *определенной в* X_1 *полунормой* p, *полно. Кроме того,* $\Lambda(\hat{s}) \subset \Lambda_1(\hat{s})$ *и, в частности,* $\Lambda(\dot{0}) \subset \Lambda_1(\dot{0})$.

г) Для множества $P = \{x \in X_1 : p(x) < 1\}$ *и любого элемента* $(\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$ *имеют место включения* $P \subset E'$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \subset$ $\subset rE' + \Lambda(\dot{0})$, *где* $r = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$.

д) Если множество E^+ *(или даже* P*) ограничено в* (X, Λ), *то всякая сходящаяся в* (X_1, Λ_1) *последовательность* $\hat{x}$ *сходится также в* (X, Λ), *причем* $\Lambda_1(\hat{x}) = \Lambda(\hat{x})$ *и, в частности,* $\Lambda_1(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$.

◀ Утверждение а) очевидно.

(б) Для $x \in X_1$ и $r \in \mathbb{R}$ равенство $p(rx) = |r|p(x)$ очевидно. Для векторов x, y из X_1 и числа $\varepsilon > 0$ выберем $(\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$ и $(\beta_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$ так, чтобы

$$x \in \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \; y \in \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n, \; \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < p(x) + \tfrac{\varepsilon}{2}, \; \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| < p(y) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда

$$x + y \in \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) e_n, \quad p(x+y) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n + \beta_n| < p(x) + p(y) + \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$. Значит, p есть полунорма на X_1. Неравенство $p(e_n) \leqslant 1$ очевидно.

(в) Рассмотрим в (X_1, Λ_1) фундаментальную последовательность $\hat{z} = (z_i : i \in \mathbb{N})$ и выберем ее подпоследовательность $\hat{z}' = (z_{k_i} : i \in \mathbb{N})$ так, чтобы $p(z_{k_{i+1}} - z_{k_i}) < 2^{-i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Заметим, что если $x \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n$ для некоторого $(\beta_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$, то

$$p(x) = \inf \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n + \gamma_n| : (\gamma_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1, \; \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e_n = \Lambda(\dot{0}) \Big\}.$$

Учитывая это и действуя по индукции, для каждого $i \in \mathbb{N}$ можно так выбрать элемент $\hat{\alpha}^{(i)} = \big(\alpha_n^{(i)} : n \in \mathbb{N}\big) \in l_1$, что $z_{k_i} \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(i)} e_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big|\alpha_n^{(i+1)} - \alpha_n^{(i)}\big| < 2^{-i}$. Очевидно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big|\alpha_n^{(i+m)} - \alpha_n^{(i)}\big| < 2^{1-i}$ для любых $i \in \mathbb{N}$ и $m \in \mathbb{N}$. Поэтому последовательность выбранных элементов $\hat{\alpha}^{(i)}$, $i \in \mathbb{N}$, фундаментальна в полном пространстве l_1 и, значит, сходится к некоторому $\hat{\alpha} = (\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$. Для $z \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ имеем $p(z_{k_i} - z) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \big|\alpha_n^{(i)} - \alpha_n\big|$ при всех $i \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что $\lim\limits_i p(z_{k_i} - z) = 0$, т. е. $z \in \Lambda_1(\hat{z}')$. Но тогда $z \in \Lambda_1(\hat{z})$. Следовательно, (X_1, Λ_1) полно.

Пусть $x \in \Lambda(\hat{s})$. Тогда $p(x - s_i) \leqslant \sum\limits_{n=i+1}^{\infty} |\alpha_n|$, $i \in \mathbb{N}$. Поэтому $\lim\limits_i p(x - s_i) = 0$, т. е. $x \in \Lambda_1(\hat{s})$. Следовательно, $\Lambda(\hat{s}) \subset \Lambda_1(\hat{s})$.

(г) Введем обозначения $\alpha_n' = \frac{1}{2}(|\alpha_n| + \alpha_n)$, $\alpha_n'' = \frac{1}{2}(|\alpha_n| - \alpha_n)$, $r' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n'$, $r'' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n''$. Очевидно, $\alpha_n' \geqslant 0$, $\alpha_n'' \geqslant 0$, $\alpha_n = \alpha_n' - \alpha_n''$,

$r = r' + r''$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha'_n e_n - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha''_n e_n$. Если $b_i = \sum\limits_{n=1}^{i} \alpha'_n \neq 0$ для некоторого $i \in \mathbb{N}$, то $b_i^{-1} \sum\limits_{n=1}^{i} \alpha'_n e_n \in E$. Отсюда с учетом $\lim\limits_i b_i = r'$ получаем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha'_n e_n \subset r' E^+ + \Lambda(\dot{0})$. Аналогично доказывается включение $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha''_n e_n \subset r'' E^+ + \Lambda(\dot{0})$. Поэтому $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \subset$ $\subset r' E^+ - r'' E^+ + \Lambda(\dot{0}) \subset r E' + \Lambda(\dot{0})$.

Множество E' вещественно уравновешено и $rE' + \Lambda(\dot{0}) = rE'$ при $r \neq 0$. Если $x \in P$, то найдется такой элемент $(\alpha_n : n \in \mathbb{N}) \in l_1$ с $r < 1$, что $x \in \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Однако $rE' + \Lambda(\dot{0}) \subset E'$ при $r \in [-1;\, 1]$. Поэтому $x \in E'$. Значит, $P \subset E'$.

Утверждение д) с учетом в) следует из включения $P \subset E'$ и Λ-ограниченности E' (или просто из Λ-ограниченности P). ►

Теорема 3.54. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ — линейное пространство, в котором для каждой сходящейся к нулю последовательности $(x_n : n \in \mathbb{N})$ существует такая неограниченная числовая последовательность $(r_n : n \in \mathbb{N})$, что $(r_n x_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, а квазизамыкание выпуклой оболочки некоторой подпоследовательности $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ ограничено и, кроме того, для любой последовательности чисел $\alpha_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $\sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n x_{k_n}$, $i \in \mathbb{N}$, при $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ сходится. Если для $M \subset X$ множество $M + \Lambda(\dot{0})$ поглощающе и радиально уравновешено, то множество $M + M^+$ является окрестностью нуля, причем если $M + \Lambda(\dot{0})$ еще и выпукло, то M^+ тоже является окрестностью нуля.*

◄ Для $H = M + \Lambda(\dot{0})$ имеем $M^+ = H^+$ и $M + M^+ = H + H^+$. Рассмотрим в $(X,\, \Lambda)$ сходящуюся к нулю последовательность $\hat{x}$ и ее подпоследовательность $\hat{x}'$. В силу условий теоремы $\hat{x}'$ обладает подпоследовательностью $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$, для которой найдется такая стремящаяся к бесконечности последовательность чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, что последовательность $(r_n y_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, а квазизамыкание выпуклой оболочки некоторой подпоследовательности $(r_{k_n} y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ ограничено и, кроме того, для любой последовательности чисел $\alpha_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $\sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n r_{k_n} y_{k_n}$, $i \in \mathbb{N}$, при $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$ сходится. Указанным в предложении 3.51 способом при помощи последовательности $\hat{e} = (e_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $e_n = r_{k_n} y_{k_n}$ построим полное полунормируемое вещественное линейное пространство (X_1, Λ_1) и полунорму p на $X_1 \subset X$, определяющую операцию предела Λ_1. Так как $p(r_{k_n} y_{k_n}) = p(e_n) \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то последовательность $\hat{y}' = (y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в (X_1, Λ_1). Кроме того, сходящаяся в (X_1, Λ_1) последовательность сходится к тому же пределу и в (X, Λ). Множество $H_1 = X_1 \cap H \cap (-H)$ вещественно уравновешено и поглощает каждый вектор из X_1. Поэтому $X_1 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} nH_1$. Согласно теореме Бэра (см. [47], с. 41; [54], с. 53), X_1 является множеством второй категории в (X_1, Λ_1). Следовательно, в (X_1, Λ_1) при некотором $n \in \mathbb{N}$ замыкание множества nH_1 обладает внутренней точкой. Но тогда $\overline{H}_1$ тоже обладает внутренней точкой. Так как $H_1 \cap (\overline{H}_1)^\circ \neq \varnothing$ и $H_1 = -H_1$, то $H_1 + \overline{H}_1$ является окрестностью нуля в (X_1, Λ_1). Поэтому найдется такое $n' \in \mathbb{N}$, что $y_{k_n} \in H_1 + \overline{H}_1$ для всех $n \geqslant n'$. Однако $\overline{H}_1$ совпадает с квазизамыканием множества H_1 в (X_1, Λ_1) и содержится в квазизамыкании множества H_1 в (X, Λ). Значит, $H_1 + \overline{H}_1 \subset H + H^+$, где квазизамыкание H^+ взято в (X, Λ). Поэтому $y_{k_n} \in H + H^+$ для всех $n \geqslant n'$. Таким образом, в (X, Λ) каждая подпоследовательность $\hat{x}'$ сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью $\hat{y}'$, которая почти вся лежит в $H + H^+$. Следовательно, последовательность $\hat{x}$ тоже почти вся лежит в $H + H^+$, т. е. $H + H^+$ является окрестностью нуля в (X, Λ).

Если множество H выпукло, то $\frac{1}{2}(H + H^+) \subset H^+ = M^+$ и, значит, M^+ является окрестностью нуля в (X, Λ). ►

С учетом предложения 3.50 из теоремы 3.54 вытекает

Следствие 3.10. *Пусть (X, Λ) — квазиполное линейное пространство, в котором для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{x}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{x}$ сходится к нулю, а квазизамыкание выпуклой оболочки некоторой подпоследовательности $\hat{x}' \prec \hat{x}$ ограничено. Если для $M \subset X$ множество $M + \Lambda(\dot{0})$ поглощающе и радиально уравновешено, то $M + M^+$ является окрестностью нуля, причем если $M + \Lambda(\dot{0})$ еще и выпукло, то M^+ тоже является окрестностью нуля.* ►

В силу теоремы 3.53 полное полуметризуемое линейное пространство удовлетворяет условиям следствия 3.10. При этом, как показывает теорема 3.28, пространство, удовлетворяющее условиям следствия 3.10, может быть множеством первой категории и секвенциально первой категории. В связи с условиями следствия 3.10 см. также утверждение б) предложения 3.19.

Следующая теорема является обобщением классической *теоремы Банаха–Штейнгауза* (см. [47], с. 116; [54], с. 54).

Теорема 3.55. *Пусть линейное пространство (X, Λ) удовлетворяет условиям теоремы 3.54 (или следствия 3.10), а линейное пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ имеет такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\widetilde{V}_0 = \{u + u^+ : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Если система F ограниченных аддитивных отображений X в Y такая, что для каждого $x \in X$ множество $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ ограничено, то система F равностепенно секвенциально непрерывна и, следовательно, равномерно ограничена, а также равностепенно $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывна, где τ и $\widetilde{\tau}$ — секвенциальные топологии пространств (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ соответственно.*

◀ Пусть $v \in \widetilde{V}_0$. С учетом предложения 3.7 выберем уравновешенную окрестность нуля $u \in \widetilde{U}_0$ так, чтобы $u + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = u$ и $u + u^+ \subset v$. Обозначим $M = \bigcap\limits_{f \in F} f^{-1}(u)$. Для каждого $x \in X$ в силу ограниченности $F(x)$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $F(x) \subset nu$. Так как отображения $f \in F$ аддитивны, то $x \in nM$. Следовательно, множество M поглощающе. Для любых $f \in F$, $x \in M$ и $r \in [-1; 1]$ имеем, что $rf(x) \in u$, а в силу предложения 3.43 $f(rx) \in rf(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset u + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = u$. Поэтому $rx \in M$ и, значит, множество M вещественно уравновешено. Но тогда в силу теоремы 3.54 множество $w = M + M^+$ является окрестностью нуля в (X, Λ). Согласно утверждению б) теоремы 3.52, каждое отображение $f \in F$ секвенциально непрерывно, а в силу теоремы 1.68 из включения $f(M) \subset u$ получаем $f(M^+) \subset u^+$. Следовательно, $f(w) = f(M + M^+) = f(M) + f(M^+) \subset u + u^+ \subset v$. Отсюда вытекает равностепенно секвенциальная непрерывность F. ▶

Следствие 3.11. *Пусть (X, Λ) — линейное пространство, в котором для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов x_n и чисел $\gamma_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(\gamma_n x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью $(\gamma_{k_n} x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, квазизамыкание выпуклой оболочки которой ограничено и для любой последовательности чисел $\alpha_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, последователь-*

ность векторов $s_i = \sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n \gamma_{k_n} x_{k_n}$, $i \in \mathbb{N}$, *при* $r = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ *сходится, а* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, указанное в теореме 3.55. Если система* F *ограниченных аддитивных отображений* X *в* Y *такая, что для каждого* $x \in X$ *множество* $\{f(x) : f \in F\}$ *ограничено, то* F *равномерно ограничена.*

◀ Пусть Λ_0 — сильнейшая линейная операция предела в X, порождающая ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и Λ, а E^+ — квазизамыкание в (X, Λ) выпуклой оболочки E последовательности $(\gamma_{k_n} x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$. Докажем, что последовательность $\hat{s} = (s_i : i \in \mathbb{N})$ сходится в (X, Λ_0). Пусть $x \in \Lambda(\hat{s})$ и $r_i = \sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n$ (удобно считать $\alpha_n > 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$). Так как последовательность векторов $(r_{i+m} - r_i)^{-1}(s_{i+m} - s_i) \in E$, $m \in \mathbb{N}$, сходится в (X, Λ) к $(r - r_i)^{-1}(x - s_i) \in E^+$, а E^+ ограничено, то последовательность $(x - s_i : i \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в (X, Λ_0), т. е. $x \in \Lambda_0(\hat{s})$. Учитывая это и утверждение а) теоремы 3.30, легко убедиться, что для пространств (X, Λ_0), $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и системы отображений F выполняются условия теоремы 3.55. ▶

С учетом предложения 3.50 из следствия 3.11 вытекает

Следствие 3.12. *Пусть* (X, Λ) *— квазиполное линейное пространство, в котором для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов* x_n *и чисел* $\gamma_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *последовательность* $(\gamma_n x_n : n \in \mathbb{N})$ *обладает подпоследовательностью, квазизамыкание выпуклой оболочки которой ограничено, а* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, указанное в теореме 3.55. Если система* F *ограниченных аддитивных отображений* X *в* Y *такая, что для каждого* $x \in X$ *множество* $\{f(x) : f \in F\}$ *ограничено, то* F *равномерно ограничена.* ▶

В связи с теоремой 3.55 и следствиями 3.11, 3.12 см. [70], с. 636, 658, и приведенное ниже замечание 3.14.

Из теорем 3.44, 3.55 и предложения 3.45 вытекает

Следствие 3.13. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства, указанные в теореме 3.55, а* $\mathcal{F}_0$ *— множество всех секвенциально непрерывных либо аддитивных, либо вещественно линейных, либо линейных отображений* X *в* Y. *Тогда в* $\mathcal{F}_0$ *операция предела* Λ_X *поточечной сходимости на* X *соответствует также равномерной сходимости на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в* X, *а при полном* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *линейное пространство* $(\mathcal{F}_0, \Lambda_X)$ *полно.* ▶

Теорема 3.56. *Пусть* (X, Λ) — *линейное пространство,* $M \subset X$ — *такое выпуклое подмножество, имеющее ограниченное квазизамыкание* M^+, *что для любых последовательностей векторов* $x_n \in M$ *и чисел* $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *последовательность векторов* $\sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n x_n$, $i \in \mathbb{N}$, *при* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ *сходится,* X' — *вещественно линейная оболочка множества* M^+, G — *выпуклая оболочка множества* $M \cup (-M) + \Lambda(\dot{0})$, *а* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — *линейное пространство, указанное в теореме 3.55. Тогда*

а) если для $H \subset X$ *множество* $H + \Lambda(\dot{0})$ *радиально уравновешено и поглощает каждый вектор из* X', *то множество* $H + H^+$ *поглощает* G, *причем если* $H + \Lambda(\dot{0})$ *еще и выпукло, то* H^+ *тоже поглощает* G;

б) если система F *ограниченных аддитивных отображений* X *в* Y *такая, что для каждого* $x \in M^+$ *множество* $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ *ограничено, то для любого* $r \in \mathbb{R}$ *множество* $F(rG) = \bigcup\limits_{f \in F} f(rG)$ *ограничено (в случае секвенциально непрерывных отображений* $f \in F$ *ограничено и* $F(rG^+)$*).*

◀ (а) Достаточно доказать, что $H + H^+$ поглощает каждую последовательность $\hat{e}$ векторов из G. С помощью $\hat{e}$ указанным в предложении 3.51 способом построим полное полунормируемое вещественное линейное пространство (X_1, Λ_1). Из предложений 3.50 и 3.51 следует, что $X_1 \subset X'$, а сходящаяся в (X_1, Λ_1) последовательность сходится к тому же пределу и в (X, Λ). Очевидно, множество $(H + \Lambda(\dot{0})) \cap X_1 = H \cap X_1 + \Lambda(\dot{0})$ поглощает каждый вектор из X_1. Согласно следствию 3.10, для $H_1 = H \cap X_1$ множество $H_1 + \overline{H}_1$, где замыкание взято в (X_1, Λ_1), является окрестностью нуля в (X_1, Λ_1) и, значит, поглощает ограниченную последовательность $\hat{e}$. Однако $H_1 + \overline{H}_1 \subset H + H^+$. Следовательно, $H + H^+$ поглощает $\hat{e}$.

(б) Используя а), доказательство можно провести по аналогии с теоремой 3.55. Однако мы проведем его с использованием теоремы 3.55. Поскольку M^+ выпукло, каждый вектор $z \in X'$ представляется в виде $z = \alpha x + \beta \xi$, где $x \in M^+$, $\xi \in M^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Кроме того, в силу предложения 3.43 имеем также $f(z) \in \alpha f(x) + \beta f(\xi) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Поэтому множество $F(z)$ ограничено. Докажем ограниченность $F(M)$. Рассмотрим некоторую последовательность $\hat{e} = (e_n : n \in \mathbb{N})$ в M. При помощи $\hat{e}$, как и в доказательстве утверждения а), построим полное полунормируемое вещественное линейное пространство (X_1, Λ_1). Так как пространство (X_1, Λ_1) удовлетворяет условиям следствия 3.10, а ограниченное в нем множество ограничено и в (X, Λ), то для пространств (X_1, Λ_1), $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и системы $F' = \{f' = f|_{X_1} : f \in F\}$ отображений X_1 в Y выполняются условия теоремы 3.55. Поэтому система F' равностепенно $(\Lambda_1, \widetilde{\Lambda})$-секвенциально непрерывна и, значит, равномерно ограничена. Но тогда для любой последовательности отображений $f_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$, из равенств $f_n(e_n) = f'_n(e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, где $f'_n = f_n|_{X_1}$, вытекает, что последовательность $(f_n(e_n) : n \in \mathbb{N})$ ограничена в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Таким образом, $F(M)$ ограничено. Отсюда с использованием предложения 3.43 легко получаем также ограниченность $F(rG)$. Если отображения $f \in F$ секвенциально непрерывны, то в силу теоремы 1.68 $F(rG^+) \subset (F(rG))^+$. Отсюда следует ограниченность $F(rG^+)$, так как с учетом предложения 3.17 в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ квазизамыкание ограниченного множества ограничено. ▶

Утверждение а) теоремы 3.56 усиливает известный результат в [70], с. 657. На основании следствия 3.12 и теоремы 3.56 сформулируем следующие две теоремы для топологических векторных пространств, усиливающие известные результаты в [54], с. 57, [69], с. 106, [70], с. 658.

Теорема 3.57. *Пусть (X, τ) и $(Y, \widetilde{\tau})$ — топологические векторные пространства, причем (X, τ) секвенциально полно и в нем для любых сходящихся к нулю последовательностей векторов x_n и чисел $\gamma_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(\gamma_n x_n : n \in \mathbb{N})$ обладает подпоследовательностью, имеющей ограниченную выпуклую оболочку. Если система F ограниченных аддитивных отображений X в Y такая, что для каждого $x \in X$ множество $\{f(x) : f \in F\}$ ограничено, то система F равномерно ограничена.* ▶

Теорема 3.58. *Пусть (X, τ) и $(Y, \widetilde{\tau})$ — топологические векторные пространства, $M \subset X$ — выпуклое, ограниченное и секвенциально полное подмножество, а G — выпуклая оболочка множества $M \cup (-M) + \overline{\{0\}}$. Если система F ограниченных аддитивных отображений X в Y такая, что для каждого $x \in M$ множество $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ ограничено, то для любого $r \in \mathbb{R}$ множество $F(rG) = \bigcup\limits_{f \in F} f(rG)$ ограничено (в случае $(\tau, \widetilde{\tau})$-непрерывных отображений $f \in F$ ограничено и $F(r\overline{G})$).*

◀ Пусть Λ и $\widetilde{\Lambda}$ — линейные операции предела, определенные соответственно топологиями τ в X и $\widetilde{\tau}$ в Y. Заметим, что ограниченность множества в топологическом векторном пространстве равносильна его ограниченности в соответствующем линейном пространстве с операцией предела. В силу предложения 3.18 в (X, Λ) множество $M+\Lambda(\dot{0})$ замкнуто, ограничено, выпукло и полно. С использованием утверждения а) предложения 3.50 и полноты множества $M+\Lambda(\dot{0})$ легко доказывается, что для любых последовательностей векторов $x_n \in M$ и чисел $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $\sum\limits_{n=1}^{i} \alpha_n x_n$, $i \in \mathbb{N}$, при $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$ сходится в (X, Λ). Заметим еще, что $M^+ = M+\Lambda(\dot{0})$ и в силу $F(\Lambda(\dot{0})) \subset \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для любого $x \in M+\Lambda(\dot{0})$ множество $F(x)$ ограничено, причем $\Lambda(\dot{0})$ совпадает с τ-замыканием $\overline{\{0\}}$. Остается учесть, что для пространств (X, Λ), $(Y, \widetilde{\Lambda})$, множества M и системы отображений F выполняются условия теоремы 3.56. ▶

Примером топологического векторного пространства (X, τ) и его подмножества M, удовлетворяющих условиям теорем 3.57 и 3.58, но не удовлетворяющих условиям аналогичных теорем, сформулированных в [54] и [69], могут служить пространство (l_1, τ^*) и в нем замкнутый шар, где τ^* — слабая топология нормированного линейного пространства l_1 (в связи с этим см. [32], с. 292, и [69], с. 249).

В качестве еще одного применения теоремы 3.54 докажем следующий вариант *теоремы об открытом отображении* (см. [47], с. 127; [54], с. 58—60; [69], с. 107, 210).

Теорема 3.59. *Пусть* (X, Λ) *— полное полуметризуемое линейное пространство, а* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, удовлетворяющее условиям теоремы 3.54, причем любые два вектора из* Y*, разность которых не принадлежит* $\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$*, имеют непересекающиеся окрестности. Если существует ограниченное аддитивное отображение* f *векторного пространства* X *на* Y*, то пространство* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *полуметризуемо и полно, причем в случае локально выпуклого (полунормируемого)* (X, Λ) *таково и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$*. Кроме того, для всякой окрестности нуля* w *пространства* (X, Λ) *множество* $f(w)+\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ *является окрестностью нуля в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$*, причем в случае* $f(\Lambda(\dot{0})) = \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ *множество* $f(w)$ *тоже является окрестностью нуля в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *и, следовательно,* f *является открытым отображением.*

◀ В силу утверждения б) теоремы 3.52 отображение f секвенциально непрерывно. Пусть d — такая инвариантная относительно сдвигов полуметрика на X, определяющая операцию предела Λ, что открытые шары с центром в нуле уравновешены. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $u_n = \{x \in X : d(x, 0) < 2^{-n}\}$ и $v_n = f(u_n)$. Пусть $y \in Y$. В силу $f(X) = Y$ существует такое $x \in X$, что $y = f(x)$. Однако $x \in k u_n$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Так как f аддитивно, то $f(k u_n) = k v_n$ и $y = f(x) \in f(k u_n) = k v_n$. Поэтому множество v_n поглощающе. Пусть теперь $y \in v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ и $t \in [-1; 1]$. Тогда $ty \in t f(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для некоторого $x \in u_n$, причем $tx \in u_n$. В силу предложения 3.43 $t f(x) \in f(tx) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Следовательно, $ty \in f(tx) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = f(tx) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Поэтому множество $v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ вещественно уравновешено. Но тогда в силу теоремы 3.54 множество $v_n + v_n^+$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Из $u_{n+1} + u_{n+1} \subset u_n$ получаем $v_{n+1} + v_{n+1} \subset v_n$ и $v_{n+1}^+ + v_{n+1}^+ \subset v_n^+$. Значит, v_n^+ тоже является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Система окрестностей нуля $\{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ определяет в Y некоторую вещественно линейную операцию предела $\widetilde{\Lambda}_0$, причем $\widetilde{\Lambda} \leqslant \widetilde{\Lambda}_0$ и пространство $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$ полуметризуемо. В силу секвенциальной непрерывности f каждая окрестность нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ содержит некоторое v_n. Поэтому из условия, наложенного на $(Y, \widetilde{\Lambda})$, вытекает, что $\widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) = \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Докажем включение $v_{n+1}^+ \subset v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Рассмотрим некоторое $y_1 \in v_{n+1}^+$ и последовательно для каждого $i \in \mathbb{N}$ выберем $y_i \in v_{n+i}^+$ следующим образом. Пусть y_i для некоторого $i \in \mathbb{N}$ уже выбрано. Так как v_{n+i+1}^+ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, а $y_i \in v_{n+i}^+$, то $v_{n+i} \cap (y_i - v_{n+i+1}^+) \neq \varnothing$. Отсюда вытекает существование такого $x_i \in u_{n+i}$, что $f(x_i) \in y_i - v_{n+i+1}^+$. Положим $y_{i+1} = y_i - f(x_i)$. Очевидно, $y_{i+1} \in v_{n+i+1}^+$. Построенная последовательность $(y_i : i \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Поскольку $d(x_i, 0) < 2^{-n-i}$, последовательность векторов $s_k = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i$, $k \in \mathbb{N}$, фундаментальна в полном пространстве (X, Λ) и, значит, сходится к некоторому $x \in X$. Ясно, что $d(x, 0) < 2^{-n}$, т. е. $x \in u_n$. Из равенств $f(x_i) = y_i - y_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, получаем $f(s_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} f(x_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} (y_i - y_{i+1}) = y_1 - y_{k+1}$. Поэтому в силу секвенциальной непрерывности f последовательность векторов $y_1 - y_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, сходится к $f(x)$ в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Но тогда она сходится к каждому из векторов $f(x)$ и y_1 в $(Y, \widetilde{\Lambda}_0)$. Следовательно, $y_1 \in f(x) + \widetilde{\Lambda}_0(\dot{0}) = f(x) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, т. е. $v_{n+1}^+ \subset v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Из этого включения вытекает, что $\widetilde{\Lambda}_0 = \widetilde{\Lambda}$. Таким образом, пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ полуметризуемо, причем $\{v_n^+ : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) : n \in \mathbb{N}\}$ являются его фундаментальными системами окрестностей нуля. Очевидно, для всякой окрестности нуля w пространства (X, Λ) найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $u_n \subset w$. Поэтому $v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) \subset f(w) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ и, значит, $f(w) + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. В случае $f(\Lambda(\dot{0})) = \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ с учетом $u_n = u_n + \Lambda(\dot{0})$ имеем $v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = f(u_n + \Lambda(\dot{0})) = f(u_n) \subset$ $\subset f(w)$, т. е. $f(w)$ является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

Докажем полноту $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Рассмотрим в нем фундаментальную последовательность $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ и фундаментальную систему окрестностей нуля $\{v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) : n \in \mathbb{N}\}$. Подпоследовательность $\hat{z}' = (z_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ выберем так, чтобы $z_{k_n} - z_{k_{n+1}} \in v_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $z_{k_n} - z_{k_{n+1}} = f(\xi_n) + \eta_n$, где $\xi_n \in u_n$ и $\eta_n \in$ $\in \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Положим $\xi_n' = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ и $\eta_n' = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i$. Имеем $z_{k_1} - z_{k_{n+1}} =$ $= f(\xi_n') + \eta_n'$, причем $\eta_n' \in \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Последовательность $(\eta_n' : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, а $(\xi_n' : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна в (X, Λ) и, следовательно, сходится к некоторому $\xi \in X$. Учитывая это, из равенств $z_{k_{n+1}} = z_{k_1} - f(\xi_n') - \eta_n'$, $n \in \mathbb{N}$, получим, что $\hat{z}'$ сходится к $z_{k_1} - f(\xi)$. Тем самым $\hat{z}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\hat{z}'$. Поэтому $\hat{z}$ сходится, т. е. $(Y, \widetilde{\Lambda})$ полно.

В случае локально выпуклого пространства (X, Λ) указанную выше полуметрику d можно выбрать так, чтобы множества u_n были выпуклыми. Тогда множества v_n^+ тоже будут выпуклыми, а пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ локально выпуклым. Если же (X, Λ) полунормируемо, а полуметрика d определена полунормой, то $u_n = 2^{-n} u_1$ и $v_n^+ = 2^{-n} v_1^+$. Так как $\{2^{-n} v_1^+ : n \in \mathbb{N}\}$ является фундаментальной системой окрестностей нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то v_1^+ является ограниченной и выпуклой окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому, согласно теореме 3.22, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ полунормируемо. ▶

Замечание 3.13. В силу предложения 3.48, если в теореме 3.59 условие типа отделимости пространства $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ заменить ограниченностью в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ квазизамыкания секвенциально квазикомпактного множества, то утверждения о полуметризуемости $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$, а также его локальной выпуклости или полунормируемости можно доказать без условия полноты $(X,\,\Lambda)$.

На основании теоремы 3.59 и замечания 3.13 справедлива

Теорема 3.60. *Пусть $(X,\,\tau)$ — полуметризуемое топологическое векторное пространство, $(Y,\,\widetilde{\tau})$ — секвенциально полное топологическое векторное пространство с секвенциальной топологией $\widetilde{\tau}$, в котором для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{y}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю, а выпуклая оболочка некоторой подпоследовательности $\hat{y}' \prec \hat{y}$ ограничена. Если существует ограниченное аддитивное отображение f векторного пространства X на Y, то пространство $(Y,\,\widetilde{\tau})$ полуметризуемо, причем в случае локально выпуклого (полунормируемого) $(X,\,\tau)$ таково и $(Y,\,\widetilde{\tau})$. Кроме того, если при этом $(X,\,\tau)$ полно, то для всякой окрестности нуля w пространства $(X,\,\tau)$ множество $f(w)+\overline{\{0\}}$ является окрестностью нуля в $(Y,\,\widetilde{\tau})$, причем в случае $f\bigl(\overline{\{0\}}\bigr)=\overline{\{0\}}$ множество $f(w)$ тоже является окрестностью нуля в $(Y,\,\widetilde{\tau})$ и, следовательно, f является открытым отображением.* ▶

Замечание 3.14. Пусть $(X,\,\Lambda)$ — линейное пространство, а τ' — сильнейшая векторная топология в X и τ'' — сильнейшая *локально выпуклая* топология в X, состоящие из открытых подмножеств пространства $(X,\,\Lambda)$ (эти топологии могут определять отличные от Λ операции предела). Если $(X,\,\Lambda)$ удовлетворяет условию 1) предложения 3.46, то топологическое векторное пространство $(X,\,\tau'')$ *борнологическое*, причем в силу утверждения а) теоремы 3.30 этим способом получаются все борнологические пространства. Если же $(X,\,\Lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.54 (или следствия 3.10), то $(X,\,\tau'')$ *бочечное* и борнологическое, а $(X,\,\tau')$ *ультрабочечное* (определения этих понятий даны, например, в [70], с. 117, 585, 586, 651). Заметим, что *инфрабочечное* (в частности, борнологическое) секвенциально полное пространство бочечно (см. [70], с. 657; это следует и из утверждения а) теоремы 3.56). Отметим еще, что по аналогии с известными из [70], с. 599, результатами можно сформулировать варианты теоремы об открытом отображении и теоремы о замкнутом графике, в которых вместо ультрабочечности пространства требуется выполнение более обозримых условий, указанных в теореме 3.54 (или в следствии 3.10).

Теорема 3.61. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, причем $(Y, \widetilde{\Lambda})$ имеет такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u+u : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Если последовательность $(f_n : n \in \mathbb{N})$ линейных (аддитивных) отображений X в Y равностепенно секвенциально непрерывна, то наибольшее подмножество $H \subset X$, на котором она поточечно сходится к секвенциально непрерывному линейному (аддитивному) отображению $f : X \to Y$, а также множество $\widetilde{H}$ тех $x \in X$, для которых последовательность $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ фундаментальна, являются замкнутыми векторными (вещественными векторными) подпространствами в (X, Λ).*

◀ Так как $0 \in H$, то $H \neq \varnothing$. В силу теоремы 2.38 и замечания 3.11 множество H замкнуто в (X, Λ). Очевидно, в рассмотрении нуждается лишь случай аддитивных отображений. Пусть вектор $x \in X$ является конечной линейной комбинацией векторов из H с рациональными коэффициентами. Поскольку аддитивное отображение однородно относительно умножения на рациональные числа, последовательность $(f_n(x) : n \in \mathbb{N})$ сходится к $f(x)$. Значит, $x \in H$. Поэтому H, будучи замкнутым множеством, является вещественным векторным подпространством в (X, Λ). Утверждение относитело $\widetilde{H}$ доказывается аналогично. ▶

Предложение 3.52. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $(f_i : i \in \mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная последовательность линейных отображений X в Y, а $\widetilde{p}$ — секвенциально непрерывная полунорма на Y. Тогда по формуле $p(x) = \overline{\lim\limits_i}\, \widetilde{p}(f_i(x))$, $x \in X$, определяется секвенциально непрерывная полунорма p на X.*

◀ Так как для каждого $x \in X$ последовательность векторов $f_i(x)$, $i \in \mathbb{N}$, ограничена в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, а полунорма $\widetilde{p}$ секвенциально непрерывна, то последовательность чисел $\widetilde{p}(f_i(x))$, $i \in \mathbb{N}$, ограничена, т. е. $p(x) < \infty$. Проверить, что p является полунормой на X, нетрудно. Докажем секвенциальную непрерывность p. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ из определения числа $p(x_n)$ следует существование такого $i_n \in \mathbb{N}$, что $p(x_n) < \widetilde{p}(f_{i_n}(x_n)) + n^{-1}$, причем можно считать $i_n < i_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из равностепенно секвенциальной непрерывности последовательности отображений f_i, $i\in\mathbb{N}$, следует, что последовательность $(f_{i_n}(x_n):n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю. В силу секвенциальной непрерывности $\widetilde{p}$ последовательности $(\widetilde{p}(f_{i_n}(x_n)):n\in\mathbb{N})$ и $(p(x_n):n\in\mathbb{N})$ сходятся к нулю. Остается учесть предложение 3.8. ▶

Теорема 3.62. *Пусть (X,Λ) — линейное пространство, $\hat{f}=(f_n:n\in\mathbb{N})$ — равностепенно секвенциально непрерывная последовательность линейных функционалов на X, а X_n — ядро функционала f_n. Тогда*

а) по формуле $p(x)=\overline{\lim\limits_n}\,|f_n(x)|$, $x\in X$, определяется секвенциально непрерывная полунорма p на X;

б) множество H тех $x\in X$, для которых последовательность чисел $f_n(x)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится, является замкнутым векторным подпространством в X и содержит векторное подпространство $X_0=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\bigcap\limits_{n\geqslant k}X_n$;

в) существует такой линейный функционал f на X, что $|f(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$ и последовательность $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в H;

г) для каждого сепарабельного векторного подпространства $X'\subset X$ существует такая подпоследовательность $\hat{f}'=(f_{i_n}:n\in\mathbb{N})$, что множество H' тех $x\in X$, для которых последовательность чисел $f_{i_n}(x)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится, содержит X', а значит, и $X'+\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}\bigcap\limits_{n\geqslant k}X_{i_n}$.

◀ Утверждения а) и б) вытекают из предложения 3.52 и теоремы 3.61. Включение $X_0\subset H$ очевидно. Докажем в). По формуле $g(y)=\lim\limits_n f_n(y)$, $y\in H$, определяется линейный функционал g на H. Так как $|g(y)|=p(y)$ для всех $y\in H$, то, по *теореме Хана–Банаха* о продолжении линейного функционала с сохранением мажоранты (см. [47], с. 135—138; [54], с. 68—70), существует такой линейный функционал f на X, что $f(y)=g(y)$ и $|f(x)|\leqslant p(x)$ для всех $y\in H$ и $x\in X$. Из этого неравенства следует, что функционал f секвенциально непрерывен. В силу теоремы 3.44 $\hat{f}$ сходится к f равномерно на каждом секвенциально квазикомпактном подмножестве в H. Утверждение г) вытекает из теоремы 3.45 с учетом утверждения а) теоремы 3.52. ▶

Учитывая, что замкнутое линейное подпространство рефлексивного банахова пространства рефлексивно, а нормированное линейное пространство, имеющее сепарабельное сопряженное пространство, само сепарабельно (см. [30], с. 77—79; [32], с. 237), из теоремы 3.62 можно получить известный результат о том, что в рефлексивном банаховом пространстве ограниченное множество слабо секвенциально квазикомпактно (см. [8], с. 83—85; [31], с. 180, 201, и приведенное ниже замечание 3.15).

Теорема 3.63. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — *линейные пространства;* $\mathcal{F}_0$ — *множество всех секвенциально непрерывных в нуле отображений* $f : X \to Y$, *удовлетворяющих равенству* $f(nx) = nf(x)$ *для всех* $x \in X$ *и* $n \in \mathbb{N}$; Λ_0 — *операция предела в* $\mathcal{F}_0$, *соответствующая равномерной сходимости на каждом ограниченном подмножестве в* (X, Λ). *Если* Λ *и* $\widetilde{\Lambda}$ *определяются полунормами* p *на* X *и* $\widetilde{p}$ *на* Y *соответственно, то* Λ_0 *определяется полунормой* p_0 *на* $\mathcal{F}_0$, *заданной по формуле*

$$p_0(f) = \sup\{\widetilde{p}(f(x)) : x \in X,\ p(x) \leqslant 1\}, \quad f \in \mathcal{F}_0. \tag{1}$$

При этом справедливы утверждения:

а) для всех $x \in X$ *и* $f \in \mathcal{F}_0$ *имеет место неравенство*

$$\widetilde{p}(f(x)) \leqslant p_0(f)p(x); \tag{2}$$

б) если $p(x_0) > 0$ *для некоторого* $x_0 \in X$, *то*

$$p_0(f) = \sup\left\{\frac{\widetilde{p}(f(x))}{p(x)} : x \in X,\ p(x) > 0\right\}, \quad f \in \mathcal{F}_0, \tag{3}$$

причем для любого $t \in (0;\, 1)$

$$p_0(f) = \sup\{\widetilde{p}(f(x)) : x \in X,\ t < p(x) < 1\}, \quad f \in \mathcal{F}_0, \tag{4}$$

а в случае положительно однородного $f \in \mathcal{F}_0$

$$p_0(f) = \sup\{\widetilde{p}(f(x)) : x \in X,\ p(x) = 1\}; \tag{5}$$

в) если $\widetilde{p}$ *является нормой, то* p_0 *тоже является нормой.*

◀ Множество $v = \{x \in X : p(x) \leqslant 1\}$ ограничено в (X, Λ). В силу теоремы 3.52 для каждого $f \in \mathcal{F}_0$ множество $f(v)$ ограничено в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому числовое множество $\widetilde{p}(f(v))$ тоже ограничено. Следовательно, в (1) правая часть конечна. Ясно, что при помощи равенства (1) определяется полунорма p_0 на $\mathcal{F}_0$. Докажем, что она определяет операцию предела Λ_0 в $\mathcal{F}_0$. Пусть отображение $f \in \mathcal{F}_0$ и последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ в $\mathcal{F}_0$ такие, что $\lim\limits_n p_0(f_n - f) = 0$. Рассмотрим ограниченную последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Найдется такое рациональное $r > 0$, что $p(rx_n) \leqslant 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно,

$$r\widetilde{p}(f_n(x_n) - f(x_n)) = \widetilde{p}(f_n(rx_n) - f(rx_n)) \leqslant p_0(f_n - f).$$

Отсюда получаем $\lim\limits_n \widetilde{p}(f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$. Поэтому $f \in \Lambda_0(\hat{f})$.

Пусть, обратно, $f \in \Lambda_0(\hat{f})$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $x_n \in X$ так, чтобы $p(x_n) \leqslant 1$ и $p_0(f_n - f) < \widetilde{p}(f_n(x_n) - f(x_n)) + n^{-1}$. Так как $f \in \Lambda_0(\hat{f})$, а последовательность $(x_n : n \in \mathbb{N})$ ограничена в (X, Λ), то $\lim\limits_n \widetilde{p}(f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$. Значит, $\lim\limits_n p_0(f_n - f) = 0$, т. е. p_0 определяет в $\mathcal{F}_0$ операцию предела Λ_0.

(а) Пусть $x \in X$. Если $p(x) = 0$, то $0 \in \Lambda(\dot{x})$. В силу секвенциальной непрерывности в нуле отображения $f \in \mathcal{F}_0$ и равенства $f(0) = 0$ для $y = f(x)$ имеем, что $0 \in \widetilde{\Lambda}(\dot{y})$. Поэтому $\widetilde{p}(f(x)) = 0$ и, значит, имеет место (2). Если же $p(x) > 0$, то для каждого натурального $n > 1$ рациональное число $r_n > 0$ можно выбрать так, чтобы $p(x) \leqslant r_n^{-1} \leqslant (n-1)^{-1} n p(x)$. С учетом $p(r_n x) \leqslant 1$ имеем, что $r_n \widetilde{p}(f(x)) = \widetilde{p}(f(r_n x)) \leqslant p_0(f)$. Поэтому $\widetilde{p}(f(x)) \leqslant r_n^{-1} p_0(f) \leqslant$ $\leqslant (n-1)^{-1} n p(x) p_0(f)$. Отсюда получаем

$$\widetilde{p}(f(x)) \leqslant \lim_n\, (n-1)^{-1} n p(x) p_0(f) = p(x) p_0(f).$$

(б) С учетом (2) в случае $p_0(f) = 0$ равенство (3) очевидно. Пусть $p_0(f) > 0$. В силу (1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $x_n \in X$, что $p(x_n) \leqslant 1$ и $\widetilde{p}(f(x_n)) > p_0(f) - n^{-1}$, причем $p_0(f) - n^{-1} > 0$ для всех $n \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что $p(x_n) > 0$ при $n \geqslant m$, так как в противном случае из (2) получили бы $\widetilde{p}(f(x_n)) = 0$, что невозможно. Ясно, что $\widetilde{p}(f(x_n))(p(x_n))^{-1} \geqslant p_0(f) - n^{-1}$ для всех $n \geqslant m$. Кроме того, в силу (2) при $p(x) > 0$ имеем также $\widetilde{p}(f(x))(p(x))^{-1} \leqslant p_0(f)$. Из этих неравенств вытекает (3).

Докажем (4) и (5). Пусть $0 < t < 1$ и $f \in \mathcal{F}_0$. При $p_0(f) = 0$ равенства (4) и (5) очевидны. В случае $p_0(f) > 0$ рассмотрим указанные выше последовательность векторов $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, и число $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $n \geqslant m$ выберем рациональное число $r_n > (p_0(f) - n^{-1})(\widetilde{p}(f(x_n)))^{-1}$ так, чтобы $t < p(r_n x_n) < 1$. Тогда $\widetilde{p}(f(r_n x_n)) = r_n \widetilde{p}(f(x_n)) > p_0(f) - n^{-1}$ при $n \geqslant m$. Следовательно, имеет место (4). Если f положительно однородно, то при $n \geqslant m$ положим $r'_n = (p(x_n))^{-1}$. Тогда для всех $n \geqslant m$ имеем $p(r'_n x_n) = 1$ и $\widetilde{p}(f(r'_n x_n)) = r'_n \widetilde{p}(f(x_n)) > p_0(f) - n^{-1}$. Поэтому имеет место (5).

(в) Пусть $\widetilde{p}$ — норма, а $p_0(f) = 0$ для некоторого $f \in \mathcal{F}_0$. Для каждого $x \in X$ выберем рациональное $r > 0$ так, чтобы $p(rx) \leqslant 1$. Тогда в силу (1) $r\widetilde{p}(f(x)) = \widetilde{p}(f(rx)) = 0$. Поэтому $\widetilde{p}(f(x)) = 0$ и, значит, $f(x) = 0$. Но тогда $f = 0$, т. е. p_0 является нормой. ►

Теорема 3.64. *Пусть μ_v — функционал Минковского поглощающего, вещественно уравновешенного и выпуклого множества v в векторном пространстве X, $\hat{x} = (x_n\colon n \in \mathbb{N})$ — последовательность в X, для которой числовое множество $\{\mu_v(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено, а $\gamma > 1$ — некоторое число. Тогда существует такая подпоследовательность $\hat{x}' \prec \hat{x}$, что $\mu_v(x) > \gamma$ для любого вектора x из ее выпуклой оболочки.*

◀ Число $k_1 \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $\mu_v(x_{k_1}) \geqslant \gamma + 1$. Докажем существование таких числовых последовательностей $(k_n : n \in \mathbb{N})$ и $(p_n : n \in \mathbb{N})$, где $k_n \in \mathbb{N}$ и $p_n = 1$ или $p_n = -1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, что $k_n < k_{n+1}$ и $1 + \mu_v(x_{k_n}) < \mu_v(x_{k_{n+1}})$, а при каждом $m \in \mathbb{N}$ для любого вектора x из выпуклой оболочки H_m множества $\{p_n x_{k_n} : 1 \leqslant n \leqslant m\}$ выполняется неравенство $\mu_v(x) \geqslant \gamma + 2^{1-m}$. Для этого достаточно в предположении, что при некотором $m \in \mathbb{N}$ числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ и $p_1, p_2, \ldots, p_m$ выбраны, доказать возможность выбора чисел k_{m+1} и p_{m+1} (считается $p_1 = 1$). Последовательность натуральных $i_n > k_m$, $n \in \mathbb{N}$, выберем так, чтобы $i_n < i_{n+1}$ и $1 + \mu_v(x_{i_n}) < \mu_v(x_{i_{n+1}})$ для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\mu_v(x_{i_1}) > 1 + \mu_v(x_{k_m})$. Допустим не существует требуемой пары чисел k_{m+1} и p_{m+1}. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдутся такие $y'_n \in H_m$, $y''_n \in H_m$ и $t'_n \in (0;\, 1)$, $t''_n \in (0;\, 1)$, что

$$\mu_v((1 - t'_n)y'_n + t'_n x_{i_n}) < \gamma + 2^{-m}, \tag{6}$$

$$\mu_v((1 - t''_n)y''_n - t''_n x_{i_n}) < \gamma + 2^{-m}. \tag{7}$$

Отсюда получаем

$$\mu_v(t''_n(1 - t'_n)y'_n + t'_n(1 - t''_n)y''_n) < (t'_n + t''_n)(\gamma + 2^{-m}). \tag{8}$$

Положим $t_n = t''_n(1 - t'_n)(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))^{-1}$. Тогда имеем $1 - t_n = t'_n(1 - t''_n)(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))^{-1}$ и $t_n \in (0;\, 1)$. Неравенство (8) напишем в виде

$$(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))\mu_v(t_n y'_n + (1 - t_n)y''_n) < (t'_n + t''_n)(\gamma + 2^{-m}). \tag{9}$$

Однако $t_n y'_n + (1 - t_n)y''_n \in H_m$ и, значит, $\mu_v(t_n y'_n + (1 - t_n)y''_n) \geqslant \gamma + 2^{1-m}$. Поэтому из (9) следует, что

$$(t''_n(1 - t'_n) + t'_n(1 - t''_n))(\gamma + 2^{1-m}) < (t'_n + t''_n)(\gamma + 2^{-m}).$$

Это неравенство после простых преобразований принимает вид

$$\frac{1}{t'_n} + \frac{1}{t''_n} < \gamma 2^{m+1} + 4. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу (6) и (7) имеем

$$t'_n\mu_v(x_{i_n}) - (1-t'_n)\mu_v(y'_n) < \gamma + 2^{-m},$$

$$t''_n\mu_v(x_{i_n}) - (1-t''_n)\mu_v(y''_n) < \gamma + 2^{-m}.$$

Отсюда с учетом $\mu_v(y'_n) \leqslant \mu_v(x_{k_m})$ и $\mu_v(y''_n) \leqslant \mu_v(x_{k_m})$ получаем

$$t'_n\mu_v(x_{i_n}) < \mu_v(x_{k_m}) + \gamma + 2^{-m}, \quad t''_n\mu_v(x_{i_n}) < \mu_v(x_{k_m}) + \gamma + 2^{-m}.$$

Однако последовательность чисел $\mu_v(x_{i_n})$, $n \in \mathbb{N}$, стремится к бесконечности. Поэтому из последних неравенств вытекает, что числовые последовательности $(t'_n : n \in \mathbb{N})$ и $(t''_n : n \in \mathbb{N})$ сходятся к нулю. А это противоречит неравенству (10). Следовательно, при некотором $s \in \mathbb{N}$ одно из неравенств

$$\mu_v((1-t)x + tx_{i_s}) \geqslant \gamma + 2^{-m}, \quad \mu_v((1-t)x - tx_{i_s}) \geqslant \gamma + 2^{-m}$$

выполняется для всех $x \in H_m$ и $t \in [0;\,1]$. Положим $k_{m+1} = i_s$. Таким образом, возможность выбора требуемых чисел k_{m+1}, p_{m+1}, а значит, и числовых последовательностей $(k_n : n \in \mathbb{N})$, $(p_n : n \in \mathbb{N})$ доказана. Обозначим через H выпуклую оболочку множества $\{p_n x_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, $H = \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} H_m$. Поэтому $\mu_v(x) > \gamma$ для любого $x \in H$. Последовательность натуральных чисел $s_1 < s_2 < \ldots$ выберем так, чтобы последовательность чисел p_{s_n}, $n \in \mathbb{N}$, была стационарной. Тогда подпоследовательность $\hat{x}' = (x_{k_{s_n}} : n \in \mathbb{N})$ последовательности $\hat{x}$ удовлетворяет требованию теоремы. ►

Теорема 3.64 более применима вместе со следующей теоремой об отделении выпуклых множеств (в связи с ней см. [54], с. 70—72, 99).

Теорема 3.65. *Пусть μ_v — функционал Минковского поглощающего выпуклого множества v в векторном пространстве X, $H \subset X$ — такое непустое выпуклое подмножество, что $\inf\limits_{z\in H} \mu_v(z) = \alpha \geqslant 1$, $x_0 \in H$ — некоторый вектор, а μ_u — функционал Минковского множества $u = v - H + x_0$. Тогда $1 \leqslant \mu_v(x_0)(1 + \mu_v(x_0) - \alpha)^{-1} \leqslant \mu_u(x_0) \leqslant \alpha$. Кроме того, существуют линейный функционал f, определенный на X, и число $\gamma \in (0;\,1]$, такие, что $\Re(f(x_0)) = \mu_u(x_0)$, $\Re(f(x)) \leqslant \mu_u(x) \leqslant \mu_v(x)$ и $\Re(f(y)) \leqslant \gamma \leqslant \gamma + \mu_u(x_0) - 1 \leqslant \Re(f(z))$ для всех $x \in X$, $y \in v$ и $z \in H$. При этом если v вещественно уравновешено, то $|\Re(f(x))| \leqslant \mu_v(x)$ и $|\Re(f(y))| \leqslant \gamma$, а если v уравновешено, то $|f(x)| \leqslant \mu_v(x)$ и $|f(y)| \leqslant \gamma$ для всех $x \in X$ и $y \in v$.*

◀ Предположим $\mu_u(x_0)<1$. Тогда найдется такое число $r\in(0;1)$, что $x_0\in ru$. Поэтому $x_0=r(y_0-z_0+x_0)$ для некоторых $y_0\in v$ и $z_0\in H$. Положим $z_1=(1-r)x_0+rz_0$. Очевидно, $z_1\in H$ и $z_1=ry_0$. По условию, $\mu_v(z_1)\geqslant 1$, а с другой стороны, $\mu_v(z_1)=\mu_v(ry_0)=r\mu_v(y_0)\leqslant r<1$. Полученное противоречие доказывает, что $\mu_u(x_0)\geqslant 1$.

Для $\varepsilon>0$, $z\in H$ и $t=\mu_v(z)$ имеем $1\leqslant\alpha\leqslant t$, $(t+\varepsilon)^{-1}z\in v$ и $x_0-(t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}z=(t+\varepsilon)^{-1}z-z+x_0\in u$. Поэтому

$$\mu_u(x_0)-(t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}\mu_u(z)\leqslant\mu_u(x_0-(t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}z)\leqslant 1,$$

т. е. $\mu_u(x_0)\leqslant 1+(t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}\mu_u(z)$. Однако $\mu_u(z)\leqslant t$ и, значит, $\mu_u(x_0)\leqslant 1+t(t-1+\varepsilon)(t+\varepsilon)^{-1}$. Отсюда в силу произвольности ε вытекает, что $\mu_u(x_0)\leqslant t=\mu_v(z)$. Но тогда в силу произвольности z получаем $\mu_u(x_0)\leqslant\alpha$.

Обозначим $r=\mu_u(x_0)$. Имеем, что $1\leqslant r\leqslant\alpha$ и $(r+\varepsilon)^{-1}x_0\in u$ для любого $\varepsilon>0$. Поэтому $(r+\varepsilon)^{-1}x_0=y'-z'+x_0$ для некоторых $y'\in v$ и $z'\in H$. Так как $z'-(r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}x_0=y'$, то

$$\mu_v(z')-(r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}\mu_v(x_0)\leqslant$$
$$\leqslant\mu_v(z'-(r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}x_0)=\mu_v(y')\leqslant 1,$$

т. е. $\mu_v(z')\leqslant 1+(r-1+\varepsilon)(r+\varepsilon)^{-1}\mu_v(x_0)$. Отсюда в силу произвольности ε получаем $\mu_v(z')\leqslant 1+(r-1)r^{-1}\mu_v(x_0)$. Следовательно, $\alpha\leqslant 1+(r-1)r^{-1}\mu_v(x_0)$. Из этого неравенства для числа $r=\mu_u(x_0)$ получается указанная в теореме оценка снизу.

На одномерном вещественном векторном подпространстве, содержащем x_0, определим вещественно линейный вещественный функционал φ_1, положив $\varphi_1(tx_0)=t\mu_u(x_0)\leqslant\mu_u(tx_0)$, $t\in\mathbb{R}$. Согласно теореме Хана–Банаха о продолжении функционала с сохранением мажоранты, существует такой вещественно линейный вещественный функционал φ на X, что $\varphi(tx_0)=\varphi_1(tx_0)=t\mu_u(x_0)$ и $\varphi(x)\leqslant\mu_u(x)\leqslant\mu_v(x)$ для всех $t\in\mathbb{R}$ и $x\in X$. Для любых $y\in v$ и $z\in H$ с учетом $y-z+x_0\in u$ имеем

$$\varphi(y)-\varphi(z)+\mu_u(x_0)=\varphi(y-z+x_0)\leqslant\mu_u(y-z+x_0)\leqslant 1.$$

Отсюда получаем, что $\varphi(y)+\mu_u(x_0)-1\leqslant\varphi(z)$. Обозначим $\gamma=\sup\limits_{y\in v}\varphi(y)$. Очевидно, $\gamma\leqslant\sup\limits_{y\in v}\mu_u(y)\leqslant 1$. Так как $t_0x_0\in v$ для некоторого $t_0>0$ и $\varphi(t_0x_0)=t_0\mu_u(x_0)>0$, то $\gamma>0$. Таким образом, $\varphi(y)\leqslant\gamma\leqslant\gamma+\mu_u(x_0)-1\leqslant\varphi(z)$ для всех $y\in v$ и $z\in H$.

Если множество v вещественно уравновешено, то $-\varphi(x) = \varphi(-x) \leqslant \mu_v(-x) = \mu_v(x)$ и $-\varphi(y) = \varphi(-y) \leqslant \gamma$ для всех $x \in X$ и $y \in v$. Поэтому $|\varphi(x)| \leqslant \mu_v(x)$ и $|\varphi(y)| \leqslant \gamma$. Ясно, что в случае вещественного векторного пространства в качестве требуемого функционала может служить $f = \varphi$.

В случае комплексного векторного пространства X требуемый функционал f определяется формулой $f(x) = \varphi(x) - \mathrm{i}\varphi(\mathrm{i}x)$, $x \in X$. Проверим лишь указанные в теореме оценки для f в случае уравновешенного v. Для $x \in X$ положим $c = |f(x)|(f(x))^{-1}$ при $f(x) \neq 0$ и $c = 1$ при $f(x) = 0$. Тогда получим, что $|c| = 1$ и $|f(x)| = cf(x) = f(cx) = \varphi(cx)$. Однако если v уравновешено, то $\varphi(cx) \leqslant \mu_v(cx) = |c|\mu_v(x) = \mu_v(x)$ и $\varphi(cy) \leqslant \gamma$ для всех $x \in X$ и $y \in v$, так как $cy \in v$. Поэтому $|f(x)| \leqslant \mu_v(x)$ и $|f(y)| \leqslant \gamma$. ►

В векторном пространстве X векторная топология τ называется *локально выпуклой*, если каждая окрестность нуля из τ содержит выпуклую окрестность нуля из τ. Как известно (см. [54], с. 19, 72), в любом топологическом векторном пространстве (X, τ) каждая выпуклая окрестность нуля из τ содержит уравновешенную выпуклую окрестность нуля из τ, причем если пересечение всех выпуклых окрестностей нуля из τ содержит только нуль, то система всех τ-непрерывных линейных функционалов на X разделяет точки в X.

При помощи теорем 3.64 и 3.65 докажем следующую теорему, которая в теории топологических векторных пространств доказывается применением *теоремы Банаха–Алаоглу* и предложения, аналогичного теореме 3.58 (см. [54], с. 80—84).

Теорема 3.66. *Если операция предела линейного пространства (X, Λ) определяется некоторой локально выпуклой топологией τ в X, то для ограниченности подмножества $M \subset X$ достаточна ограниченность числового множества $f(M)$ для любого τ-непрерывного линейного функционала f на X.*

◄ Пусть подмножество $M \subset X$ не ограничено. Тогда существуют последовательность $(y_n : n \in \mathbb{N})$ в M и сходящаяся к нулю последовательность чисел $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, а также выпуклая и уравновешенная окрестность нуля $v \in \tau$, для которых $\alpha_n^2 y_n \notin v$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $x_n = \alpha_n y_n$. Пусть μ_v — функционал Минковского множества v. Очевидно, $\mu_v(x_n) \geqslant \alpha_n^{-1}$. Поэтому числовое множество $\{\mu_v(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено. В силу теоремы 3.64 выпуклая оболочка H некоторой подпоследовательности $(x_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ не пересекается с v. А в силу теоремы 3.65 существуют линейный функционал f на X и число $\gamma > 0$, такие, что $\Re(f(z)) \geqslant \gamma$ и $|f(x)| \leqslant \mu_v(x)$ для всех $z \in H$ и $x \in X$. Из последнего неравенства вытекает τ-непрерывность f. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем также $|f(x_{k_n})| \geqslant |\Re(f(x_{k_n}))| \geqslant \gamma$. Значит, $|f(y_{k_n})| = \alpha_{k_n}^{-1}|f(x_{k_n})| \geqslant \gamma\alpha_{k_n}^{-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда вытекает, что числовое множество $f(M)$ не ограничено. ▶

Отметим, что и, обратно, теорема 3.64 может быть доказана с использованием теоремы 3.66.

В связи с теоремой 3.66 заметим, что если локально выпуклая топология τ в векторном пространстве X содержит все выпуклые открытые окрестности нуля линейного пространства (X, Λ), то Λ-секвенциально непрерывный линейный функционал на X непрерывен в топологии τ (операция предела Λ может не определяться топологией τ). В § 16, n° 9 приведен пример линейного пространства (X, Λ), операция предела которого определяется локально выпуклой топологией в X, и Λ-секвенциально непрерывного линейного функционала на X, не непрерывного в этой топологии. Отсюда вытекает, что в X существуют две различные локально выпуклые топологии, определяющие одну и ту же операцию предела последовательности Λ (другим примером таких топологий, как следует из *теоремы Шура* (см. [32], с. 292), могут служить секвенциальная топология и слабая топология нормированного линейного пространства l_1).

В качестве еще одного применения теорем 3.64 и 3.65 докажем следующее предложение, примыкающее к теореме об открытом отображении.

Предложение 3.53. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, а f — вещественно линейное отображение X на Y. Тогда*

а) если f переводит каждую выпуклую окрестность нуля пространства (X, Λ) в окрестность нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$, то для любого линейного функционала φ на Y, не являющегося секвенциально непрерывным, функционал ψ на X, определенный равенством $\psi(x) = \Re(\varphi(f(x)))$, $x \in X$, тоже не является секвенциально непрерывным;

б) если в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat{y}$ существует такая неограниченная числовая последовательность $\hat{r}$, что $\hat{r}\hat{y}$ сходится к нулю, а отображение f такое, что для любого линейного функционала φ на Y, не являющегося секвенциально непрерывным, функционал ψ на X, определенный равенством $\psi(x) = \Re(\varphi(f(x)))$, $x \in X$, тоже не является секвенциально непрерывным, то f переводит каждую выпуклую окрестность нуля пространства (X, Λ) в окрестность нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

◀ (а) Секвенциальная непрерывность линейного функционала φ на Y эквивалентна секвенциальной непрерывности функционала g на Y, определенного равенством $g(y) = \Re(\varphi(y))$, $y \in Y$. Пусть ψ — функционал на X, определенный равенством $\psi(x) = g(f(x))$, $x \in X$, а $v = \{y \in Y : |g(y)| < 1\}$, $u = \{x \in X : |\psi(x)| < 1\}$. Ясно, что $f(u) = v$, а множества u и v выпуклы. Если g не является секвенциально непрерывным, то v не есть окрестность нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Но тогда u тоже не есть окрестность нуля в (X, Λ). Значит, ψ не является секвенциально непрерывным.

(б) Пусть u — вещественно уравновешенная выпуклая окрестность нуля в (X, Λ). Тогда множество $v = f(u)$ поглощающе, вещественно уравновешено и выпукло. Предположим v не является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, т. е. существует сходящаяся к нулю последовательность векторов $y_n \in Y \backslash v$, $n \in \mathbb{N}$. По условию, для некоторых подпоследовательности $(y_{k_n} : n \in \mathbb{N})$ и стремящейся к бесконечности последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $z_n = r_n y_{k_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Пусть μ_v — функционал Минковского множества v. Имеем, что $\mu_v(z_n) = r_n \mu_v(y_{k_n}) \geqslant r_n$. Поэтому числовое множество $\{\mu_v(z_n) : n \in \mathbb{N}\}$ не ограничено. В силу теоремы 3.64 выпуклая оболочка H некоторой подпоследовательности $(z_{i_n} : n \in \mathbb{N})$ не пересекается с v, а в силу теоремы 3.65 существуют линейный функционал φ на Y и число $\gamma > 0$, такие, что $|\Re(\varphi(y))| \leqslant \gamma$ и $\Re(\varphi(z)) \geqslant \gamma$ для всех $y \in v$ и $z \in H$. Отсюда следует, что функционал ψ на X, определенный равенством $\psi(x) = \Re(\varphi(f(x)))$, $x \in X$, удовлетворяет неравенству $|\psi(x)| \leqslant \gamma$ для всех $x \in u$ и, значит, секвенциально непрерывен. Но тогда, по условию, функционал φ тоже секвенциально непрерывен. Поэтому последовательность чисел $\varphi(z_{i_n})$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Это противоречит неравенству $\Re(\varphi(z_{i_n})) \geqslant \gamma$, $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, v является окрестностью нуля в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. ▶

Докажем следующий вариант теоремы Хана–Банаха (см. [54], с. 68–72; [70], с. 179).

Теорема 3.67. *Секвенциально непрерывный линейный (вещественно линейный) функционал f_1, определенный на векторном (вещественном векторном) подпространстве X_1 линейного пространства (X, Λ), допускает секвенциально непрерывное линейное (вещественно линейное) продолжение на X тогда и только тогда, когда для некоторой выпуклой окрестности нуля w пространства (X, Λ) выполняется включение $w \cap X_1 \subset w_1 = \{x \in X_1 : |f_1(x)| < 1\}$.*

◀ Пусть f — секвенциально непрерывное линейное (вещественно линейное) продолжение на X функционала f_1. Тогда множество $w=\{x\in X:|f(x)|<1\}$ является выпуклой окрестностью нуля пространства $(X,\,\Lambda)$, причем $w\cap X_1=w_1$.

Пусть, обратно, $w\cap X_1\subset w_1$ для некоторой выпуклой окрестности нуля w пространства $(X,\,\Lambda)$. Рассмотрим выпуклую уравновешенную окрестность нуля $v\subset w$ пространства $(X,\,\Lambda)$ и ее функционал Минковского μ_v. Если $f_1(x)\neq 0$ для некоторого $x\in X_1$, а $r=|f_1(x)|^{-1}$, то $|f_1(rx)|=1$ и, значит, $rx\notin w_1$. Так как $v\cap X_1\subset w_1$, то $rx\notin v$. Отсюда вытекает, что $1\leqslant\mu_v(rx)=r\mu_v(x)$, т. е. $|f_1(x)|\leqslant\mu_v(x)$. Последнее неравенство имеет место для всех $x\in X_1$. Поэтому в силу секвенциальной непрерывности μ_v и теоремы Хана–Банаха о продолжении функционала с сохранением мажоранты функционал f_1 допускает секвенциально непрерывное линейное (вещественно линейное) продолжение на X. ▶

Предложение 3.54. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ — линейное пространство, а τ — сильнейшая локально выпуклая топология в X, состоящая из открытых подмножеств этого пространства. Если векторное (вещественное векторное) подпространство $X_1\subset X$ такое, что τ индуцирует в X_1 топологию, совпадающую с секвенциальной топологией подпространства $(X_1,\,\Lambda_1)\subset\subset(X,\,\Lambda)$, то всякий секвенциально непрерывный линейный (вещественно линейный) функционал f_1, определенный на X_1, допускает секвенциально непрерывное линейное (вещественно линейное) продолжение на X. В частности, утверждение о продолжении функционала верно в случаях, когда $(X,\,\Lambda)$ локально выпукло и X_1 замкнуто или $(X,\,\Lambda)$ является локально выпуклым пространством Фреше–Урысона и X_1 произвольно.*

◀ Так как f_1 секвенциально непрерывен, то множество $M=\{x\in X_1:|f_1(x)|=1\}$ замкнуто в $(X_1,\,\Lambda_1)$. Отсюда в силу наложенного на X_1 условия вытекает, что $\overline{M}\cap X_1=M$, где $\overline{M}$ — τ-замыкание множества M. Поскольку $0\notin\overline{M}$, существует непересекающаяся с M выпуклая окрестность нуля $w\in\tau$. Ясно, что $|f_1(x)|<1$ для $x\in w\cap X_1$. Остается применить теорему 3.67. ▶

Замечание 3.15. Векторное пространство X^* всех секвенциально непрерывных линейных функционалов, определенных на линейном пространстве $(X,\,\Lambda)$, называется *сопряженным* с $(X,\,\Lambda)$ векторным пространством. Отображение $\Lambda^*:X^{\mathbb{N}}\to 2^X$, сопоставляющее каждой последовательности $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})\in\in X^{\mathbb{N}}$ множество $\Lambda^*(\hat{x})$ всех таких $x\in X$, что $\lim\limits_n f(x_n)=f(x)$ для любого $f\in X^*$, является линейной операцией предела в X и называется операцией предела *ослабленной* (или *слабой*) сходимости, соответствующей пространству (X, Λ), причем $\Lambda \leqslant \Lambda^*$. Заметим, что X^* является также сопряженным с (X, Λ^*) векторным пространством, а операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству (X, Λ^*), совпадает с Λ^*. Слабейшая топология τ^* в X, в которой непрерывны все функционалы из X^*, называется *ослабленной* (или *слабой*) топологией, соответствующей пространству (X, Λ). Если τ и τ' — секвенциальные топологии пространств (X, Λ) и (X, Λ^*) соответственно, то $\tau^* \subset \tau' \subset \tau$. Топология τ^* локально выпукла и определяет операцию предела Λ^*. Пусть Ł — множество всех линейных операций предела в X, порождающих ту же систему ограниченных подмножеств в X, что и Λ. Теорема 3.66 показывает, что в некоторых случаях $\Lambda^* \in$ Ł. Возможны случаи, когда Λ является наименьшим, а Λ^* — максимальным элементом частично упорядоченного множества Ł, причем X является множеством второй категории в (X, Λ) и первой категории в (X, Λ^*). Примером может служить случай, когда Λ является операцией предела бесконечномерного рефлексивного банахова пространства (определение этого пространства общеизвестно и приведено также в § 14). Действительно, в силу *теоремы Эберлейна–Шмульяна* (см. [31], с. 201; [32], с. 283—287) в пространстве (X, Λ^*) ограниченное (т. е. ограниченное по норме) множество секвенциально квазикомпактно. Поэтому, согласно утверждению б) следствия 3.7, Λ^* является максимальным элементом в Ł. Так как замкнутый шар секвенциально компактен, а также замкнут в (X, Λ^*) и в силу теоремы 3.24 не имеет квазивнутренних точек, то X является множеством первой категории и секвенциально первой категории в (X, Λ^*). Банахово пространство $\mathcal{C}[0;\, 1]$ всех непрерывных числовых функций, определенных на отрезке $[0;\, 1]$ вещественной оси, где норма элемента x задается равенством $\|x\| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$, нерефлексивно. Если Λ — операция предела пространства $\mathcal{C}[0;\, 1]$, то $\Lambda^* \in$ Ł и является операцией предела поточечной сходимости на $[0;\, 1]$ ограниченных по норме последовательностей непрерывных функций (см. [47], с. 170), причем Λ является наименьшим элементом в Ł, но Λ^* не является максимальным элементом в Ł, так как соответствующее пространство не квазиполно. Если же Λ — операция предела нерефлексивного банахова пространства l_1, то Λ является наименьшим элементом в Ł и, согласно теореме Шура, $\Lambda^* = \Lambda$, а для линейных операций предела Λ' и Λ_1 в l_1, соответствующих поточечной и равномерной сходимостям на $\mathbb{N}$ ограниченных по норме последовательностей элементов из l_1, имеем $\Lambda < \Lambda_1 < \Lambda'$, причем Λ' является максимальным элементом в Ł, так как в пространстве $(l_1,\ \Lambda')$ ограниченное множество секвенциально квазикомпактно.

Теорема 3.68. *Пусть в линейном пространстве $(X,\ \Lambda)$ система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела Λ, а каждая ограниченная последовательность либо сходится к нулю, либо обладает конечным числом таких подпоследовательностей, что некоторая их линейная комбинация сходится к вектору из $X\backslash\Lambda(\dot{0})$. Тогда операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(X,\ \Lambda)$, совпадает с Λ.*

◀ Пусть Λ^* — операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(X,\ \Lambda)$. Имеем, что $\Lambda \leqslant \Lambda^*$. В силу теоремы 3.66 подмножество в X Λ-ограничено тогда и только тогда, когда оно Λ^*-ограничено. Поэтому из теоремы 3.30 вытекает, что $\Lambda^* = \Lambda$. ▶

Отметим, что если $(X,\ \Lambda)$ есть указанное в замечании 3.15 пространство $\mathcal{C}[0;\ 1]$, а Λ^* — операция предела ослабленной сходимости, соответствующая этому пространству, то линейное пространство $(X,\ \Lambda^*)$ не удовлетворяет второму условию теоремы 3.68, хотя операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(X,\ \Lambda^*)$, совпадает с Λ^* (в связи с теоремой 3.68 см. примеры в § 16, n° 9, n° 17 и n° 18).

Из теорем 3.28, 3.29 и 3.68 с учетом замечания 3.6 вытекает

Следствие 3.14. *Пусть X_0 — векторное подпространство векторного пространства X, а Λ — сильнейшая линейная операция предела в X, для которой $\Lambda(\dot{0}) = X_0$. Тогда операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(X,\ \Lambda)$, совпадает с Λ, а сопряженное с $(X,\ \Lambda)$ векторное пространство совпадает с множеством всех линейных функционалов на X, обращающихся в нуль на X_0.* ▶

Для выпуклых подмножеств линейного пространства докажем и следующую теорему (в связи с ней см. [54], с. 71, 78).

Теорема 3.69. *Пусть $(X,\ \Lambda)$ — локально выпуклое линейное пространство, а τ^* — соответствующая ему ослабленная топология. Тогда*

а) если в $(X,\ \Lambda)$ непустые и непересекающиеся выпуклые множества K и M такие, что K секвенциально компактно, а M замкнуто, то существуют секвенциально непрерывный линейный функционал f на X и числа $\gamma_1 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, такие, что $\Re(f(x)) < \gamma_1 < \gamma_2 < \Re(f(y))$ для всех $x \in \overline{K}$ и $y \in M$;

б) замкнутое в $(X,\ \Lambda)$ выпуклое множество τ^*-замкнуто.

◀ (а) С учетом утверждения д) предложения 3.11 можно так выбрать выпуклую открытую окрестность нуля u, чтобы $(\overline{K}+u)\cap(M+u)=\varnothing$. Для некоторой точки $x_0\in K$ обозначим $v=\overline{K}+u-x_0$ и $w=M+u-x_0$. Ясно, что множества v и w выпуклы, открыты и не пересекаются, причем v является окрестностью нуля. В силу теоремы 3.65 существуют секвенциально непрерывный линейный функционал f на $(X,\,\Lambda)$ и число $\gamma>0$, такие, что $\Re(f(x))\leqslant\gamma\leqslant\Re(f(y))$ для всех $x\in v$ и $y\in w$. Однако множества $\{\Re(f(x)):x\in v\}$ и $\{\Re(f(y)):y\in w\}$ открыты. Поэтому $\Re(f(x))<\gamma<\Re(f(y))$ для всех $x\in v$ и $y\in w$. Положим $\gamma_2=\gamma+\Re(f(x_0))$. Тогда $\Re(f(x))<\gamma_2<\Re(f(y))$ для всех $x\in\overline{K}+u$ и $y\in M+u$. В силу компактности $f(\overline{K})$ найдется такое $\gamma_1<\gamma_2$, что $\Re(f(x))<\gamma_1$ для всех $x\in\overline{K}$. Таким образом, $\Re(f(x))<\gamma_1<\gamma_2<\Re(f(y))$ для всех $x\in\overline{K}$ и $y\in M$.

(б) Пусть H — замкнутое выпуклое множество в $(X,\,\Lambda)$. В силу а) для каждого $x_0\in X\setminus H$ существуют секвенциально непрерывный линейный функционал f на X и число $\gamma\in\mathbb{R}$, такие, что $\Re(f(x_0))<\gamma<\Re(f(y))$ при всех $y\in H$. Однако множество $\{x\in X:\Re(f(x))<\gamma\}$ есть τ^*-открытая окрестность точки x_0 и не пересекается с H. Отсюда вытекает τ^*-замкнутость H. ▶

В связи с утверждением б) теоремы 3.69 заметим, что в силу теоремы 3.65 в любом линейном пространстве замкнутая выпуклая окрестность нуля замкнута также в ослабленной топологии. Кроме того, если в векторном пространстве X линейные операции предела Λ и Λ' такие, что $\Lambda(\dot{0})=\Lambda'(\dot{0})$ и $\Lambda\leqslant\Lambda'$, то замкнутое секвенциально компактное подмножество пространства $(X,\,\Lambda)$ замкнуто и секвенциально компактно также в $(X,\,\Lambda')$.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим внешнюю меру μ^* на непустом множестве X. Пусть $X_0\subset X$, $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, а $\mathcal{F}=Y^X$. Введенная в главе II, § 10, n° 2 операция псевдопредела Λ сходимости почти всюду на X_0 в рассматриваемом случае является линейной операцией псевдопредела в векторном пространстве $\mathcal{F}$ (см. замечание 3.7), а операция предела Λ_0 сходимости на X_0 по внешней мере является линейной операцией предела в $\mathcal{F}$. Однако операция псевдопредела Λ_1 равномерной сходимости почти всюду на X_0 является групповой операцией псевдопредела в $\mathcal{F}$, т. е. обладает всеми указанными в теореме 1.3 свойствами, кроме, быть может, свойства 3), и удовлетворяет условиям определения 3.16. Операция предела Λ_2 равномерной сходимости на X_0 по внешней мере является групповой операцией предела в $\mathcal{F}$. Точнее, Λ_1 и Λ_2

удовлетворяют условию 3) определения 3.1, а условие 2) выполняется для почти стационарных числовых последовательностей, но может не выполняться для произвольных сходящихся числовых последовательностей. Несмотря на это, пространство $(\mathcal{F},\, \Lambda_2)$ содержит подпространства, которые являются линейными пространствами. Найдем наибольшее по отношению включения подпространство в $(\mathcal{F},\, \Lambda_2)$, являющееся линейным пространством. Заметим, что $\Lambda_2(\dot{0}) = \Lambda_1(\dot{0}) = \Lambda_0(\dot{0}) = \Lambda(\dot{0})$.

Определение 3.26. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X, $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, а $\mathcal{F} = Y^X$. Функция $f \in \mathcal{F}$ называется существенно ограниченной на $X_0 \subset X$, если она ограничена на некотором $M \subset X_0$ с $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$. Система F функций из $\mathcal{F}$ называется существенно равномерно ограниченной на X_0, если каждая последовательность функций из F равномерно ограничена на некотором $M \subset X_0$ с $\mu^*(X_0 \backslash M) = 0$.*

Очевидно, множество $\mathcal{F}_1$ всех существенно ограниченных на X_0 функций из $\mathcal{F}$ является векторным подпространством в $\mathcal{F}$.

Для $f \in \mathcal{F}$ и произвольной сходящейся к нулю последовательности чисел α_n, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $(\alpha_n f : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю равномерно на X_0 почти всюду (по внешней мере) только при $f \in \mathcal{F}_1$. Кроме того, $\mathcal{F}_1$ есть наибольшее по отношению включения векторное подпространство в $\mathcal{F}$, на котором ограничение операции псевдопредела Λ_1 (операции предела Λ_2) является линейной операцией псевдопредела (линейной операцией предела). При этом в подпространстве $(\mathcal{F}_1,\, \Lambda_2') \subset (\mathcal{F},\, \Lambda_2)$ множество F ограничено тогда и только тогда, когда оно существенно равномерно ограничено на X_0.

С использованием теоремы 3.49 легко доказывается

Предложение 3.55. *Пусть линейное пространство $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ имеет такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u + u : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность существенно ограниченных на $X_0 \subset X$ функций из $\mathcal{F} = Y^X$, а $f \in \mathcal{F}$. Тогда*

а) если последовательность $\hat{f}$ существенно равномерно ограничена на X_0 и сходится к f на X_0 по внешней мере, то функция f существенно ограничена на X_0;

б) если $\hat{f}$ сходится к f равномерно на X_0 по внешней мере, то функция f существенно ограничена на X_0, а последовательность $\hat{f}$ существенно равномерно ограничена на X_0. ▶

Следствие 3.15. *Если линейное пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$ имеет такую полную систему окрестностей нуля $\widetilde{U}_0$, что система окрестностей нуля $\{u+u : u \in \widetilde{U}_0\}$ определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, то множество $\mathcal{F}_1$ всех существенно ограниченных на $X_0 \subset X$ функций замкнуто в функциональном пространстве $(\mathcal{F}, \Lambda_2)$ равномерной сходимости на X_0 по внешней мере.* ▶

С учетом теорем 2.59 и 2.60 легко доказываются также следующие предложения.

Предложение 3.56. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X, а в векторном пространстве Y линейная операция предела $\widetilde{\Lambda}$ определяется полунормой $\widetilde{p}$. Тогда в векторном подпространстве $\mathcal{F}_1 \subset Y^X$ всех существенно ограниченных на $X_0 \subset X$ функций линейная операция предела Λ_2' равномерной сходимости на X_0 по внешней мере может быть определена полунормой p, заданной равенством*

$$p(f) = \min\{\sup_{x\in M} \widetilde{p}(f(x)) : M \subset X_0,\ \mu^*(X_0 \backslash M) = 0\}, \quad f \in \mathcal{F}_1.$$

При этом Λ_2' совпадает с линейной операцией псевдопредела Λ_1' в $\mathcal{F}_1$ равномерной сходимости почти всюду на X_0. ▶

Предложение 3.57. *Пусть μ^* — внешняя мера на непустом множестве X, $X_0 \subset X$, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — полное полуметризуемое линейное пространство, $\mathcal{F} = Y^X$, а $\mathcal{F}_1$ — множество существенно ограниченных на X_0 функций из $\mathcal{F}$. Тогда*

а) функциональное пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_2)$ равномерной сходимости на X_0 по внешней мере как коммутативная группа с операцией предела полно, а подпространство $(\mathcal{F}_1, \Lambda_2') \subset \subset (\mathcal{F}, \Lambda_2)$ как линейное пространство тоже полно;

б) если μ^* и X_0 такие, что $X_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, где $B_n \subset B_{n+1}$ и $\mu^*(B_n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, а $\lim_n \mu^*(A_n) = 0$ для любой последовательности подмножеств $A_n \subset X_0$, $n \in \mathbb{N}$, имеющей пустое пересечение и удовлетворяющей условиям $\mu^*(A_1) < \infty$, $A_{n+1} \subset A_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то функциональное пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_0)$ сходимости на X_0 по внешней мере как линейное пространство полно. ▶

В связи с утверждением а) теоремы 2.61 и утверждением б) предложения 3.57 заметим, что если μ — мера на непустом множестве X, $X_0 \subset X$ — измеримое подмножество, а $\mathcal{F}'$ — множество измеримых числовых функций, определенных на X (см. [38], с. 282), то функциональное пространство $(\mathcal{F}', \Lambda_0')$ сходимости на X_0 по мере как линейное пространство полно (хотя в этом случае внешняя мера μ^* на X, порожденная мерой μ, может и не удовлетворять условию утверждения б) предложения 3.57, возникающие в доказательстве множества измеримы, а для них указанное условие выполняется).

§ 13. Дифференциалы и производные

Введенные М. Фреше понятия дифференциала и производной функции, действующей в нормированных линейных пространствах, хорошо известны (см. [32], с. 646; [38], с. 480; [46], с. 196). Однако в теории топологических векторных пространств введение указанных понятий в случае, когда пространства ненормируемы, связано с определенными трудностями (см. [65], с. 5—16). Одно из определений дифференцируемого отображения принадлежит *Себаштьяну э Сильва* (см. [55]; [23], с. 43—48): для топологических векторных пространств $(X,\, \tau)$ и $(Y,\, \widetilde{\tau})$ отображение $f\colon X \to Y$ называется дифференцируемым в точке $x \in X$, если существует такое $(\tau,\, \widetilde{\tau})$-непрерывное линейное отображение $A\colon X \to Y$, что для любых ограниченного $M \subset X$ и окрестности нуля v пространства $(Y,\, \widetilde{\tau})$ найдется $\varepsilon > 0$, для которого $t^{-1}(f(x+th)-f(x))-A(h) \in v$ при любых $h \in M$ и $t \in (0;\, \varepsilon)$. Последнее требование эквивалентно следующему: для любых ограниченной последовательности векторов $h_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, и сходящейся к нулю последовательности чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность векторов $t_n^{-1}(f(x+t_nh_n)-f(x))-A(h_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y,\, \widetilde{\tau})$. Недостатком этого определения является то, что в условии, наложенном на $f(x+z)-f(x)-A(z)$, $z \in X$, используются лишь те сходящиеся к нулю последовательности $\hat{z}$ векторов пространства $(X,\, \tau)$, которые представляются в виде $\hat{z} = \hat{t}\hat{h}$, где $\hat{t}$ — сходящаяся к нулю последовательность чисел, а $\hat{h}$ — ограниченная последовательность векторов. Поэтому дифференцируемое в указанном смысле отображение может не быть секвенциально непрерывным (см. замечание 3.19 в § 14).

Здесь дается определение дифференцируемого отображения, в котором используются все сходящиеся к нулю последовательности векторов пространства (в общем случае трудно дать его эффективное описание в терминах окрестностей). Вводятся три различных понятия дифференцируемости отображения: дифференцируемость по векторному подпространству, вещественная дифференцируемость по вещественному векторному подпространству и дифференцируемость по направлению вектора.

Определение 3.27. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства над одним и тем же числовым пространством,* $X_0 \subset X$ *— векторное подпространство, а* $G \subset X$ *— непустое подмножество. Функция* $f: G \to Y$ *называется дифференцируемой в точке* $x \in G$ *по* X_0*, если существует такое секвенциально непрерывное линейное отображение* $A: X_0 \to Y$*, что для любой сходящейся к нулю в* (X, Λ) *последовательности векторов* $h_n \in X_0 \cap (G - x)$*,* $n \in \mathbb{N}$*, и любой последовательности чисел* $t_n > 0$*,* $n \in \mathbb{N}$*, при которой последовательность* $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ *ограничена в* (X, Λ)*, последовательность векторов* $t_n(f(x + h_n) - f(x) - A(h_n))$*,* $n \in \mathbb{N}$*, сходится к нулю в* $(Y, \widetilde{\Lambda})$*. При этом* A *называется производной функции* f *в точке* x *по* X_0*, а для любого* $h \in X_0 \cap (G - x)$ *вектор* $A(h)$ *называется дифференциалом функции* f *в точке* x *по* X_0 *при приращении* h*. В случае* $X_0 = X$ *функция* f *просто называется дифференцируемой в точке* x*,* A *— производной функции* f *в точке* x*, а* $A(h)$ *— дифференциалом функции* f *в точке* x *при приращении* h*. Если функция* f *дифференцируема по* X_0 *в каждой точке из* G*, то она просто называется дифференцируемой по* X_0*, а в случае* $X_0 = X$ *она называется дифференцируемой.*

Если функция f дифференцируема в точке x по векторному подпространству X_0, то она дифференцируема в точке x по любому векторному подпространству $X_1 \subset X_0$, причем если A — производная функции f в точке x по X_0, то сужение A_1 отображения A на X_1 есть производная функции f в точке x по X_1.

Секвенциально непрерывное линейное отображение, определенное на векторном подпространстве X_0, дифференцируемо по X_0 и является своей производной по X_0 в каждой точке из X_0.

Функция $f: G \to Y$, где $G \subset X$, принимающая одно и то же значение во всех точках из G, дифференцируема и нулевое отображение векторного пространства X в Y является производной функции f в каждой точке из G.

Дифференцируемая в некоторой точке функция секвенциально непрерывна в этой точке.

Предложение 3.58. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства над одним и тем же числовым пространством,* $X_0 \subset X$ *— векторное подпространство, а* $G \subset X$ *— непустое подмножество. Если функции* $f_1: G \to Y$ *и* $f_2: G \to Y$ *дифференцируемы в точке* $x \in G$ *по* X_0*, то для любых чисел* α_1 *и* α_2 *функция* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ *дифференцируема в точке* x *по* X_0*, причем если* A_1 *и* A_2 *— производные функций* f_1 *и* f_2 *в точке* x *по* X_0 *соответственно, то* $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ *является производной функции* $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ *в точке* x *по* X_0*.* ▶

Предложение 3.59. *Пусть* $(X,\,\Lambda)$ *и* $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства над одним и тем же числовым пространством;* $X_0\subset X$ *— векторное подпространство; подмножество* $G\subset X$ *и точка* $x\in G$ *такие, что для каждого* $h\in X_0$ *существует сходящаяся к нулю последовательность чисел* $r_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, *для которой* $r_nh\in G-x$ *при всех* $n\in\mathbb{N}$; $f:G\to Y$ *— функция, дифференцируемая в точке* x *по* X_0. *Если* A *и* B *производные функции* f *в точке* x *по* X_0, *то* $A(h)-B(h)\in\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$, $h\in X_0$. *Следовательно, если* $\widetilde{\Lambda}$ *является операцией однозначного предела, то функция* f *имеет лишь одну производную в точке* x *по* X_0.

◀ Каждая из последовательностей векторов

$$r_n^{-1}(f(x+r_nh)-f(x)-A(r_nh)),\quad r_n^{-1}(f(x+r_nh)-f(x)-B(r_nh)),$$

$n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. Поэтому последовательность векторов $r_n^{-1}(A(r_nh)-B(r_nh))=A(h)-B(h)$, $n\in\mathbb{N}$, тоже сходится к нулю в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. Следовательно, $A(h)-B(h)\in\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. ▶

Теорема 3.70. *Пусть* $(X,\,\Lambda)$, $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$ *и* $(Z,\,\Lambda')$ *— линейные пространства над одним и тем же числовым пространством,* $G\subset X$ *и* $M\subset Y$ *— непустые подмножества,* $f:G\to Y$ *и* $\varphi:M\to Z$ *— некоторые функции, причем* $H=f^{-1}(M)\neq\varnothing$, $x\in H$ *и* $y=f(x)$, *а* $X_0\subset X$ *и* $Y_0\subset Y$ *— векторные подпространства, причем* $f(H)-y\subset Y_0$. *Если функция* f *дифференцируема в точке* x *по* X_0 *и имеет производную* A *в точке* x *по* X_0, *а функция* φ *дифференцируема в точке* y *по* Y_0 *и имеет производную* B *в точке* y *по* Y_0, *то функция* $F:H\to Z$, *определенная равенством* $F(\xi)=\varphi(f(\xi))$, $\xi\in H$, *дифференируема в точке* x *по* $X_1=A^{-1}(Y_0)$ *и имеет производную* C *в точке* x *по* X_1, *определенную равенством* $C(h)=B(A(h))$, $h\in X_1$.

◀ Пусть последовательность векторов $h_n\in X_1\cap(H-x)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю в $(X,\,\Lambda)$, а последовательность чисел $t_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, такая, что последовательность $(t_nh_n:n\in\mathbb{N})$ ограничена в $(X,\,\Lambda)$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим

$$z_n=t_n(F(x+h_n)-F(x)-C(h_n))=$$
$$=t_n(\varphi(f(x+h_n))-\varphi(f(x))-B(A(h_n))),$$
$$g_n=f(x+h_n)-f(x),\quad \eta_n=g_n-A(h_n).$$

В силу линейности производной B имеем

$$z_n=t_n(\varphi(y+g_n)-\varphi(y)-B(g_n))+B(t_n\eta_n).\tag{1}$$

Из линейности и секвенциальной непрерывности отображения

A следует, что $(A(h_n): n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, а последовательность $(A(t_n h_n): n \in \mathbb{N})$ ограничена в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Так как функция f дифференцируема в точке x по X_0 и имеет производную A, то последовательности $(\eta_n : n \in \mathbb{N})$ и $(t_n \eta_n : n \in \mathbb{N})$ сходятся к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому $(g_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю, а последовательность $(t_n g_n : n \in \mathbb{N})$ ограничена в $(Y, \widetilde{\Lambda})$, причем $g_n \in Y_0 \cap (M - y)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Но тогда в силу дифференциремости функции φ в точке y по Y_0 и секвенциальной непрерывности B из (1) следует, что $(z_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в (Z, Λ'). А это означает, что функция F дифференцируема в точке x по X_1 и имеет производную C в точке x по X_1. ▶

Определение 3.28. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $X_0 \subset X$ — вещественное векторное подпространство, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Функция $f: G \to Y$ называется вещественно дифференцируемой в точке $x \in G$ по X_0 (или дифференцируемой в точке x по направлению X_0), если существует такое секвенциально непрерывное вещественно линейное отображение $A: X_0 \to Y$, что для любой сходящейся к нулю в (X, Λ) последовательности векторов $h_n \in X_0 \cap (G - x)$, $n \in \mathbb{N}$, и любой последовательности чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, при которой последовательность $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ ограничена в (X, Λ), последовательность векторов $t_n(f(x + h_n) - f(x) - A(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. При этом A называется вещественной производной функции f в точке x по X_0, а для $h \in X_0 \cap (G - x)$ вектор $A(h)$ называется вещественным дифференциалом функции f в точке x по X_0 при приращении h. В случае $X_0 = X$ функция f просто называется вещественно дифференцируемой в точке x, A — вещественной производной функции f в точке x, а $A(h)$ — вещественным дифференциалом функции f в точке x при приращении h. Если функция f вещественно дифференцируема по X_0 в каждой точке из G, то она просто называется вещественно дифференцируемой по X_0, а в случае $X_0 = X$ она называется вещественно дифференцируемой.*

Приведенные выше утверждения относительно функций, дифференцируемых по векторному подпространству, могут быть сформулированы также для функций, вещественно дифференцируемых по вещественному векторному подпространству.

Функция, дифференцируемая в некоторой точке по векторному подпространству X_0, вещественно дифференцируема в этой точке по X_0. При этом для функций, действующих в вещественных линейных пространствах, понятия дифференцируемости и вещественной дифференцируемости совпадают. Отметим, что в определении 3.28 (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ могут быть линейными пространствами над различными числовыми пространствами. В случае комплексных линейных пространств (X, Λ), $(Y, \widetilde{\Lambda})$ и векторного подпространства $X_0 \subset X$ вещественно дифференцируемая по X_0 функция может не быть дифференцируемой по X_0, так как вещественно линейное отображение X_0 в Y может не быть линейным. Примером может служить функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определенная равенством $f(x) = \Re x$, $x \in \mathbb{C}$. Эта функция не дифференцируема, но она вещественно дифференцируема, причем ее вещественная производная $A_x : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ в точке $x \in \mathbb{C}$ определяется равенством $A_x(h) = \Re h$, $h \in \mathbb{C}$.

Замечание 3.16. Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — комплексные линейные пространства, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Очевидно, что функция $f : G \to Y$ тогда и только тогда дифференцируема в точке $x \in G$ по X_0, когда она вещественно дифференцируема в точке x по X_0 и одна ее вещественная производная A в точке x по X_0 удовлетворяет равенству $A(\mathrm{i}h) = \mathrm{i}A(h)$ для всех $h \in X_0$. В случае $X_0 = X = Y = \mathbb{C}$ это равенство есть не что иное, как условия *Коши–Римана* (см. [48], с. 35—38). В общем случае при наличии в X и Y секвенциально непрерывных инволюций условие $A(\mathrm{i}h) = \mathrm{i}A(h)$, $h \in X$, с помощью подходящих обозначений тоже можно записать в виде условий, аналогичных условиям Коши–Римана.

Определение 3.29. *Пусть (X, Λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $e \in X$ и $X_1 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$, а $G \subset X$ — непустое подмножество. Функция $f : G \to Y$ называется дифференцируемой в точке $x \in G$ по направлению e, если существует такое секвенциально непрерывное положительно однородное отображение $A_1 : X_1 \to Y$, что для любой сходящейся к нулю в (X, Λ) последовательности векторов $h_n \in X_1 \cap (G - x)$, $n \in \mathbb{N}$, и любой последовательности чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, при которой последовательность $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ ограничена в (X, Λ), последовательность векторов $t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_1(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. При этом A_1 называется производной функции f в точке x по направлению e, а для любого $h \in X_1 \cap (G - x)$ вектор $A_1(h)$ называется дифференциалом функции f в точке x по направлению e при приращении h. Если функция f дифференцируема по направлению e в каждой точке из G, то она просто называется дифференцируемой по направлению e.*

Предложение 3.60. *Пусть* (X, Λ) *и* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейные пространства,* $e \in X$, *а* $G \subset X$ *— непустое подмножество. Для вещественной дифференцируемости функции* $f : G \to Y$ *в точке* $x \in G$ *по* $X_0 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}\}$ *необходимо и достаточно существование таких производных* A_1 *и* A_2 *функции* f *в точке* x *по направлениям векторов* e *и* $-e$ *соответственно, что* $A_1(e) = -A_2(-e)$. *При этом отображение* $A : X_0 \to Y$, *определенное равенством* $A(\alpha e) = \alpha A_1(e)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, *является вещественной производной функции* f *в точке* x *по* X_0. ▶

Пусть (X, λ) и $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, причем λ — операция однозначного предела, $G \subset X$ — такое подмножество, что $\alpha G \subset G$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_+$, а $f : G \to Y$ — положительно однородное отображение. В силу однозначности операции предела λ для любого $e \in X$ всякое положительно однородное отображение, определенное на множестве $X_1 = \{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$, секвенциально непрерывно. Поэтому f дифференцируемо в нуле по направлению каждого вектора, хотя оно может не быть секвенциально непрерывным в нуле. При этом если положительно однородное отображение $A : X \to Y$ такое, что $A(x) = f(x)$ для всех $x \in G$, то его сужение на X_1 является производной отображения f в нуле по направлению e, а при $e \in G$ отображение f дифференцируемо в любой точке $x \in X_1$ по направлению e и его сужение на X_1 является производной отображения f в точке x по направлению e.

В случае нормированных линейных пространств дифференцируемость функции по пространству (по направлению вектора) совпадает с *дифференцируемостью по Фреше* (соответственно *по Гато*) (см. [38], с. 480—482; [47], с. 196—207).

По аналогии с теоремой 3.70 доказывается

Теорема 3.71. *Пусть* (X, Λ), $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *и* (Z, Λ') *— линейные пространства,* $G \subset X$ *и* $M \subset Y$ *— непустые подмножества,* $f : G \to Y$ *и* $\varphi : M \to Z$ *— некоторые функции, причем* $H = f^{-1}(M) \neq \varnothing$, $x \in H$, $y = f(x)$, $h \in X$ *и* $X_0 = \{rh : r \in \mathbb{R}_+\}$, *а* $Y_0 \subset Y$ *— такое вещественное векторное подпространство, что* $f(H \cap (x + X_0)) - y \subset Y_0$. *Если функция* f *дифференцируема в точке* x *по направлению* h *и имеет такую производную* A *в точке* x *по направлению* h, *что* $A(h) \in Y_0$, *а функция* φ *вещественно дифференцируема в точке* y *по* Y_0 *и имеет вещественную производную* B *в точке* y *по* Y_0, *то функция* $F : H \to Z$, *определенная равенством* $F(\xi) = \varphi(f(\xi))$, $\xi \in H$, *диффеpенируема в точке* x *по направлению* h *и имеет производную* C *в точке* x *по направлению* h, *определенную равенством* $C(rh) = B(A(rh))$, $r \in \mathbb{R}_+$. ▶

Замечание 3.17. Как известно (см. [47], с. 203—204), если вещественная функция g определена и непрерывна на отрезке $[a;\, b]$ вещественной оси и имеет в каждой точке $t \in (a;\, b)$ правую производную $g'_+(t)$, то $|g(b)-g(a)| \leqslant (b-a) \sup\limits_{a<t<b} |g'_+(t)|$. Кроме того, если функция g определена и непрерывна на промежутке $(a;\, b)$ и имеет на нем непрерывную правую производную, то g имеет также непрерывную производную на $(a;\, b)$.

Докажем следующий вариант *теоремы о конечных приращениях* (см. [47], с. 201—204).

Теорема 3.72. *Пусть $(X,\, \Lambda)$ и $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ — линейные пространства, $G \subset X$ — такое подмножество, что $x+th \in G$ для некоторых $x \in G$ и $h \in X$ при всех $t \in [0;\, 1]$, а $f : G \to Y$ — такая функция, что функция $g : [0;\, 1] \to Y$, определенная равенством $g(t) = f(x+th)$, $t \in [0;\, 1]$, секвенциально непрерывна. Если функция f дифференцируема в каждой точке $x+th$, $t \in (0;\, 1)$, по направлению h и имеет производную f'_{x+th} в точке $x+th$ по направлению h, то для любого секвенциально непрерывного вещественно линейного вещественного функционала φ на Y и функционала Минковского μ_v всякой вещественно уравновешенной выпуклой окрестности нуля v пространства $(Y,\, \widetilde{\Lambda})$ выполняются неравенства*

$$|\varphi(f(x+h)-f(x))| \leqslant \sup_{0<t<1} |\varphi(f'_{x+th}(h))|, \tag{2}$$

$$\mu_v(f(x+h)-f(x)) \leqslant \sup_{0<t<1} \mu_v(f'_{x+th}(h)). \tag{3}$$

Если же функция f вещественно дифференцируема в каждой точке $x+th$, $t \in (0;\, 1)$, по одномерному вещественному векторному подпространству $X_0 = \{rh : r \in \mathbb{R}\}$ и имеет вещественную производную f'_{x+th} в точке $x+th$ по X_0, то справедливы неравенства (2), (3) и, кроме того, для каждого указанного выше функционала φ существует такое число $\theta \in (0;\, 1)$, что

$$\varphi(f(x+h)-f(x)) = \varphi(f'_{x+\theta h}(h)). \tag{4}$$

◀ Пусть φ — секвенциально непрерывный вещественно линейный вещественный функционал на Y. Рассмотрим функцию ψ, определенную равенством $\psi(t) = \varphi(f(x+th))$, $t \in [0;\, 1]$. Очевидно, функция ψ непрерывна. Докажем, что ψ имеет правую производную $\psi'_+(t)$ в каждой точке $t \in (0;\, 1)$, причем $\psi'_+(t) = \varphi(f'_{x+th}(h))$. С этой целью рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность чисел $r_n \in (0;\,1-t)$, $n \in \mathbb{N}$. Из равенства

$$r_n^{-1}(\psi(t+r_n)-\psi(t))-\varphi(f'_{x+th}(h)) =$$
$$= \varphi(r_n^{-1}(f(x+th+r_nh)-f(x+th)-f'_{x+th}(r_nh)))$$

в силу секвенциальной непреривности φ получаем

$$\psi'_+(t) = \lim_n r_n^{-1}(\psi(t+r_n)-\psi(t)) = \varphi(f'_{x+th}(h)).$$

Из указанных свойств функции ψ с учетом замечания 3.17 вытекает, что $|\psi(1)-\psi(0)| \leqslant \sup\limits_{0<t<1} |\psi'_+(t)|$. Отсюда с учетом равенств $\psi(1)=\varphi(f(x+h))$ и $\psi(0)=\varphi(f(x))$ получаем (2). Пусть μ_v — функционал Минковского вещественно уравновешенной выпуклой окрестности нуля v в $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. В силу теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного функционала с сохранением мажоранты можно так выбрать функционал φ, что $\varphi(f(x+h)-f(x)) = \mu_v(f(x+h)-f(x))$ и $|\varphi(y)| \leqslant \mu_v(y)$ для всех $y \in Y$. Тогда из (2) получим (3).

Предположим теперь, что функция f вещественно дифференцируема в каждой точке $x+th$, $t \in (0;\,1)$, по X_0. Тогда, как легко убедиться, функция ψ имеет производную $\psi'(t)$ в каждой точке $t \in (0;\,1)$, причем $\psi'(t)=\varphi(f'_{x+th}(h))$. Согласно *теореме Лагранжа* (см. [61], с. 226), существует такое число $\theta \in (0;\,1)$, что $\psi(1)-\psi(0)=\psi'(\theta)$, т. е. выполняется равенство (4). ►

Следующая теорема тоже обобщает и усиливает результат, известный в случае нормированных линейных пространств (см. [47], с. 204—206).

Теорема 3.73. *Пусть $(X,\,\Lambda)$ — линейное пространство, $X_0 \subset X$ — вещественное векторное подпространство, $G \subset X$ — непустое открытое подмножество, $(Y,\,\widetilde{\lambda})$ — линейное пространство с операцией однозначного предела, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела $\widetilde{\lambda}$, $f: G \to Y$ — секвенциально непрерывная функция, дифференцируемая в каждой точке $x \in G$ по направлению любого вектора $e \in X_0$, а $A_x : X_0 \to Y$ для каждого $x \in G$ — такое отображение, что при любом $e \in X_0$ сужение отображения A_x на множестве $\{\alpha e : \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ является производной функции f в точке x по направлению e. Пусть, кроме того, для каждого $x \in G$ выполняются следующие условия:*

1) отображение A_x секвенциально непрерывно в нуле;

2) если векторы $e \in X_0$, $h \in X_0$ и сходящиеся к нулю по-

следовательности вещественных чисел r_n *и* t_n, $n \in \mathbb{N}$, *такие, что* $x + r_n e + t_n h \in G$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то последовательность векторов* $A_{x+r_n e+t_n h}(e)$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к* $A_x(e)$ *в* $(Y, \widetilde{\lambda})$;

3) если последовательность чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, *и сходящаяся к нулю последовательность векторов* $h_n \in X_0$, $n \in \mathbb{N}$, *такие, что последовательность* $(t_n h_n : n \in \mathbb{N})$ *ограничена и* $x + h_n \in G$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, *то последовательность векторов* $A_{x+h_n}(t_n h_n) - A_x(t_n h_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к нулю в* $(Y, \widetilde{\lambda})$.

Тогда функция f *вещественно дифференцируема в каждой точке* $x \in G$ *по* X_0, *а* A_x *является ее вещественной производной (притом единственной) в точке* x *по* X_0.

◄ Сначала докажем, что для каждого $x \in G$ отображение A_x вещественно линейно. Так как A_x положительно однородно, то $A_x(0) = 0$. Рассмотрим некоторые $e \in X_0$, $h \in X_0$ и секвенциально непрерывный вещественно линейный вещественный функционал φ на Y. Поскольку множество G открыто, число $\varepsilon > 0$ можно выбрать так, чтобы $x + re + th \in G$ при всех $|r| < \varepsilon$ и $|t| < \varepsilon$. Функцию g двух вещественных переменных определим равенством $g(r, t) = \varphi(f(x + re + th))$ для всех $|r| < \varepsilon$ и $|t| < \varepsilon$. Из условия 2) с учетом замечания 3.17 вытекает, что g имеет непрерывные частные производные g'_r и g'_t, причем

$$g'_r(r, t) = \varphi(A_{x+re+th}(e)), \quad g'_t(r, t) = \varphi(A_{x+re+th}(h)).$$

Пусть α и β — некоторые вещественные числа. Выберем число $\varepsilon' \in (0; \varepsilon)$ так, чтобы $x + r\alpha e + t\beta h \in G$ при всех $|r| < \varepsilon'$ и $|t| < \varepsilon'$. Рассмотрим также функцию p, определенную равенством

$$p(s) = g(\alpha s, \beta s) = \varphi(f(x + s(\alpha e + \beta h))), \quad |s| < \varepsilon'.$$

Функция p имеет непрерывную производную p', причем, с одной стороны, $p'(s) = \alpha g'_r(\alpha s, \beta s) + \beta g'_t(\alpha s, \beta s)$, а с другой стороны, $p'(s) = \varphi(A_{x+s(\alpha e+\beta h)}(\alpha e + \beta h))$. В частности, имеем

$$p'(0) = \alpha g'_r(0, 0) + \beta g'_t(0, 0) = \alpha\varphi(A_x(e)) + \beta\varphi(A_x(h))$$

и $p'(0) = \varphi(A_x(\alpha e + \beta h))$. Поэтому

$$\varphi(A_x(\alpha e + \beta h)) = \varphi(\alpha A_x(e) + \beta A_x(h)).$$

Однако в силу теоремы 3.65 при условии, наложенном на пространство $(Y, \widetilde{\lambda})$, множество всех секвенциально непрерывных вещественно линейных вещественных функционалов, определенных на Y, разделяет точки в Y. Поэтому из последнего равенства получаем $A_x(\alpha e + \beta h) = \alpha A_x(e) + \beta A_x(h)$. Тем самым вещественная линейность отображения A_x доказана.

Теперь докажем, что вещественно линейное отображение A_x, которое, по условию 1), секвенциально непрерывно, является вещественной производной функции f в точке x по X_0. Рассмотрим такой вектор $h \in X_0$, что $x + th \in G$ при всех $t \in [0; 1]$. Функцию ψ определим равенством $\psi(t) = \varphi(f(x+th) - tA_x(h))$, $t \in [0; 1]$. Функция ψ непрерывна и имеет на $(0; 1)$ непрерывную производную ψ', причем $\psi'(t) = \varphi(A_{x+th}(h) - A_x(h))$, $t \in (0; 1)$. По теореме Лагранжа, $\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\theta)$, где $\theta \in (0; 1)$ — некоторое число. Отсюда получаем

$$\varphi(f(x+h) - f(x) - A_x(h)) = \varphi(A_{x+\theta h}(h) - A_x(h)). \qquad (5)$$

В этом равенстве число θ зависит от φ. Пусть μ_v — функционал Минковского вещественно уравновешенной выпуклой окрестности нуля v в $(Y, \widetilde{\lambda})$. Выберем φ так, чтобы

$$\varphi(f(x+h) - f(x) - A_x(h)) = \mu_v(f(x+h) - f(x) - A_x(h))$$

и $|\varphi(y)| \leqslant \mu_v(y)$ для всех $y \in Y$. Тогда из (5) получим

$$\mu_v(f(x+h) - f(x) - A_x(h)) \leqslant \mu_v(A_{x+\theta h}(h) - A_x(h)). \qquad (6)$$

Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность векторов $h_n \in X_0$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $x + rh_n \in G$ при всех $r \in [0; 1]$ и $n \geqslant m$. Без нарушения общности можно считать $x + rh_n \in G$ при всех $r \in [0; 1]$ и $n \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что последовательность векторов $t_n h_n$, $n \in \mathbb{N}$, ограничена. В силу (6) для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\mu_v(t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_x(h_n))) \leqslant \mu_v(A_{x+\theta_n h_n}(t_n h_n) - A_x(t_n h_n))$$

с некоторым $\theta_n \in (0; 1)$. Из условия 3) вытекает, что

$$\lim_n \mu_v(A_{x+\theta_n h_n}(t_n h_n) - A_x(t_n h_n)) = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_n \mu_v(t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_x(h_n))) = 0$. Однако система всех выпуклых окрестностей нуля пространства $(Y, \widetilde{\lambda})$ определяет операцию предела $\widetilde{\lambda}$. Поэтому из последнего равенства вытекает, что последовательность векторов $t_n(f(x+h_n) - f(x) - A_x(h_n))$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\lambda})$. А это означает, что A_x является вещественной производной функции f в точке x по X_0. Единственность вещественной производной функции f в каждой точке $x \in G$ по X_0 вытекает из утверждения, аналогичного предложению 3.59. ▶

§ 14. Дифференцируемость нормы

Исследуем несколько вопросов, связанных со свойством дифференцируемости нормы (в связи с этим см. [30], с. 482—511; [23], с. 27—43). Доказанные здесь утверждения могут быть сформулированы также для полунормы.

Предложение 3.61. *Пусть x и h — векторы нормированного линейного пространства, а r, t, t' — числа из $\mathbb{R}$. Тогда*

$$\|x+(rt+(1-r)t')h\| \leqslant r\|x+th\|+(1-r)\|x+t'h\|, \quad r\in[0;\,1], \tag{1}$$

$$\|x+th\|+\|x-th\| \leqslant \|x+t'h\|+\|x-t'h\|, \quad |t|\leqslant|t'|, \tag{2}$$

$$\|h\| \geqslant \|tx+h\|-t\|x\| \geqslant \|t'x+h\|-t'\|x\| \geqslant -\|h\|, \quad 0\leqslant t\leqslant t', \tag{3}$$

$$0 \leqslant \|tx+h\|+\|tx-h\|-2t\|x\| \leqslant 2\|h\|, \quad t\geqslant 0. \tag{4}$$

◀ В доказательстве нуждается лишь (2). Достаточно рассмотреть случай $0\leqslant t<t'$. Обозначим $\alpha=(t'-t)(t'+t)^{-1}$. С учетом $(1+\alpha)^{-1}(1-\alpha)t'=t$ и $\alpha t-(1-\alpha)t'=-t$ имеем

$$\begin{gathered}
\|x+t'h\|+\|x-t'h\| = (\|x+t'h\|+\alpha\|x-t'h\|)+(1-\alpha)\|x-t'h\| \geqslant \\
\geqslant \|(1+\alpha)x+(1-\alpha)t'h\|+(1-\alpha)\|x-t'h\| = \\
= (1+\alpha)\|x+(1+\alpha)^{-1}(1-\alpha)t'h\|+(1-\alpha)\|x-t'h\| = \\
= (1+\alpha)\|x+th\|+(1-\alpha)\|x-t'h\| = \\
= \|x+th\|+\alpha\|x+th\|+(1-\alpha)\|x-t'h\| \geqslant \\
\geqslant \|x+th\|+\|x+(\alpha t-(1-\alpha)t')h\| = \|x+th\|+\|x-th\|. \ ▶
\end{gathered}$$

В силу неравенства (1) функция $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$, определенная равенством $\psi(t)=\|x+th\|$, $t\in\mathbb{R}$, удовлетворяет неравенству

$$\psi(rt+(1-r)t') \leqslant r\psi(t)+(1-r)\psi(t')$$

для всех t, t' из $\mathbb{R}$ и $r\in[0;\,1]$, т. е. она выпуклая. Отсюда, как известно, следует, что функция ψ имеет односторонние производные в каждой точке $t\in\mathbb{R}$ и может не быть дифференцируемой лишь в точках некоторого множества, имеющего нулевую меру Лебега. Из этого свойства функции ψ вытекает, что норма дифференцируема в точке $x+th$ по направлению каждого из векторов h и $-h$ при каждом $t\in\mathbb{R}$ и вещественно дифференцируема в точке $x+th$ по одномерному вещественному векторному подпространству $\{\alpha h:\alpha\in\mathbb{R}\}$ при всех $t\in\mathbb{R}$, кроме некоторого множества значений, имеющего нулевую меру Лебега.

Теорема 3.74. *Пусть x и h — векторы в нормированном линейном пространстве X. Тогда для любой сходящейся к нулю последовательности чисел $r_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность чисел $\|r_n^{-1}x + h\| - r_n^{-1}\|x\|$, $n \in \mathbb{N}$, сходится и ее предел не зависит от выбора $(r_n : n \in \mathbb{N})$. При этом для каждого $x \in X$ по формуле*

$$p_x(h) = \lim_n \left(\|r_n^{-1}x + h\| - r_n^{-1}\|x\|\right), \quad h \in X, \tag{5}$$

определяется функционал $p_x : X \to \mathbb{R}$, относительно которого справедливы следующие утверждения:

а) $p_x(h) = \inf\limits_{t \geqslant 0}(\|tx + h\| - t\|x\|)$;

б) $p_x(\alpha x) = \Re\alpha\,\|x\|$ для любого числа α и, следовательно, $p_x(0) = 0$, $p_x(x) = \|x\|$, $p_x(\alpha x) + p_x(-\alpha x) = 0$;

в) $|p_x(h)| \leqslant \|h\|$, $p_x(h) + p_x(-h) \geqslant 0$ и $p_x(\alpha h) = \alpha p_x(h)$ при $\alpha \geqslant 0$;

г) для любых h_1 и h_2 из X

$$p_x(h_1) - p_x(-h_2) \leqslant p_x(h_1 + h_2) \leqslant p_x(h_1) + p_x(h_2),$$

$$|p_x(h_1) - p_x(h_2)| \leqslant \|h_1 - h_2\|,$$

причем если $p_x(h_2) + p_x(-h_2) = 0$, то

$$p_x(h_1 + h_2) = p_x(h_1) + p_x(h_2)$$

и, значит, $p_x(h + \alpha x) = p_x(h) + \Re\alpha\,\|x\|$ для любого числа α;

д) функционал p_x секвенциально равномерно непрерывен;

е) для каждого вектора e сужение функционала p_x на множестве $\{\alpha e : \alpha \geqslant 0\}$ является производной нормы в точке x по направлению e;

ж) для каждого вещественно линейно независимого с x вектора h существуют две такие вещественные линейные комбинации $e_1 = \alpha_1 x + \beta_1 h$ и $e_2 = \alpha_2 x - \beta_2 h$ с $\beta_1 > 0$ и $\beta_2 > 0$, что $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, $e_1 \neq e_2$ и $p_x(e_1) = p_x(e_2) = 0$;

з) множество $\widetilde{X} = \{h \in X : p_x(h) + p_x(-h) = 0\}$ является замкнутым вещественным векторным подпространством, содержащим αx для любого числа α, причем сужение функционала p_x на $\widetilde{X}$ является вещественно линейным функционалом, а сужение функционала p_x на каждом конечномерном вещественном векторном подпространстве $X_1 \subset \widetilde{X}$ является вещественной производной нормы в точке x по X_1;

и) $p_0(h) = \|h\|$ и $p_{\alpha x}(h) = p_x(|\alpha|\alpha^{-1}h)$ для любого числа $\alpha \neq 0$;

к) если $\|x_1 + x_2\| = \|x_1\| + \|x_2\|$, то для любых h_1 и h_2 из X

$$p_{x_1+x_2}(h_1+h_2) \leqslant p_{x_1}(h_1)+p_{x_2}(h_2),$$

а если $\|x_1+x_2\|=\|x_1\|-\|x_2\|$, *то*

$$p_{x_1+x_2}(h_1+h_2) \geqslant p_{x_1}(h_1)-p_{x_2}(h_2).$$

◀ В силу неравенств (3) функция $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, определенная равенством $\varphi(t)=\|tx+h\|-t\|x\|$, $t\geqslant 0$, монотонна и ограничена. Поэтому для любой сходящейся к нулю последовательности чисел $r_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, существует предел (5), который не зависит от выбора $(r_n:n\in\mathbb{N})$ и для которого имеет место утверждение а). Утверждения в), е), и) очевидны, а д) следует из г). Докажем утверждения б), г), ж), з), к).

(б) Для любого $t\geqslant 0$ имеем

$$\|tx+\alpha x\|-t\|x\| = (|t+\alpha|-t)\|x\| = \Re\alpha\,\|x\|+(|t+\alpha|-t-\Re\alpha)\|x\|.$$

Однако $\inf\limits_{t\geqslant 0}(|t+\alpha|-t-\Re\alpha)=0$. Поэтому $p_x(\alpha x)=\Re\alpha\,\|x\|$.

(г) Для любого $t\geqslant 0$ имеем

$$(\|2tx-h_1\|-2t\|x\|)-(\|tx-h_2\|-t\|x\|) \leqslant \|tx+h_1+h_2\|-t\|x\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|2^{-1}tx+h_1\|-2^{-1}t\|x\|)+(\|2^{-1}tx+h_2\|-2^{-1}t\|x\|).$$

Отсюда получаем, что

$$p_x(h_1)-p_x(-h_2) \leqslant p_x(h_1+h_2) \leqslant p_x(h_1)+p_x(h_2).$$

В силу первого из полученных неравенств с учетом в) имеем

$$p_x(h_1)-p_x(h_2) \leqslant p_x(h_1-h_2) \leqslant \|h_1-h_2\|,$$
$$p_x(h_2)-p_x(h_1) \leqslant p_x(h_2-h_1) \leqslant \|h_2-h_1\|.$$

Поэтому $|p_x(h_1)-p_x(h_2)|\leqslant\|h_1-h_2\|$. Пусть $p_x(h_2)+p_x(-h_2)=0$. Тогда

$$p_x(h_1)+p_x(h_2) = p_x(h_1)-p_x(-h_2) \leqslant p_x(h_1+h_2) \leqslant p_x(h_1)+p_x(h_2).$$

Следовательно, $p_x(h_1+h_2)=p_x(h_1)+p_x(h_2)$.

(ж) Пусть $\alpha_1'=-\,p_x(h)\|x\|^{-1}$ и $\alpha_2'=-p_x(-h)\|x\|^{-1}$. В силу б) и г) имеем

$$p_x(\alpha_1'x+h) = p_x(\alpha_1'x)+p_x(h) = \alpha_1'\|x\|+p_x(h) = 0,$$
$$p_x(\alpha_2'x-h) = p_x(\alpha_2'x)+p_x(-h) = \alpha_2'\|x\|+p_x(-h) = 0.$$

Обозначим $\beta_1=\|\alpha_1'x+h\|^{-1}$, $\beta_2=\|\alpha_2'x-h\|^{-1}$, $\alpha_1=\alpha_1'\beta_1$ и $\alpha_2=\alpha_2'\beta_2$. Очевидно, векторы $e_1=\alpha_1x+\beta_1h$ и $e_2=\alpha_2x-\beta_2h$ удовлетворяют требованиям теоремы.

(з) Поскольку при $x=0$ в силу $p_0(h)=\|h\|$ имеем $\widetilde{X}=\{0\}$, нужно рассматривать случай $x\neq 0$. Если $h\in\widetilde{X}$ и $\alpha\in\mathbb{R}$, то, очевидно, $\alpha h\in\widetilde{X}$ и $p_x(\alpha h)=\alpha p_x(h)$. Для $h_1\in\widetilde{X}$ и $h_2\in\widetilde{X}$ в силу г) имеем $p_x(h_1+h_2)=p_x(h_1)+p_x(h_2)$ и

$$p_x(h_1+h_2)+p_x(-h_1-h_2) = p_x(h_1)+p_x(h_2)+p_x(-h_1)+p_x(-h_2) = 0,$$

т. е. $h_1+h_2\in\widetilde{X}$. Поэтому $\widetilde{X}$ является вещественным векторным подпространством, а сужение функционала p_x на $\widetilde{X}$ является вещественно линейным функционалом. Замкнутость $\widetilde{X}$ следует из секвенциальной непрерывности p_x. Рассмотрим конечномерное вещественное векторное подпространство $X_1\subset\widetilde{X}$ и сходящуюся к нулю последовательность ненулевых векторов $h_n\in X_1$, $n\in\mathbb{N}$. Обозначим $t_n=\|h_n\|$ и $e_n=t_n^{-1}h_n$. Докажем, что последовательность чисел

$$t_n^{-1}(\|x+h_n\|-\|x\|-p_x(h_n)) = \|t_n^{-1}x+e_n\|-t_n^{-1}\|x\|-p_x(e_n),\ n\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

сходится к нулю. Для этого достаточно доказать, что каждая подпоследовательность этой последовательности обладает сходящейся к нулю подпоследовательностью. Так как X_1 конечномерно и $\|e_n\|=1$ для всех $n\in\mathbb{N}$, то каждая подпоследовательность последовательности $(e_n:n\in\mathbb{N})$ обладает сходящейся подпоследовательностью $(e_{k_n}:n\in\mathbb{N})$. Пусть e — предел последовательности $(e_{k_n}:n\in\mathbb{N})$. Тогда

$$0\leqslant \|t_{k_n}^{-1}x+e_{k_n}\|-t_{k_n}^{-1}\|x\|-p_x(e_{k_n})\leqslant$$

$$\leqslant (\|t_{k_n}^{-1}x+e\|-t_{k_n}^{-1}\|x\|-p_x(e))+\|e_{k_n}-e\|+(p_x(e)-p_x(e_{k_n})).$$

Следовательно, $\lim\limits_n(\|t_{k_n}^{-1}x+e_{k_n}\|-t_{k_n}^{-1}\|x\|-p_x(e_{k_n}))=0$ и, значит, последовательность чисел (6) сходится к нулю. Поэтому сужение функционала p_x на X_1 является вещественной производной нормы в точке x по X_1.

(к) Если $\|x_1+x_2\|=\|x_1\|+\|x_2\|$, то для всех $t\geqslant 0$

$$\|t(x_1+x_2)+h_1+h_2\|-t\|x_1+x_2\|\leqslant$$

$$\leqslant (\|tx_1+h_1\|-t\|x_1\|)+(\|tx_2+h_2\|-t\|x_2\|).$$

Отсюда следует, что $p_{x_1+x_2}(h_1+h_2)\leqslant p_{x_1}(h_1)+p_{x_2}(h_2)$. Если же $\|x_1+x_2\|=\|x_1\|-\|x_2\|$, то

$$\|t(x_1+x_2)+h_1+h_2\|-t\|x_1+x_2\| \geqslant$$
$$\geqslant (\|tx_1+h_1\|-t\|x_1\|)-(\|tx_2+h_2\|-t\|x_2\|)$$

и, значит, $p_{x_1+x_2}(h_1+h_2) \geqslant p_{x_1}(h_1)-p_{x_2}(h_2)$. ►

В связи с утвержением з) теоремы 3.74 отметим, что норма может не быть вещественно дифференцируемой в точке x по $\widetilde{X}$ (см. пример в § 16, n° 14). Заметим еще, что любая норма не является вещественно дифференцируемой в нуле по одномерному вещественному векторному подпространству.

Для векторного пространства X над числовым полем $\mathbb{K}$ отображение $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ декартова произведения $X \times X$ в $\mathbb{K}$ называется *квазискалярным произведением* на X, если

1) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ *для всех* $x \in X$*;*

2) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ *для всех* x *и* y *из* X*;*

3) $\langle x+z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$ *для всех* x*,* y *и* z *из* X*;*

4) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ *для всех* $x \in X$*,* $y \in X$ *и* $\alpha \in \mathbb{K}$*.*

При этом число $\langle x, y\rangle$ называется квазискалярным произведением векторов x и y, а пара $(X, \langle\cdot\,, \cdot\rangle)$ называется линейным пространством с квазискалярным произведением.

На векторном пространстве X квазискалярное произведение определяет по формуле $p(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$, полунорму p, причем $|\langle x, y\rangle| \leqslant p(x)p(y)$ для всех x и y из X. При помощи квазискалярного произведения определяются в X две линейные операции предела Λ и Λ^*. Именно: для $x \in X$ и последовательности $\hat{x} = (x_n : n \in \mathbb{N})$ в X считается $x \in \Lambda(\hat{x})$ $(x \in \Lambda^*(\hat{x}))$, если $\lim\limits_n \langle x_n - x, x_n - x\rangle = 0$ (соответственно $\lim\limits_n \langle x_n - x, y\rangle = 0$ для всех $y \in X$). Ясно, что $\Lambda \leqslant \Lambda^*$ и $\Lambda(\dot{0}) = \Lambda^*(\dot{0})$, причем Λ совпадает с операцией предела, определенной полунормой p, а Λ^* совпадает с операцией предела ослабленной сходимости, соответствующей пространству (X, Λ) (ее будем называть операцией предела ослабленной сходимости, определенной квазискалярным произведением). Заметим, что если одно из линейных пространств (X, Λ) и (X, Λ^*) полно, то другое тоже полно.

Квазискалярное произведение называется *скалярным произведением*, если равенство $\langle x, x\rangle = 0$ имеет место только для $x = 0$. В этом случае по формуле $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$ определяется норма на X, причем $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ для всех x и y из X. Полное линейное пространство со скалярным произведением называется *гильбертовым* пространством.

Теорема 3.75. *Если в нормированном линейном пространстве X норма порождается скалярным произведением, то она вещественно дифференцируема в каждой точке $x \neq 0$, а $\|x\|^{-1}\Re\langle h,\, x\rangle$ является ее вещественным дифференциалом в точке x при приращении $h \in X$. Обратно, если для любых ненулевых векторов x и h выполняются равенства $p_x + p_{-x} = 0$, $\|x\|p_x(h) = \|h\|p_h(x)$ (они также необходимы), то норма порождается скалярным произведением, причем $\Re\langle h,\, x\rangle = \|x\|p_x(h)$ для всех x и h (т. е. $\langle h,\, x\rangle = \|x\|p_x(h)$ в случае вещественного пространства и $\langle h,\, x\rangle = \|x\|(p_x(h) + ip_{ix}(h))$ в случае комплексного пространства).*

◀ Пусть норма порождается скалярным произведением. Тогда для любых ненулевых векторов x и h имеем

$$\|x+h\| - \|x\| = (\|x+h\|^2 - \|x\|^2)(\|x+h\| + \|x\|)^{-1} =$$

$$= (2\Re\langle h,\, x\rangle + \|h\|^2)(\|x+h\| + \|x\|)^{-1} =$$

$$= \|x\|^{-1}\Re\langle h,\, x\rangle - \frac{(\|x+h\| - \|x\|)\Re\langle h,\, x\rangle}{\|x\|(\|x+h\| + \|x\|)} + \frac{\|h\|^2}{\|x+h\| + \|x\|}.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\|h\|^{-1}\big|\|x+h\| - \|x\| - \|x\|^{-1}\Re\langle h,\, x\rangle\big| \leqslant$$

$$\leqslant (\|x+h\| - \|x\| + \|h\|)(\|x+h\| + \|x\|)^{-1},$$

из которого следует утверждение относительно $\|x\|^{-1}\Re\langle h,\, x\rangle$.

С использованием теоремы 3.74 проверка справедливости обратного утверждения не вызывает затруднений. ▶

Замечание 3.18. Известно также другое необходимое и достаточное условие, при котором норма на векторном пространстве X порождается скалярным произведением (см. [38], с. 162). Это — выполнение равенства

$$\|x+h\|^2 + \|x-h\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|h\|^2)$$

для всех x и h из X. При наличии этого равенства скалярное произведение, порождающее рассматриваемую норму, в случае вещественного пространства определяется для всех x и h из X равенством $\langle x,\, h\rangle = \frac{1}{4}(\|x+h\|^2 - \|x-h\|^2)$, а в комплексном случае — равенством

$$\langle x,\, h\rangle = \tfrac{1}{4}((\|x+h\|^2 - \|x-h\|^2) + \mathrm{i}(\|x+\mathrm{i}h\|^2 - \|x-\mathrm{i}h\|^2)).$$

Замечание 3.19. Пусть $(X,\, \langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ — бесконечномерное вещественное гильбертово пространство, а λ^* — операция предела ослабленной сходимости, определенная в X скалярным произведением. Функционал f на X, определенный равенством $f(x)=\|x\|^2=\langle x,\, x\rangle$, $x\in X$, не является λ^*-секвенциально непрерывным ни в одной точке, хотя f дифференцируем по Себаштьяну э Сильва в любой точке (в качестве векторной топологии в X, определяющей операцию предела λ^*, принимается ослабленная топология (см. замечание 3.15)).

Пусть X и Y — нормированные линейные пространства, $X_0\subset X$ — вещественное векторное подпространство, а $f\colon X_0\to Y$ — секвенциально непрерывное в нуле положительно однородное отображение. Нормой отображения f называется число, обозначаемое через $\|f\|$ и определяемое равенством

$$\|f\| = \sup\{\|f(\xi)\| : \xi\in X_0,\ \|\xi\|\leqslant 1\}$$

(секвенциальная непрерывность f в нуле необходима и достаточна для конечности правой части этого равенства).

С учетом обозначений, использованных в теореме 3.74, справедлива

Теорема 3.76. *Пусть X — нормированное линейное пространство, $X_0\subset X$ — вещественное векторное подпространство, $f\colon X_0\to\mathbb{R}$ — такой секвенциально непрерывный вещественно линейный функционал, что $f(x)=\|f\|\neq 0$ для некоторого $x\in X_0$ с $\|x\|=1$, X_0' — ядро функционала f, а $X_0''= X_0'\ominus(\widetilde{X}\cap X_0')$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

а) $f(h)\leqslant\|f\|p_x(h)$ для всех $h\in X_0$, причем $f(h)=\|f\|p_x(h)$ для $h\in\widetilde{X}\cap X_0$.

б) Для любых $z\in X$ и $h\in X_0'$ справедливы неравенства $p_x(z-h)\geqslant -p_x(-z)$ и $p_x(h-z)\geqslant -p_x(z)$, причем

$$\inf_{h\in X_0'} p_x(z-h) = \inf_{h\in X_0''} p_x(z-h), \qquad \inf_{h\in X_0'} p_x(h-z) = \inf_{h\in X_0''} p_x(h-z), \tag{7}$$

$$0\leqslant \inf_{h\in X_0'} p_x(z-h) + \inf_{h\in X_0'} p_x(h-z) \leqslant p_x(z)+p_x(-z). \tag{8}$$

Множество $\widetilde{X}_0$ тех $z\in X$, для которых

$$\inf_{h\in X_0'} p_x(z-h) + \inf_{h\in X_0'} p_x(h-z) = 0, \tag{9}$$

является замкнутым вещественным векторным подпространством, содержащим $\widetilde{X}+X_0$, причем если $X_0\subset\widetilde{X}$, то $\widetilde{X}_0=\widetilde{X}$.

в) Если $X'\subset X$ — вещественное векторное подпространство, содержащее X_0, а $F\colon X'\to\mathbb{R}$ — такой вещественно ли-

нейный функционал, что $F(h)=f(h)$ *для всех* $h\in X_0$, *то равенство* $\|F\|=\|f\|$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $F(h)\leqslant\|f\|p_x(h)$ *для всех* $h\in X'$ *(т. е. всякое вещественно линейное вещественное продолжение функционала* f *на* X' *с сохранением нормы является продолжением с сохранением мажоранты* $\|f\|p_x$ *и обратно).*

г) Функционал f *тогда и только тогда допускает единственное вещественно линейное вещественное продолжение с сохранением нормы на вещественное векторное подпространство* $X'\subset X$, *содержащее* X_0, *когда* $X'\subset\widetilde{X}_0$ *(т. е.* $\widetilde{X}_0$ *является наибольшим вещественным векторным подпространством в* X, *на которое* f *допускает единственное вещественно линейное вещественное продолжение с сохранением нормы).*

◀ (а) Для всех $h\in X_0$ и $t\geqslant 0$ имеем

$$f(h)=f(tx+h)-tf(x)\leqslant\|f\|(\|tx+h\|-t\|x\|).$$

Отсюда вытекает, что $f(h)\leqslant\|f\|p_x(h)$. Если $h\in\widetilde{X}\cap X_0$, то

$$-f(h)=f(-h)\leqslant\|f\|p_x(-h)=-\|f\|p_x(h).$$

Поэтому $f(h)\geqslant\|f\|p_x(h)$ и, следовательно, $f(h)=\|f\|p_x(h)$.

(б) Если $h\in X_0'$, то в силу а) $p_x(h)\geqslant 0$ и $p_x(-h)\geqslant 0$, причем если $h\in\widetilde{X}\cap X_0'$, то $p_x(h)=p_x(-h)=0$. В силу утверждения г) теоремы 3.74 для любых $z\in X$ и $h\in X_0'$ имеем

$$p_x(z-h)\geqslant p_x(-h)-p_x(-z)\geqslant -p_x(-z),$$

$$p_x(h-z)\geqslant p_x(-h)-p_x(z)\geqslant -p_x(z).$$

Вектор $h\in X_0'$ представим в виде $h=h'+h''$, где $h'\in\widetilde{X}\cap X_0'$ и $h''\in X_0''$. Тогда

$$p_x(z-h)=p_x(z-h'')+p_x(-h')=p_x(z-h''),$$

$$p_x(h-z)=p_x(h')+p_x(h''-z)=p_x(h''-z).$$

Отсюда получаются равенства (7). Если $h_1\in X_0'$ и $h_2\in X_0'$, то

$$0\leqslant p_x(h_2-h_1)\leqslant p_x(z-h_1)+p_x(h_2-z)\leqslant$$

$$\leqslant p_x(z)+p_x(-z)+p_x(-h_1)+p_x(h_2).$$

Поэтому имеют место неравенства (8).

Для любых $z\in\widetilde{X}_0$ и $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\inf_{h\in X_0'} p_x(\alpha z-h)+\inf_{h\in X_0'} p_x(h-\alpha z)=$$
$$=|\alpha|(\inf_{h\in X_0'} p_x(z-h)+\inf_{h\in X_0'} p_x(h-z))=0,$$

т. е. $\alpha z\in\widetilde{X}_0$. Пусть z_1 и z_2 — векторы из $\widetilde{X}_0$, а $h_1,\ h_2,\ h_1'$ и h_2' — векторы из $\widetilde{X}_0'$. Тогда

$$0\leqslant p_x(h_1'+h_2'-h_1-h_2)\leqslant p_x(z_1+z_2-h_1-h_2)+p_x(h_1'+h_2'-z_1-z_2)\leqslant$$
$$\leqslant p_x(z_1-h_1)+p_x(z_2-h_2)+p_x(h_1'-z_1)+p_x(h_2'-z_2).$$

Отсюда следует, что

$$\inf_{h\in X_0'} p_x(z_1+z_2-h)+\inf_{h\in X_0'} p_x(h-z_1-z_2)=0,$$

т. е. $z_1+z_2\in\widetilde{X}_0$. Тем самым $\widetilde{X}_0$ является вещественным векторным подпространством в X. Замкнутость $\widetilde{X}_0$ легко вытекает из секвенциальной непрерывности p_x. Пусть $z\in X_0$. Нетрудно убедиться, что z можно представить в виде $z=\alpha x+h'$, где $h'\in X_0'$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. Поэтому для любых $h_1\in X_0'$ и $h_2\in X_0'$

$$p_x(z-h_1)+p_x(h_2-z)=p_x(\alpha x)+p_x(h'-h_1)+$$
$$+p_x(h_2-h')+p_x(-\alpha x)=p_x(h'-h_1)+p_x(h_2-h').$$

Отсюда получаем, что для z выполняется (9), т. е. $z\in\widetilde{X}_0$ и, значит, $X_0\subset\widetilde{X}_0$. Если же $z\in\widetilde{X}$, то

$$p_x(z-h_1)+p_x(h_2-z)=p_x(z)+p_x(-h_1)+p_x(h_2)+p_x(-z)=$$
$$=p_x(-h_1)+p_x(h_2).$$

Отсюда опять вытекает, что для z выполняется (9), т. е. $z\in\widetilde{X}_0$ и, значит, $\widetilde{X}\subset\widetilde{X}_0$. Таким образом, $X_0+\widetilde{X}\subset\widetilde{X}_0$. Пусть $X_0\subset\widetilde{X}_0$ и $z\in\widetilde{X}_0$. Тогда

$$p_x(z-h_1)+p_x(h_2-z)=p_x(z)+p_x(-h_1)+p_x(h_2)+p_x(-z)=$$
$$=p_x(z)+p_x(-z).$$

Отсюда в силу (9) получаем, что $p_x(z)+p_x(-z)=0$, т. е. $z\in\widetilde{X}$. Поэтому $\widetilde{X}_0\subset\widetilde{X}$ и, следовательно, $\widetilde{X}_0=\widetilde{X}$.

(в) Пусть вещественно линейный функционал $F: X'\to\mathbb{R}$, где $X_0\subset X'\subset X$, такой, что $\|F\|=\|f\|$ и $F(h)=f(h)$ для всех $h\in X_0$. Тогда $F(x)=f(x)=\|f\|=\|F\|$. Поэтому в силу утверждения а)

$F(h)\leqslant\|F\|p_x(h)=\|f\|p_x(h)$ для всех $h\in X'$. Обратно, если F является вещественно линейным вещественным продолжением функционала f, таким, что $F(h)\leqslant\|f\|p_x(h)$ для всех $h\in X'$, то $F(h)\leqslant\|f\|\|h\|$ и, следовательно, $\|F\|=\|f\|$.

(г) Пусть $F:X'\to\mathbb{R}$ — вещественно линейное продолжение функционала f с сохранением нормы на некоторое вещественное векторное подпространство $X'\subset X$, содержащее X_0. Такой функционал F существует согласно известной теореме Хана–Банаха для нормированных линейных пространств (см., например, [47], с. 138). Пусть $z\in X'$. Из (8) следует, что если обозначить $\varphi(z)=\inf\limits_{h\in X_0'}\|f\|p_x(z-h)$, то $-\varphi(-z)\leqslant\varphi(z)$. Очевидно, $F(z)=F(z-h)\leqslant\|f\|p_x(z-h)$ и $-F(z)=F(h-z)\leqslant\|f\|p_x(h-z)$ при $h\in X_0'$. Поэтому $-\varphi(-z)\leqslant F(z)\leqslant\varphi(z)$. Пусть число b такое, что $-\varphi(-z)\leqslant b\leqslant\varphi(z)$. Отсюда, как легко убедиться, следует $-\varphi(-tz)\leqslant tb\leqslant\varphi(tz)$ для всех $t\in\mathbb{R}$. При $z\in X'\backslash X_0$ на вещественном векторном подпространстве $\{y+tz: y\in X_0,\ t\in\mathbb{R}\}$ определим вещественно линейный функционал F_1 при помощи равенства $F_1(y+tz)=f(y)+tb$. Вектор $y\in X_0$ представим в виде $y=\alpha x-h$, где $h\in X_0'$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$F_1(y+tz)=f(\alpha x)+tb=\|f\|p_x(\alpha x)+tb\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|(p_x(\alpha x)+p_x(tz-h))=\|f\|p_x(\alpha x-h+tz)=$$
$$=\|f\|P_x(y+tz)\leqslant\|f\|\|y+tz\|.$$

Следовательно, F_1 является продолжением функционала f с сохранением нормы, причем $F_1(z)=b$. Согласно теореме Хана–Банаха, F_1 допускает вещественно линейное вещественное продолжение на X' с сохранением нормы. Отсюда вытекает, что рассмотренный выше функционал F единственен тогда и только тогда, когда $-\varphi(-z)=\varphi(z)$ для всех $z\in X'$. А это равенство эквивалентно равенству (9). ▶

Замечание 3.20. Из доказательства теоремы 3.76 ясно, что всякое вещественно линейное вещественное продолжение функционала f на X с сохранением нормы является продолжением с сохранением мажоранты $\varphi: X\to\mathbb{R}$, определенной равенством $\varphi(z)=\inf\limits_{h\in X_0'}\|f\|p_x(z-h),\ z\in X$.

Как известно (см. [47], с. 134—140), в нормированном линейном пространстве X для каждого вектора $x\neq 0$ существует такой секвенциально непрерывный вещественно линейный вещественный функционал f, определенный на X, что $f(x)=\|x\|$ и $\|f\|$=1. При этом $X=X_0\oplus X_1$, где X_0 — ядро функционала f, а $X_1 = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$. Кроме того, в случае комплексного пространства для любого секвенциально непрерывного линейного функционала g на X функционал f, определенный равенством $f(h) = \Re(g(h))$, $h \in X$, является секвенциально непрерывным вещественно линейным вещественным функционалом на X, имеющим норму $\|f\| = \|g\|$, причем $g(h) = f(h) - \mathrm{i} f(\mathrm{i}h)$ для всех $h \in X$. Обратно, для любого секвенциально непрерывного вещественно линейного вещественного функционала f на X функционал g, определенный равенством $g(h) = f(h) - \mathrm{i}f(\mathrm{i}h)$, $h \in X$, является секвенциально непрерывным линейным функционалом на X, имеющим норму $\|g\| = \|f\|$. С учетом сказанного из теорем 3.74 и 3.76 вытекает

Следствие 3.16. *Пусть X — нормированное линейное пространство, $x \in X$ — некоторый вектор с нормой $\|x\| = 1$, $X_1 = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$, H' — множество всех таких $h \in X$, что $p_x(h) \geqslant 0$ и $p_x(-h) \geqslant 0$, а H_0 — множество всех таких $h \in X$, что $p_x(h) = p_x(-h) = 0$. Тогда*

а) $X = H' + X_1$, причем $rH' \subset H'$ для всех $r \in \mathbb{R}$, а H_0 является вещественным векторным подпространством;

б) равенство $H_0 = H'$ эквивалентно каждому из равенств $X = H_0 + X_1$ и $p_x + p_{-x} = 0$;

в) для ядра X_0 всякого секвенциально непрерывного вещественно линейного функционала $f : X \to \mathbb{R}$, такого, что $f(x) = \|f\| \neq 0$, имеют место включения $H_0 \subset X_0 \subset H'$, причем выполнение равенства $H_0 = H'$ необходимо и достаточно для единственности функционала f с указанными свойствами при заданной норме $\|f\|$;

г) ядро всякого секвенциально непрерывного линейного функционала g на X, такого, что $g(x) = \|g\| \neq 0$, содержится в H', причем выполнение равенства $H_0 = H'$ необходимо и достаточно для единственности функционала g с указанными свойствами при заданной норме $\|g\|$. ▶

Теорема 3.77. *Пусть X — нормированное линейное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, g — такой секвенциально непрерывный линейный функционал на X_0, что $g(x) = \|g\| \neq 0$ для некоторого $x \in X_0$ с $\|x\| = 1$, Y — ядро функционала g, а $\widetilde{X}_0$ — множество всех таких $z \in X$, что*

$$\inf_{y \in Y} p_x(z - y) + \inf_{y \in Y} p_x(y - z) = 0.$$

Тогда условие $X' \subset \widetilde{X}_0$ необходимо и достаточно для того чтобы функционал g допускал единственное линейное продол-

жение с сохранением нормы на векторное подпространство $X' \subset X$, содержащее X_0.

◀ Очевидно, нужно рассматривать случай комплексного пространства. Вещественно линейный функционал, $f : X_0 \to \mathbb{R}$ определим равенством $f(h) = \Re(g(h))$, $h \in X_0$. Тогда $g(h) = f(h) - \mathrm{i} f(\mathrm{i}h)$, причем $f(x) = g(x) = \|g\| = \|f\|$. Пусть X_0' — ядро функционала f. Легко убедиться, что $X_0' = \{y + \mathrm{i}\alpha x : y \in Y, \alpha \in \mathbb{R}\}$. В силу утверждения г) теоремы 3.74 для любых $z \in X$ и $h = y + \mathrm{i}\alpha x \in X_0'$ имеем

$$p_x(z-h) = p_x(z - y - \mathrm{i}\alpha x) = p_x(z-y),$$
$$p_x(h-z) = p_x(y + \mathrm{i}\alpha x - z) = p_x(y-z).$$

Следовательно,

$$\inf_{h \in X_0'} p_x(z-h) = \inf_{y \in Y} p_x(z-y), \quad \inf_{h \in X_0'} p_x(h-z) = \inf_{y \in Y} p_x(y-z).$$

Отсюда вытекает, что $\widetilde{X}_0$ является множеством всех z, удовлетворяющих равенству (9). Пусть $X' \subset X$ — векторное подпространство, содержащее X_0, а F — вещественно линейное вещественное продолжение на X' функционала f с сохранением нормы. Тогда функционал G, определенный на X' равенством $G(h) = F(h) - \mathrm{i}F(\mathrm{i}h)$, $h \in X'$, является линейным продолжением функционала g с сохранением нормы. Обратно, если G — линейное продолжение на X' функционала g с сохранением нормы, то функционал F, определенный на X' равенством $F(h) = \Re(G(h))$, $h \in X'$, является вещественно линейным продолжением функционала f с сохранением нормы, причем $G(h) = F(h) - \mathrm{i}F(\mathrm{i}h)$. Поэтому в силу утверждения г) теоремы 3.76 функционал g тогда и только тогда допускает на X' единственное линейное продолжение с сохранением нормы, когда $X' \subset \widetilde{X}_0$. ▶

Предложение 3.62. *Пусть X — нормированное линейное пространство, $X_0 \subset X$ — векторное (вещественное векторное) подпространство, а f — секвенциально непрерывный линейный (вещественно линейный вещественный) функционал на X_0. Чтобы функционал f допускал единственное линейное (вещественно линейное вещественное) продолжение на X с сохранением нормы, необходимо выполнение равенства*

$$\inf_{x' \in X_0} \inf_{x'' \in X_0} \left(\|f\|(\|x'+z\| + \|x''-z\|) - \Re(f(x'+x''))\right) = 0 \quad (10)$$

для каждого $z \in X$, и достаточно выполнение этого равенства для каждого $z \in X \setminus \overline{X}_0$.

◀ Сначала рассмотрим случай вещественного векторного подпространства X_0 и вещественно линейного вещественного функционала f. В этом случае равенство (10) принимает вид $\psi(z)+\psi(-z)=0$, где $\psi(z)=\inf\limits_{x\in X_0}(\|f\|\|x+z\|-f(x))$.

Для любых $x'\in X_0$, $x''\in X_0$ и $z\in X$ имеем

$$f(x')+f(x'') = f(x'+x'') \leqslant \|f\|\|x'+x''\| \leqslant \|f\|(\|x'+z\|+\|\|x''-z\|).$$

Отсюда получаем

$$(\|f\|\|x'+z\|-f(x'))+(\|f\|\|x''-z\|-f(x''))\geqslant 0$$

и, следовательно, $\psi(z)+\psi(-z)\geqslant 0$. Очевидно, $\psi(z)+\psi(-z)=0$ при $z\in\overline{X}_0$.

Пусть функционал $F:X\to\mathbb{R}$ является вещественно линейным вещественным продолжением функционала f с сохранением нормы. Для любых $x\in X_0$ и $z\in X$ имеем

$$f(x)+F(z)=F(x+z)\leqslant\|F\|\|x+z\|=\|f\|\|x+z\|,$$

$$f(x)-F(z)=F(x-z)\leqslant\|F\|\|x-z\|=\|f\|\|x-z\|.$$

Поэтому $-(\|f\|\|x-z\|-f(x))\leqslant F(z)\leqslant\|f\|\|x+z\|-f(x)$. Отсюда следует, что $-\psi(-z)\leqslant F(z)\leqslant\psi(z)$.

С учетом неравенства $-\psi(-z)\leqslant\psi(z)$ рассмотрим некоторое такое число b, что $-\psi(-z)\leqslant b\leqslant\psi(z)$. Отсюда, как легко убедиться, следует, что $-\psi(-tz)\leqslant tb\leqslant\psi(tz)$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Используя это, нетрудно убедиться также в справедливости

$$-\|f\|\|x+tz\|\leqslant f(x)+tb\leqslant\|f\|\|x+tz\| \tag{11}$$

для всех $x\in X_0$ и $t\in\mathbb{R}$. При $z\in X\backslash X_0$ на вещественном векторном подпространстве $X''=\{x+tz:x\in X_0,\, t\in\mathbb{R}\}$ определим вещественно линейный вещественный функционал F_1, положив $F_1(x+tz)=f(x)+tb$. В силу (11) имеем $|F_1(x+tz)|\leqslant$ $\leqslant\|f\|\|x+tz\|$. Поэтому F_1 является продолжением функционала f на X'' с сохранением нормы, причем $F_1(z)=b$. Однако F_1 допускает вещественно линейное вещественное продолжение на X с сохранением нормы. Отсюда вытекает, что рассмотренный выше функционал F единственен тогда и только тога, когда $-\psi(-z)=\psi(z)$ для всех $z\in X\backslash X_0$. А это равенство эквивалентно равенству (10).

Рассмотрим теперь случай, когда линейное пространство комплексное, а функционал f линейный. Вещественно линейный функционал $g:X_0\to\mathbb{R}$ определим равенством $g(x)=\Re(f(x))$, $x\in X_0$. Тогда $f(x)=g(x)-\mathrm{i}g(\mathrm{i}x)$, причем $\|f\|=\|g\|$. Поэтому равенство (10) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\inf_{x'\in X_0}\inf_{x''\in X_0}(\|g\|(\|x'+z\|+\|x''-z\|)-g(x'+x''))=0. \qquad (12)$$

Легко доказывается, что функционал f тогда и только тогда допускает единственное линейное продолжение на X с сохранением нормы, когда g допускает единственное вещественно линейное вещественное продолжение на X с сохранением нормы. Однако, как уже было доказано, функционал g тогда и только тогда допускает единственное вещественно линейное вещественное продолжение на X с сохранением нормы, когда выполняется равенство (12). Поэтому функционал f тогда и только тогда допускает единственное линейное продолжение на X с сохранением нормы, когда выполняется равенство (10). ▶

Теорема 3.78. *Пусть X — нормированное линейное пространство, $X_0\subset X$ — векторное (вещественное векторное) подпространство, а $E=\{x\in X_0:\|x\|=1\}$ и $H=X\ominus\overline{X}_0$. Если для любых $h\in H$, последовательности векторов $e_n\in E$, $n\in\mathbb{N}$, и сходящейся к нулю последовательности чисел $r_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, выполняется равенство*

$$\lim_n(p_{e_n+r_nh}(h)+p_{e_n-r_nh}(-h))=0, \qquad (13)$$

то всякий секвенциально непрерывный линейный (вещественно линейный вещественный) функционал f, определенный на X_0, допускает единственное линейное (вещественно линейное вещественное) продолжение на X с сохранением нормы.

◀ Очевидно, нужно рассматривать случай $\|f\|\neq 0$. Докажем, что для каждого $z\in X\setminus\overline{X}_0$ имеет место (10). Равенство (10) при помощи обозначений $x'=t^{-1}e-\xi$ и $x''=t^{-1}e+\xi$, где $t>0$, $e\in E$ и $\xi\in X_0$, приведем к виду

$$\inf_{t>0}\inf_{e\in E}\inf_{\xi\in X_0}t^{-1}(\|e+t(z-\xi)\|+\|e-t(z-\xi)\|-2\|f\|^{-1}\Re(f(e)))=0. \qquad (14)$$

Вектор $z\in X\setminus\overline{X}_0$ представим в виде $z=h+\eta$, где $h\in H$ и $\eta\in\overline{X}_0$. Для любой сходящейся к η последовательности векторов $\xi_n\in X_0$, $n\in\mathbb{N}$, имеем

$$\inf_{\xi\in X_0}(\|e+t(h+\eta-\xi)\|+\|e-t(h+\eta-\xi)\|)\leqslant$$
$$\leqslant\lim_n(\|e+t(h+\eta-\xi_n)\|+\|e-t(h+\eta-\xi_n)\|)=\|e+th\|+\|e-th\|.$$

Поэтому равенство (14) будет доказано, если покажем, что для каждого $h \in H$

$$\inf_{t>0} \inf_{e\in E} t^{-1}(\|e+th\| + \|e-th\| - 2\|f\|^{-1}\Re(f(e))) = 0. \tag{15}$$

Вещественно линейный функционал $g : X_0 \to \mathbb{R}$ определим равенством $g(x) = \Re(f(x))$, $x \in X_0$. Тогда $\|g\| = \|f\|$. Из определения нормы положительно однородного отображения следует существование такой последовательности векторов $e_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, что $\lim\limits_n g(e_n) = \|g\|$. Следовательно, $\lim\limits_n \Re(f(e_n)) = \|f\|$. Выберем сходящуюся к нулю последовательность чисел $t_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, так, чтобы $\lim\limits_n t_n^{-1}(\|f\| - \Re(f(e_n))) = 0$. Очевидно,

$$\inf_{t>0} \inf_{e\in E} t^{-1}(\|e+th\| + \|e-th\| - 2\|f\|^{-1}\Re(f(e))) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{n\in\mathbb{N}} t_n^{-1}(\|e_n + t_n h\| + \|e_n - t_n h\| - 2). \tag{16}$$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $\psi_n : \mathbb{R} \to R$, определенную при помощи равенства $\psi_n(r) = \|e_n + rt_n h\| + \|e_n - rt_n h\|$, $r \in \mathbb{R}$. Функция ψ_n непрерывна и имеет в каждой точке $r \in \mathbb{R}$ правую производную, равную $p_{e_n + rt_n h}(t_n h) + p_{e_n - rt_n h}(-t_n h)$. Отсюда с учетом замечания 3.17 вытекает, что

$$\|e_n + t_n h\| + \|e_n - t_n h\| - 2 = \psi_n(1) - \psi_n(0) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta<1} (p_{e_n+\theta t_n h}(t_n h) + p_{e_n - \theta t_n h}(-t_n h)).$$

Поэтому

$$t_n^{-1}(\|e_n + t_n h\| + \|e_n - t_n h\| - 2) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0<\theta<1} (p_{e_n+\theta t_n h}(h) + p_{e_n - \theta t_n h}(-h)).$$

Следовательно,

$$t_n^{-1}(\|e_n + t_n h\| + \|e_n - t_n h\| - 2) < p_{e_n + r_n h}(h) + p_{e_n - r_n h}(-h) + n^{-1}, \tag{17}$$

где $r_n \in (0;\, t_n)$ — некоторые числа. Из (13) и (17) следует, что $\lim\limits_n t_n^{-1}(\|e_n + t_n h\| + \|e_n - t_n h\| - 2) = 0$. Отсюда в силу (16) вытекает справедливость равенства (15). Поэтому, согласно предложению 3.62, функционал f допускает единственное линейное (вещественно линейное вещественное) продолжение на X с сохранением нормы. ►

Отметим, что если в нормированном линейном пространстве норма порождается скалярным произведением, то любое вещественное векторное подпространство этого пространства удовлетворяет условию теоремы 3.78 (другие примеры такого рода приведены в § 16, n° 15).

Замечание 3.21. Пусть X — нормированное линейное пространство, $X_0 \subset X$ — такое векторное подпространство, что каждый определенный на X_0 секвенциально непрерывный линейный функционал допускает единственное линейное продолжение на X с сохранением нормы, $\mathcal{F}'_0$ — векторное пространство всех секвенциально непрерывных линейных функционалов на X_0, а $\mathcal{F}'$ — множество всех линейных функционалов на X, являющихся продолжениями функционалов из $\mathcal{F}'_0$ с сохранением нормы. Тогда, вообще говоря, $\mathcal{F}'$ может не быть векторным пространством. А именно: если F_1, F_2 и F из $\mathcal{F}'$ являются соответственно продолжениями функционалов f_1, f_2 и f_1+f_2 из $\mathcal{F}'_0$ с сохранением нормы, то может оказаться $F \neq F_1+F_2$, т. е. $\|F\| < \|F_1+F_2\|$, и, следовательно, $F_1+F_2 \notin \mathcal{F}'$ (см. пример в § 16, n° 13). Однако если в X норма порождается скалярным произведением, то $F=F_1+F_2$ и, значит, $\mathcal{F}'$ является векторным пространством.

Для нормированного линейного пространства X нормированное линейное пространство X^* всех секвенциально непрерывных линейных функционалов на X называется *сопряженным пространством.* При этом сопряженное пространство X^{**} пространства X^* называется вторым сопряженным пространством пространства X. Если для каждого $\varphi \in X^{**}$ существует такое $x \in X$, что $\varphi(f)=f(x)$ при всех $f \in X^*$, то пространство X называется *рефлексивным.* При этом указанное отображение $x \mapsto \varphi$ является изометрическим изоморфизмом X на X^{**}. Если пространство X рефлексивно, то его сопряженное пространство X^* тоже рефлексивно и для каждого $f \in X^*$ существует такое $x \in X$ с $\|x\|=1$, что $f(x)=\|f\|$.

Теорема 3.79. *Пусть X — нормированное линейное пространство, f_0 — такой секвенциально непрерывный линейный функционал на X, что $f_0(x)=\|f_0\| \neq 0$ для некоторого $x \in X$ с $\|x\|=1$, X_0 — ядро функционала f_0, H — множество всех таких $h \in X_0$, что $p_x(h)=0$, а X^* — сопряженное пространство и $K=\{f \in X^* : \|f\| \leqslant \|f_0\|\}$. Тогда*

а) $H+H=H$, $rH \subset H$ для любого $r \geqslant 0$ и, значит, $H-H$ является вещественно линейной оболочкой множества H;

б) если для некоторых $f_1 \in K$, $f_2 \in K$ и $t \in (0;1)$ выполняется равенство $f_0=tf_1+(1-t)f_2$, то $f_0(x)=f_1(x)=f_2(x)=$ $=\|f_0\|=\|f_1\|=\|f_2\|$ и $\Re(f_1(h))=\Re(f_2(h))=0$ при $h \in H$;

в) для того чтобы функционал f_0 был крайней точкой шара K необходимо выполнение равенства

$$\inf_{h\in Y}\inf_{h'\in Y} p_x(y-h)p_x(h'-y)=0 \tag{18}$$

для любых $y\in X_0$, $Y=X_0\ominus\{\beta y:\beta\in\mathbb{R}\}$ и достаточно выполнение либо равенства $\overline{H-H}=X_0$, либо равенства (18) для любых $y\in X_0\setminus\overline{H-H}$ и замкнутого $Y=X_0\ominus\{\beta y:\beta\in\mathbb{R}\}$, содержащего H.

◀ Утверждение а) очевидно.

(б) Так как $\|f_0\|=f_0(x)=tf_1(x)+(1-t)f_2(x)$, $|f_1(x)|\leqslant\leqslant\|f_1\|\leqslant\|f_0\|$ и $|f_2(x)|\leqslant\|f_2\|\leqslant\|f_0\|$, то $f_0(x)=f_1(x)=f_2(x)==\|f_0\|=\|f_1\|=\|f_2\|$. А равенства $\Re(f_1(h))=\Re(f_2(h))=0$, $h\in\in H$, вытекают из неравенств $\Re(f_1(h))\leqslant p_x(h)$, $\Re(f_2(h))\leqslant p_x(h)$ и равенств $p_x(h)=0$, $tf_1(h)+(1-t)f_2(h)=0$.

(в) Сначала рассмотрим случай вещественного пространства X. Пусть f_0 — крайняя точка шара K. Предположим для некоторых y и Y равенство (18) не имеет места. Функционал $\varphi:X\to\mathbb{R}$ определим равенством $\varphi(z)=\inf\limits_{h\in Y}\|f_0\|p_x(z-h)$, $z\in X$. Имеем, что $\varphi(\xi)\geqslant 0$ и $\varphi(-\xi)\geqslant 0$ для всех $\xi\in X_0$. Поэтому из предположения $\varphi(y)\varphi(-y)\neq 0$ следует, что $\varphi(y)>0$ и $\varphi(-y)>0$. Выберем число $b>0$ так, чтобы $b<\min\{\varphi(y),\ \varphi(-y)\}$. Каждый вектор $z\in X$ единственным образом представляется в виде $z=\alpha x+\beta y+\gamma h$ с некоторыми $h\in Y$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$, $\gamma\in\mathbb{R}$. Легко убедиться, что $\varphi(z)=\alpha\|f_0\|+\varphi(\beta y)$, причем $|\varphi(z)|\leqslant\|f_0\|\|z\|$. Линейные функционалы f_1 и f_2 на X определим равенствами $f_1(z)=\alpha\|f_0\|+\beta b$ и $f_2(z)=\alpha\|f_0\|-\beta b$. В силу выбора b имеем $f_1(z)\leqslant\varphi(z)$ и $f_2(z)\leqslant\varphi(z)$ для всех $z\in X$. Отсюда следует, что $|f_1(z)|\leqslant\|f_0\|\|z\|$ и $|f_2(z)|\leqslant\|f_0\|\|z\|$. Однако $f_1(x)=f_2(x)=\|f_0\|$. Поэтому $\|f_1\|=\|f_2\|=\|f_0\|$ и, значит, $f_1\in K$, $f_2\in K$. Очевидно, $f_1+f_2=2f_0$, причем $f_1\neq f_0$ и $f_2\neq f_0$, так как $f_1(y)=b$ и $f_2(y)=-b$. Следовательно, f_0 не является крайней точкой для K. Полученное противоречие доказывает справедливость равенства $\varphi(y)\varphi(-y)=0$, т. е. равенства (18).

Докажем достаточность. Пусть $f_0=tf_1+(1-t)f_2$ для некоторых $f_1\in K$, $f_2\in K$ и $t\in(0;1)$. Если $\overline{H-H}=X_0$, то в силу б) $f_0=f_1=f_2$, т. е. f_0 является крайней точкой для K. В случае $\overline{H-H}\neq X_0$ предположим выполняется равенство (18) для любых $y\in X_0\setminus\overline{H-H}$ и замкнутого $Y=X_0\ominus\{\beta y:\beta\in\mathbb{R}\}$, содержащего H. В силу б) $f_0(x)=f_1(x)=f_2(x)=\|f_0\|=\|f_1\|=\|f_2\|$

и $f_1(h)=f_2(h)=0$ при $h\in H$. Обозначим через X_1 и X_2 ядра функционалов f_1 и f_2 соответственно. Очевидно, $X_0\cap X_1\subset X_2$ и $X_0\cap X_2\subset X_1$. Для доказательства равенств $f_0=f_1=f_2$ достаточно доказать $X_1=X_0$. Допустим $X_1\neq X_0$. Тогда $X_0\setminus X_1\neq\varnothing$. Выберем некоторое $y\in X_0\setminus X_1$ и обозначим $Y=X_0\cap X_1$. Ясно, что $Y=X_0\ominus\{\beta y:\beta\in\mathbb{R}\}$, причем Y замкнуто и содержит H. Рассмотрим введенный выше функционал φ. По условию, $\varphi(y)\varphi(-y)=0$. При этом $\varphi(y)\geqslant 0$ и $\varphi(-y)\geqslant 0$. Обозначим через f_0' сужение функционала f_0 на векторном подпространстве $Y\oplus\{\alpha x:\alpha\in\mathbb{R}\}$. Имеем, что $f_0'(x)=f_0(x)=\|f_0\|=\|f_0'\|$. Кроме того, f_1 и f_2 являются линейными продолжениями функционала f_0' с сохранением мажоранты φ. Поэтому $-\varphi(-y)\leqslant f_1(y)\leqslant\varphi(y)$ и $-\varphi(-y)\leqslant f_2(y)\leqslant\varphi(y)$. Отсюда в силу $\varphi(y)\varphi(-y)=0$ вытекает, что $f_1(y)f_2(y)\geqslant 0$. Однако $tf_1(y)+(1-t)f_2(y)=0$, $f_1(y)\neq 0$ и, значит, $f_1(y)f_2(y)<0$. Полученное противоречие доказывает, что $X_1=X_0$, т. е. $f_0=f_1=f_2$. Следовательно, f_0 является крайней точкой шара K.

В случае комплексного пространства X утверждение легко доказывается применением приведенных выше рассуждений к функционалу $g_0:X\to\mathbb{R}$, определенному равенством $g_0(z)=\Re(f_0(z))$, $z\in X$. При этом нужно учесть равенства $p_x(\mathrm{i}x)=p_x(-\mathrm{i}x)=0$. ▶

В связи с утверждением в) теоремы 3.79 заметим, что крайние точки шара K существуют. Это с использованием теоремы Банаха–Алаоглу следует из *теоремы Крейна–Мильмана* (см. [54], с. 85).

Следствие 3.17. *Пусть X — такое нормированное линейное пространство, что $p_x+p_{-x}=0$ для каждого $x\in X$ с $\|x\|=1$, а X^* — сопряженное пространство. Если для каждого $f\in X^*$ существует вектор $x\in X$ с $\|x\|=1$, для которого $f(x)=\|f\|$, то сфера $\{f\in X^*:\|f\|=1\}$ в случае вещественного векторного пространства X совпадает с множеством $\{p_x:x\in X,\ \|x\|=1\}$, а в комплексном случае* — с $\{p_x+\mathrm{i}p_{\mathrm{i}x}:x\in X,\ \|x\|=1\}$. *При этом указанная сфера совпадает с множеством всех крайних точек шара $\{f\in X^*:\|f\|\leqslant 1\}$.* ▶

Пусть X — нормированное линейное пространство, а X^* — сопряженное пространство. Определим в X операции однозначного предела λ и λ' следующим образом. Для последовательности $\hat{h}=(h_n:n\in\mathbb{N})$ в X и вектора $h\in X$ будем считать $\lambda(\hat{h})=h$ $(\lambda'(\hat{h})=h)$, если $\lim\limits_n p_x(h_n-h)=0$ $(\lim\limits_n p_x(h_n)=p_x(h))$ для всех $x\in X$ с $\|x\|=1$. Легко можно доказать, что λ' удовлетворяет условию 2) определения 3.1, а λ является слабейшей линейной операцией предела, удовлетворяющей условию $\lambda \leqslant \lambda'$ (эти свойства выполняются как в случае вещественного пространства, так и в комплексном случае). Кроме того, в случае комплексного пространства равенство $\lambda(\hat{h}) = h$ $(\lambda'(\hat{h}) = h)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lim\limits_n (p_x + \mathrm{i}p_{\mathrm{i}x})(h_n - h) = 0$ $(\lim\limits_n (p_x + \mathrm{i}p_{\mathrm{i}x})(h_n) = (p_x + \mathrm{i}p_{\mathrm{i}x})(h))$ для всех $x \in X$ с $\|x\| = 1$. Следствие 3.17 показывает, что в некоторых случаях λ совпадает с операцией предела λ_0 ослабленной сходимости, соответствующей пространству X (см. замечание 3.15). Если для каждого $f \in X^*$ существует такое $x \in X$ с $\|x\| = 1$, что $f(x) = \|f\|$, то $\lambda \leqslant \lambda_0$. Пусть X_* в случае вещественного пространства X обозначает линейную оболочку множества $\{p_x : x \in X,\ \|x\| = 1\}$, а в комплексном случае — линейную оболочку множества $\{p_x + \mathrm{i}p_{\mathrm{i}x} : x \in X,\ \|x\| = 1\}$. Каждый элемент из X_*, будучи секвенциально равномерно непрерывным положительно однородным функционалом на X, имеет конечную норму. Тем самым возникает нормированное линейное пространство X_*, совпадающее в некоторых случаях с X^*. Исходя из пространства X_*, аналогично можно построить нормированное линейное пространство X_{**} и продолжить такое построение.

§ 15. Интеграл

Известны различные способы введения понятия интеграла функции (см. [21]; [32], с. 50—69; [38], с. 291—310; [46], с. 227—234). Введем здесь понятие интеграла в случае, когда пространство значений функции не обязательно нормировано, не используя при этом линейные функционалы.

Пусть X и Y — непустые множества. Функция $f : X \to Y$ называется *ступенчатой*, если множество $f(X)$ конечно. При наличии меры на X ступенчатая функция f называется *измеримой*, если для каждого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ измеримо. Очевидно, что если Y — векторное пространство, то множество всех ступенчатых функций и множество всех измеримых ступенчатых функций являются векторными пространствами.

Определение 3.30. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $A \subset X$ — подмножество конечной меры, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство. Функция $f : X \to Y$, существенно ограниченная на A, называется интегрируемой на A, если*

1) существует последовательность измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, которая существенно равномерно ограничена на A и сходится к f равномерно на некоторой системе $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких измеримых $M_n \subset A$, что $M_n \subset M_{n+1}$ и $\lim\limits_n \mu(A \backslash M_n) = 0$;

2) для любой последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, с указанными в условии 1) свойствами и любого измеримого $A' \subset A$ последовательность векторов

$$s'_n = \sum_{y \in f_n(A)} \mu(A' \cap f_n^{-1}(y))y, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

сходится в $(Y, \widetilde{\Lambda})$ (в случае $A = \varnothing$ считается $s'_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$).

При этом для любой последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, с указанными в условии 1) свойствами множество пределов $\widetilde{\Lambda}(\hat{s})$ последовательности $\hat{s} = (s_n : n \in \mathbb{N})$ векторов

$$s_n = \sum_{y \in f_n(A)} \mu(A \cap f_n^{-1}(y))y \tag{2}$$

(или ее предел в случае операции однозначного предела $\widetilde{\Lambda}$) называется интегралом функции f на A и обозначается через $\int\limits_A f\, d\mu$.

Докажем, что в этом определении множество $\widetilde{\Lambda}(\hat{s})$ не зависит от выбора последовательности измеримых ступенчатых функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, с указанными в условии 1) свойствами. Действительно, пусть функция f удовлетворяет условиям 1) и 2) определения 3.30. Рассмотрим последовательности измеримых ступенчатых функций $g_n : X \to Y$ и $h_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, существенно равномерно ограниченных на A и сходящихся к f равномерно соответственно на системах $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких измеримых подмножеств в A, что $G_n \subset G_{n+1}$, $H_n \subset H_{n+1}$ и $\lim\limits_n \mu(A \backslash G_n) = \lim\limits_n \mu(A \backslash H_n) = 0$. По условию 2), последовательности $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ векторов

$$y_n = \sum_{y \in g_n(A)} \mu(A \cap g_n^{-1}(y))y, \quad z_n = \sum_{y \in h_n(A)} \mu(A \cap h_n^{-1}(y))y$$

сходятся в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Нужно доказать, что $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{z})$. Построим последовательность $\hat{f}=(f_n : n\in\mathbb{N})$ измеримых ступенчатых функций, положив $f_{2i-1}=g_i$ и $f_{2i}=h_i$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Для векторов s_n, $n\in\mathbb{N}$, определенных равенством (2), имеем $s_{2i-1}=y_i$ и $s_{2i}=z_i$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Очевидно, последовательность $\hat{f}$ существенно равномерно ограничена на A и сходится к f равномерно на системе $\{M_n : n\in\mathbb{N}\}$ множеств $M_n=G_n\cap H_n$. Имеем также $M_n\subset M_{n+1}$, $\mu(A\backslash M_n)\leqslant\mu(A\backslash G_n)+\mu(A\backslash H_n)$ и $\lim\limits_n\mu(A\backslash M_n)=0$. Поэтому построенная последовательность $\hat{f}$ обладает указанными в условии 1) свойствами. По условию 2), $\widetilde{\Lambda}(\hat{s})\neq\varnothing$ для $\hat{s}=(s_n : n\in\mathbb{N})$. Отсюда с учетом $\hat{y}\prec\hat{s}$ и $\hat{z}\prec\hat{s}$ получаем $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})=$ $=\widetilde{\Lambda}(\hat{z})=\widetilde{\Lambda}(\hat{s})$.

Замечание 3.22. Нетрудно убедиться, что множество интегрируемых функций не изменится, если в условии 1) определения 3.30 равномерную сходимость на системе $\{M_n : n\in\mathbb{N}\}$ заменить равномерной сходимостью на такой системе по мере. Кроме того, данное в определении 3.30 понятие интеграла характерно именно для существенно ограниченных функций, поскольку если пространство $(Y,\widetilde{\Lambda})$ удовлетворяет условию теоремы 3.49, то условие 1) определения 3.30 может выполняться лишь для существенно ограниченных функций.

Определение 3.31. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $A\subset X$ — подмножество бесконечной меры, а $(Y,\widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство. Функция $f : X\to Y$, существенно ограниченная на A, называется интегрируемой на A, если она интегрируема в смысле определения 3.30 на каждом подмножестве в A конечной меры, а для любого $A'\subset A$ бесконечной меры и любой последовательности таких подмножеств $M_n\subset A$, $n\in\mathbb{N}$, конечной меры, что $\mu(A\backslash M)=0$ для $M=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}\bigcap\limits_{n\geqslant i}M_n$, последовательность некоторых $y'_n\in\int\limits_{A'\cap M_n} f\,d\mu$, $n\in\mathbb{N}$, сходится в $(Y,\widetilde{\Lambda})$. При этом для любой последовательности $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ векторов $y_n\in\int\limits_{M_n} f\,d\mu$ множество пределов $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ называется интегралом функции f на A и обозначается через $\int\limits_A f\,d\mu$.*

Докажем, что в этом определении множество $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ не зависит ни от выбора последовательности подмножеств $M_n\subset A$, $n\in\mathbb{N}$, ни от выбора последовательности $\hat{y}=(y_n : n\in\mathbb{N})$ векторов

$y_n \in \int\limits_{M_n} f\,d\mu$. Сначала докажем инвариантность множества $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ относительно выбора $\hat{y}$. Очевидно, $\int\limits_{M_n} f\,d\mu = y_n + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Поэтому для любого $z_n \in \int\limits_{M_n} f\,d\mu$ имеем $z_n - y_n \in \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Отсюда следует, что при любом выборе z_n последовательность векторов $z_n - y_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Но тогда $\widetilde{\Lambda}(\hat{z}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ для $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$. Значит, $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ инвариантно относительно выбора $\hat{y}$. Рассмотрим последовательности таких подмножеств $G_n \subset A$ и $H_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, имеющих конечные меры, что $\mu(A \backslash G) = \mu(A \backslash H) = 0$ для $G = \bigcup\limits_{i \geqslant 1} \bigcap\limits_{n \geqslant i} G_n$ и $H = \bigcup\limits_{i \geqslant 1} \bigcap\limits_{n \geqslant i} H_n$. Рассмотрим также последовательности $\hat{\xi} = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{\eta} = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$ некоторых векторов $\xi_n \in \int\limits_{G_n} f\,d\mu$ и $\eta_n \in \int\limits_{H_n} f\,d\mu$. Как было доказано, множества $\widetilde{\Lambda}(\hat{\xi})$ и $\widetilde{\Lambda}(\hat{\eta})$ не зависят от выбора $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$. По условию, $\hat{\xi}$ и $\hat{\eta}$ сходятся. Нужно доказать, что $\widetilde{\Lambda}(\hat{\xi}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{\eta})$. Для последовательности подмножеств $M_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, где $M_{2i-1} = G_i$ и $M_{2i} = H_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$, положим $M = \bigcup\limits_{i \geqslant 1} \bigcap\limits_{n \geqslant i} M_n$. Тогда $M = G \cap H$ и $\mu(A \backslash M) = \mu(A \backslash G) + \mu(G \backslash H) \leqslant \mu(A \backslash G) + \mu(A \backslash H) = 0$. Так как для $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$, где $y_{2i-1} = \xi_i$ и $y_{2i} = \eta_i$ при всех $i \in \mathbb{N}$, множество $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ не зависит от выбора $y_n \in \int\limits_{M_n} f\,d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, то в силу условия определения 3.31 имеем $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) \neq \varnothing$. Отсюда с учетом $\hat{\xi} \prec \hat{y}$ и $\hat{\eta} \prec \hat{y}$ получаем $\widetilde{\Lambda}(\hat{\xi}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{\eta}) = \widetilde{\Lambda}(\hat{y})$.

Определение 3.32. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $A \subset X$ — подмножество конечной или бесконечной меры, а $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство. Функция $f : X \to Y$, не являющаяся существенно ограниченной на A, называется интегрируемой на A, если*

1) функция f интегрируема в смысле определения 3.30 или 3.31 на любом измеримом подмножестве в A на котором она существенно ограничена;

2) существует такая последовательность измеримых подмножеств $M_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, что функция f существенно ограничена на каждом M_n и $\mu(A \backslash M) = 0$ для $M = \bigcup\limits_{i \geqslant 1} \bigcap\limits_{n \geqslant i} M_n$;

3) для любой последовательности измеримых подмножеств

$M_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, с указанными в условии 2) свойствами и любого измеримого $A' \subset A$, на котором функция f не является существенно ограниченной, последовательность некоторых векторов $y'_n \in \int\limits_{A' \cap M_n} f\, d\mu$, $n \in \mathbb{N}$, сходится в $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

При этом для любой последовательности измеримых подмножеств $M_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, с указанными в условии 2) свойствами и любой последовательности $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $y_n \in \int\limits_{M_n} f\, d\mu$ множество пределов $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ называется интегралом функции f на A и обозначается через $\int\limits_A f\, d\mu$.

По аналогии с определением 3.31 можно доказать, что в определении 3.32 множество $\widetilde{\Lambda}(\hat{y})$ не зависит ни от выбора последовательности подмножеств $M_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, ни от выбора последовательности $\hat{y} = (y_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $y_n \in \int\limits_{M_n} f\, d\mu$.

Непосредственно из определений 3.30—3.32 вытекает

Предложение 3.63. *Для понятия интеграла, данного в определениях 3.30, 3.31 и 3.32, справедливы утверждения*

а) если $\mu(A) = 0$, то любая функция f интегрируема на A и $\int\limits_A f\, d\mu = \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$;

б) если функция f интегрируема на измеримом множестве A, а функция g является пределом почти всюду на A стационарной последовательности $\dot{f}$, то функция g тоже интегрируема на A и $\int\limits_A f\, d\mu = \int\limits_A g\, d\mu$;

в) если функции f и g интегрируемы на измеримом множестве A, то для любых чисел α и β функция $\alpha f + \beta g$ тоже интегрируема на A и

$$\int\limits_A (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int\limits_A f\, d\mu + \beta \int\limits_A g\, d\mu$$

(в случае $\alpha = \beta = 0$ в качестве правой части этого равенства нужно принять $\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$);

г) если функция f интегрируема на измеримом множестве A, то она интегрируема на любом измеримом $A' \subset A$;

д) если функция f интегрируема на измеримых множествах A и B, то она интегрируема на $A \cup B$ и

$$\int\limits_{A\cup B} f\,d\mu = \int\limits_{A\setminus B} f\,d\mu + \int\limits_{B\setminus A} f\,d\mu + \int\limits_{B\cap A} f\,d\mu,$$

причем если $\mu(A\cap B)=0$, *то*

$$\int\limits_{A\cup B} f\,d\mu = \int\limits_{A} f\,d\mu + \int\limits_{B} f\,d\mu. \blacktriangleright$$

Существование функции, интегрируемой на множестве ненулевой меры, нами пока не установлено. Для этого приходится накладывать условие на линейное пространство $(Y, \widetilde{\Lambda})$.

Теорема 3.80. *Пусть* μ *— мера на непустом множестве* X, *а* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела* $\widetilde{\Lambda}$. *Тогда всякая измеримая ступенчатая функция* $f: X\to Y$ *интегрируема в смысле определения 3.30 на любом* $A\subset X$ *конечной меры и* $\int\limits_A f\,d\mu = \widetilde{\Lambda}(\dot{s})$, *где*

$$s = \sum_{y\in f(A)} \mu(A\cap f^{-1}(y))y.$$

Если же $\mu(A\cap B)<\infty$ *для* $A\subset X$ *бесконечной меры, где* $B = \{x\in X : f(x)\notin \widetilde{\Lambda}(\dot{0})\}$, *то функция* f *интегрируема на* A *в смысле определения 3.31 и* $\int\limits_A f\,d\mu = \int\limits_{A\cap B} f\,d\mu$, *где интеграл на* $A\cap B$ *понимается в смысле определения 3.30.*

◀ Очевидно, первое утверждение нуждается в доказательстве в случае $\mu(A)\neq 0$. Пусть последовательность измеримых ступенчатых функций $f_n: X\to Y$, $n\in\mathbb{N}$, существенно равномерно ограничена на A и сходится к f равномерно на системе $\{M_n : n\in\mathbb{N}\}$ таких измеримых $M_n\subset A$, что $M_n\subset M_{n+1}$ и $\lim\limits_n \mu(A\setminus M_n)=0$ (примером может служить $\dot{f}$). Для измеримого $A'\subset A$ обозначим

$$s' = \sum_{y\in f(A)} \mu(A'\cap f^{-1}(y))y.$$

Пусть $\hat{s}'=(s'_n : n\in\mathbb{N})$ и $\hat{s}=(s_n : n\in\mathbb{N})$ — последовательности, где s'_n и s_n определены равенствами (1) и (2). Докажем равенство $\widetilde{\Lambda}(\hat{s}')=\widetilde{\Lambda}(\dot{s}')$. Последовательность измеримых ступенчатых функций $g_n = f_n - f$, $n \in \mathbb{N}$, существенно равномерно ограничена на A и сходится к нулю равномерно на системе $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$. Обозначим

$$z'_n = \sum_{y \in g_n(A)} \mu(A' \cap g_n^{-1}(y))y, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем $z'_n = s'_n - s'$, $n \in \mathbb{N}$. Нужно доказать, что последовательность $\hat{z}' = (z'_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к нулю в $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Пусть v — выпуклая окрестность нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Нетрудно убедиться, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и $i \in \mathbb{N}$

$$z'_n = \sum_{y \in g_n(A)} \mu((A' \setminus M_i) \cap g_n^{-1}(y))y + \\ + \sum_{y \in g_n(M_i)} \mu(A' \cap M_i \cap g_n^{-1}(y))y. \tag{3}$$

Последовательность $\hat{g} = (g_n : n \in \mathbb{N})$ равномерно ограничена на некотором таком $C \subset A$, что $\mu(A \setminus C) = 0$. Поэтому найдется такое $\varepsilon > 0$, что $g_n(C) \subset \frac{1}{2\varepsilon} v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Число $i \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $\mu(A \setminus M_i) < \varepsilon$. Тогда с учетом выпуклости v

$$\sum_{y \in g_n(A)} \mu((A' \setminus M_i) \cap g_n^{-1}(y))y = \sum_{y \in g_n(C)} \mu((A' \setminus M_i) \cap g_n^{-1}(y))y \in \\ \in \sum_{y \in g_n(C)} \mu((A' \setminus M_i) \cap g_n^{-1}(y)) \tfrac{1}{2\varepsilon} v = \mu(A' \setminus M_i) \tfrac{1}{2\varepsilon} v \subset \tfrac{1}{2} v. \tag{4}$$

Поскольку $\hat{g}$ сходится к нулю равномерно на M_i, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $g_n(M_i) \subset (2\mu(A))^{-1} v$ для всех $n \geqslant n_0$. Поэтому с учетом выпуклости v для всех $n \geqslant n_0$ имеем

$$\sum_{y \in g_n(M_i)} \mu(A' \cap M_i \cap g_n^{-1}(y))y \in \\ \in \sum_{y \in g_n(M_i)} \mu(A' \cap M_i \cap g_n^{-1}(y))(2\mu(A))^{-1} v = \\ = \mu(A' \cap M_i)(2\mu(A))^{-1} v \subset \tfrac{1}{2} v. \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5) следует, что $z'_n \in \frac{1}{2}(v + v) = v$ для всех $n \geqslant n_0$. Значит, $\hat{z}'$ сходится к нулю. Тем самым равенство $\widetilde{\Lambda}(\hat{s}') = \widetilde{\Lambda}(\dot{s}')$ и вместе с ним интегрируемость функции f на A доказаны. В частности, при $A' = A$ имеем также $\widetilde{\Lambda}(\hat{s}) = \widetilde{\Lambda}(\dot{s})$, означающее, что $\int\limits_A f\, d\mu = \widetilde{\Lambda}(\dot{s})$. Второе утверждение теоремы очевидно. ►

Теорема 3.81. *Пусть* μ *— мера на непустом множестве* X, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *— линейное пространство, а* $f: X \to Y$ *— функция, существенно ограниченная на измеримом* $A \subset X$ *и интегрируемая на каждом подмножестве в* A *конечной меры. Тогда для каждой выпуклой окрестности нуля* v *пространства* $(Y, \widetilde{\Lambda})$ *существует такое число* $\varepsilon > 0$, *что* $\int\limits_B f\,d\mu \subset v$ *для любого* $B \subset A$ *с мерой* $\mu(B) < \varepsilon$.

◀ Так как функция f ограничена на некотором $C \subset A$ с $\mu(A \backslash C) = 0$, то для окрестности нуля v найдется такое $\varepsilon > 0$, что $f(C) \subset \frac{1}{8\varepsilon} v$. Пусть $B \subset A$ — подмножество с мерой $\mu(B) < \varepsilon$, а $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, существенно равномерно ограниченная на B и сходящаяся к f равномерно на системе $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких измеримых $M_n \subset B$, что $M_n \subset M_{n+1}$ и $\lim\limits_n \mu(B \backslash M_n) = 0$. Рассмотрим последовательность $\hat{s} = (s_n : n \in \mathbb{N})$ векторов

$$s_n = \sum_{y \in f_n(B)} \mu(B \cap f_n^{-1}(y))y.$$

По определению 3.30, $\int\limits_B f\,d\mu = \widetilde{\Lambda}(\hat{s})$. Если $s \in \widetilde{\Lambda}(\hat{s})$, то $\widetilde{\Lambda}(\hat{s}) = s + \widetilde{\Lambda}(\dot{0})$. Однако $s - s_n \in \frac{1}{2} v$ для всех $n \geqslant n_0$ при некотором $n_0 \in \mathbb{N}$. Поэтому $\int\limits_B f\,d\mu \subset s_n + \frac{1}{2} v$ для всех $n \geqslant n_0$. В силу равномерной ограниченности $\hat{f}$ на некотором $B_1 \subset B$ с $\mu(B \backslash B_1) = 0$ найдется такое $r > 0$, что $f_n(B_1) \subset \frac{1}{4r} v$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Число $i \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $\mu(B \backslash M_i) < r$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$s_n = \sum_{y \in f_n(B)} \mu((B \backslash M_i) \cap f_n^{-1}(y))y + \sum_{y \in f_n(M_i)} \mu(M_i \cap f_n^{-1}(y))y. \quad (6)$$

Кроме того, с учетом выпуклости окрестности нуля v

$$\sum_{y \in f_n(B)} \mu((B \backslash M_i) \cap f_n^{-1}(y))y = \sum_{y \in f_n(B_1)} \mu((B \backslash M_i) \cap f_n^{-1}(y))y \in$$

$$\in \sum_{y \in f_n(B_1)} \mu((B \backslash M_i) \cap f_n^{-1}(y)) \tfrac{1}{4r} v = \mu(B \backslash M_i) \tfrac{1}{4r} v \subset \tfrac{1}{4} v. \quad (7)$$

Поскольку $\hat{f}$ сходится к f равномерно на M_i, существует такое

$m_0 \in \mathbb{N}$, что $f_n(x) - f(x) \in \frac{1}{8\varepsilon}v$ для всех $x \in M_i$ и $n \geqslant m_0$. Пусть $B' = C \cap M_i$. Тогда $\mu(M_i \setminus B') = 0$ и $f_n(x) - f(x) \in \frac{1}{8\varepsilon}v$ для всех $x \in B'$ и $n \geqslant m_0$. Отсюда в силу $f(C) \subset \frac{1}{8\varepsilon}v$ получаем $f_n(B') \subset \frac{1}{4\varepsilon}v$ для всех $n \geqslant m_0$. Однако $\mu(M_i) < \varepsilon$, а при $n \geqslant m_0$

$$\sum_{y \in f_n(M_i)} \mu(M_i \cap f_n^{-1}(y))y = \sum_{y \in f_n(B')} \mu(M_i \cap f_n^{-1}(y))y \in$$

$$\in \sum_{y \in f_n(B')} \mu(M_i \cap f_n^{-1}(y)) \tfrac{1}{4\varepsilon}v = \mu(M_i)\tfrac{1}{4\varepsilon}v \subset \tfrac{1}{4}v. \tag{8}$$

Положим $m = \max\{n_0, m_0\}$. В силу (6), (7) и (8) имеем $s_m \in \in \frac{1}{4}(v + v) = \frac{1}{2}v$. Из $\int\limits_B f\,d\mu \subset s_m + \frac{1}{2}v$ с учетом $s_m \in \frac{1}{2}v$ получаем, что $\int\limits_B f\,d\mu \subset \frac{1}{2}(v + v) = v$. ►

Замечание 3.23. Пусть функция $f: X \to Y$ существенно ограничена на измеримом $A \subset X$ и интегрируема на каждом подмножестве в A конечной меры, множество которых обозначим через $\mathfrak{S}'_A$. Для каждого $B \in \mathfrak{S}'_A$ интеграл $\varphi(B) = \int\limits_B f\,d\mu$ можно считать элементом фактор-пространства $(\varPhi, \widetilde{\lambda})$ линейного пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ по векторному подпространству $\widetilde{\Lambda}(\dot{0})$ и тем самым определить функцию $\varphi: \mathfrak{S}'_A \to \varPhi$. Очевидно, что если $(Y, \widetilde{\Lambda})$ удовлетворяет условию теоремы 3.80, то утверждение теоремы 3.81 с учетом замечания 2.5 равносильно секвенциально равномерной непрерывности функции φ.

Теорема 3.82. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, а $f: X \to Y$ — функция, существенно ограниченная и интегрируемая на $A \subset X$ конечной меры. Если $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где каждое A_n измеримо и $\mu(A_i \cap A_j) = 0$ при $i \neq j$, то*

$$\int\limits_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{A_n} f\,d\mu, \tag{9}$$

причем сумма ряда есть множество пределов $\widetilde{\Lambda}(\hat{s})$ последовательности $\hat{s} = (s_i : i \in \mathbb{N})$, где $s_i = \sum\limits_{n=1}^{i} y_n$ и $y_n \in \int\limits_{A_n} f\,d\mu$.

◀ Для каждого $i \in \mathbb{N}$ обозначим $B_i = \bigcup\limits_{n>i} A_n$. В силу утверждения д) предложения 3.63 для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int\limits_A f d\mu = \sum_{n=1}^{i} \int\limits_{A_n} f d\mu + \int\limits_{B_i} f d\mu = \sum_{n=1}^{i} y_n + \xi_i + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}) = s_i + \xi_i + \widetilde{\Lambda}(\dot{0}), \tag{10}$$

где $y_n \in \int\limits_{A_n} f\, d\mu$, $\xi_i \in \int\limits_{B_i} f\, d\mu$ и $s_i = \sum\limits_{n=1}^{i} y_n$. Однако

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{i} \mu(A_n) + \mu(B_i).$$

Так как $\mu(A) < \infty$, то $\lim\limits_i \mu(B_i) = 0$. В силу теоремы 3.81 для каждой выпуклой окрестности нуля v пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ найдется такое $i_0 \in \mathbb{N}$, что $\int\limits_{B_i} f\, d\mu \subset v$ при всех $i \geqslant i_0$. Поэтому $0 \in \widetilde{\Lambda}(\hat{\xi})$ для $\hat{\xi} = (\xi_i : i \in \mathbb{N})$. Но тогда из (10) получаем (9). ▶

Замечание 3.24. Равенство (9) имеет место и в случае, когда функция f интегрируема на A в смысле определения 3.31 или 3.32, причем без условия на $(Y, \widetilde{\Lambda})$, указанного в теореме 3.82. Именно: если функция f существенно ограничена и интегрируема на множестве A бесконечной меры, а $\mu(A_n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, кроме конечного числа значений, то имеет место (9). Если функция f, не являющаяся существенно ограниченной на множестве A конечной или бесконечной меры, интегрируема на A и существенно ограничена на каждом множестве A_n конечной или бесконечной меры, то имеет место (9). Это следует из определений 3.31, 3.32 и утверждения д) предложения 3.63.

Пусть μ — мера на непустом множестве X, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, а p — секвенциально непрерывная полунорма на Y. Легко убедиться, что для любой измеримой ступенчатой функции $g : X \to Y$ композиция $p \circ g$, определенная равенством $(p \circ g)(x) = p(g(x))$, $x \in X$, как ступенчатая числовая функция измерима. Кроме того, если последовательность измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции $f : X \to Y$ почти всюду на измеримом $A \subset X$, то сужение функции $p \circ f$ на A является измеримой числовой функцией на A, так как в силу неравенства $|(p \circ f)(x) - (p \circ f_n)(x)| \leqslant (p \circ (f - f_n))(x)$, $x \in X$, функция $p \circ f$ является пределом почти всюду на A последовательности измеримых ступенчатых числовых функций

$p\circ f_n$, $n\in\mathbb{N}$. Заметим еще, что если при этом функция f существенно ограничена на A, то числовая функция $p\circ f$ тоже существенно ограничена на A и, будучи измеримой на A, интегрируема на A по Лебегу (см. [38], с. 291—310), причем если в качестве значений $p\Bigl(\int\limits_A f\,d\mu\Bigr)$ и $\int\limits_A p\circ f\,d\mu$ принимать числа вместо одноэлементных числовых множеств, то $p\Bigl(\int\limits_A f\,d\mu\Bigr)\leqslant\int\limits_A p\circ f\,d\mu$. Нетрудно убедиться также в том, что если $(Y,\widetilde{\Lambda})$ есть числовое пространство, то введенное здесь понятие интеграла совпадает с общеизвестным понятием *интеграла Лебега.*

Теорема 3.83. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $(Y,\widetilde{\Lambda})$ — линейное пространство, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, а $f:X\to Y$ — функция, существенно ограниченная на $A\subset X$ конечной меры. Тогда*

а) для интегрируемости f на A достаточно существование одной последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n:X\to Y$, $n\in\mathbb{N}$, обладающей свойствами, указанными в условиях 1) и 2) определения 3.30;

б) если $(Y,\widetilde{\Lambda})$ полно, то для интегрируемости f на A достаточно существование последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n:X\to Y$, $n\in\mathbb{N}$, обладающей свойством, указанным в условии 1) определения 3.30;

в) если $(Y,\widetilde{\Lambda})$ полуметризуемо, то для интегрируемости f на A достаточно существование такой последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n:X\to Y$, $n\in\mathbb{N}$, существенно равномерно ограниченной на A и сходящейся к f почти всюду на A, что для любого измеримого $A'\subset A$ последовательность векторов (1) сходится;

г) если $(Y,\widetilde{\Lambda})$ полно и полуметризуемо, то для интегрируемости f на A достаточно существование последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n:X\to Y$, $n\in\mathbb{N}$, сходящейся к f почти всюду на A.

◄ (а) Пусть последовательности измеримых ступенчатых функций $f_n:X\to Y$ и $h_n:X\to Y$, $n\in\mathbb{N}$, существенно равномерно ограничены на A и сходятся к f равномерно соответственно на системах $\{G_n:n\in\mathbb{N}\}$ и $\{H_n:n\in\mathbb{N}\}$ таких измеримых подмножеств в A, что $G_n\subset G_{n+1}$, $H_n\subset H_{n+1}$ и $\lim\limits_n\mu(A\backslash G_n)=$ $=\lim\limits_n\mu(A\backslash H_n)=0$. Пусть, кроме того, для любого измеримого $A'\subset A$ последовательность векторов s'_n, $n\in\mathbb{N}$, определенных равенством (1), сходится. Нужно доказать, что последовательность векторов

$$y'_n = \sum_{y \in h_n(A)} \mu(A' \cap h_n^{-1}(y))y, \quad n \in \mathbb{N},$$

тоже сходится. Для этого достаточно доказать, что последовательность векторов $z'_n = s'_n - y'_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Положим $M_n = G_n \cap H_n$. Имеем, что $M_n \subset M_{n+1}$ и $\lim\limits_n \mu(A \setminus M_n) = 0$. Кроме того, последовательность измеримых ступенчатых функций $g_n = f_n - h_n$, $n \in \mathbb{N}$, существенно равномерно ограничена на A и сходится к нулю равномерно на каждом M_n. Поскольку для z'_n имеет место равенство (3), доказательство сходимости к нулю последовательности $(z'_n\,; n \in \mathbb{N})$ можно завершить повторением рассуждений, сделанных в доказательстве теоремы 3.80.

(б) Нужно доказать, что если последовательность измеримых ступенчатых функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, обладает свойством, указанным в условии 1) определения 3.30, то для любого измеримого $A' \subset A$ последовательность векторов s'_n, $n \in \mathbb{N}$, определенных равенством (1), сходится. Пусть p — секвенциально непрерывная полунорма на Y, т. е. p является функционалом Минковского выпуклой уравновешенной окрестности нуля пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Последовательность функций $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к f почти всюду на A. Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ числовая функция $p \circ (f - f_n)$ интегрируема на A по Лебегу, причем последовательность функций $p \circ (f - f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, существенно равномерно ограничена на A и сходится к нулю почти всюду на A. Но тогда в силу *теоремы Лебега о предельном переходе* под знаком интеграла (см [38], с. 302)

$$\lim_n \int_A p \circ (f - f_n)\, d\mu = 0. \tag{11}$$

Для любых $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и $x \in X$ имеет место неравенство $(p \circ (f_n - f_m))(x) \leqslant (p \circ (f - f_n))(x) + (p \circ (f - f_m))(x)$. Поэтому

$$\int_A p \circ (f_n - f_m)\, d\mu \leqslant \int_A p \circ (f - f_n)\, d\mu + \int_A p \circ (f - f_m)\, d\mu. \tag{12}$$

Так как $s'_i \in \int\limits_{A'} f_i\, d\mu$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то

$$p(s'_n - s'_m) \leqslant \int_{A'} p \circ (f_n - f_m)\, d\mu \leqslant \int_A p \circ (f_n - f_m)\, d\mu.$$

Отсюда в силу (11), (12) и произвольности p вытекает, что последовательность векторов s'_n, $n\in\mathbb{N}$, фундаментальна и, значит, сходится в полном пространстве $(Y,\,\widetilde{\Lambda})$. Таким образом, последовательность измеримых ступенчатых функций f_n, $n\in\mathbb{N}$, обладает также свойством, указанным в условии 2) определения 3.30. Поэтому в силу а) функция f интегрируема на A.

(в) В рассматриваемом случае интегрируемость f вытекает из а) с учетом утверждения б) теоремы 2.61.

(г) Пусть последовательность измеримых ступенчатых функций f_n, $n\in\mathbb{N}$, сходится к f почти всюду на A. В силу утверждения б) теоремы 2.61 для каждого $m\in\mathbb{N}$ существует такое подмножество $H_m\subset A$ с мерой $\mu(H_m)<m^{-1}$, что последовательность $(f_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к f равномерно на $G_m=A\backslash H_m$. Очевидно, можно считать $H_{m+1}\subset H_m$ и, значит, $G_m\subset G_{m+1}$ для всех $m\in\mathbb{N}$. При этом имеем, что $\lim\limits_m \mu(A\backslash G_m)=0$. По условию, функция f ограничена на некотором $C\subset A$ с $\mu(A\backslash C)=0$. Положим $G'_m=C\cap G_m$. Ясно, что $G'_m\subset G'_{m+1}$ и $\lim\limits_m \mu(A\backslash G'_m)=0$. Пусть d — инвариантная относительно сдвигов полуметрика на Y, определяющая операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Строго возрастающую последовательность натуральных чисел i_n, $n\in\mathbb{N}$, выберем так, чтобы $d(f_i(x),\,f(x))<n^{-1}$ для всех $x\in G'_n$ и $i\geqslant i_n$. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим измеримую ступенчатую функцию $g_n : X\to Y$, положив $g_n(x)=f_{i_n}(x)$ при $x\in G'_n$ и $g_n(x)=0$ при $x\notin G'_n$. Последовательность $(g_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к f равномерно на каждом G'_n. Докажем, что она равномерно ограничена на X, т. е. для любой последовательности векторов $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$, и любой сходящейся к нулю последовательности чисел r_n, $n\in\mathbb{N}$, последовательность векторов $r_n g_n(x_n)$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. Это очевидно в случае, когда неравенство $g_n(x_n)\neq 0$ выполняется лишь для конечного числа значений $n\in\mathbb{N}$. В противном случае рассмотрим строго возрастающую последовательность всех таких натуральных k_n, $n\in\mathbb{N}$, что $g_{k_n}(x_{k_n})\neq 0$. Так как $x_{k_n}\in G'_{k_n}$, то $d(g_{k_n}(x_{k_n})-f(x_{k_n}),\,0)=d(g_{k_n}(x_{k_n}),\,f(x_{k_n}))<k_n^{-1}$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Следовательно, последовательность векторов $g_{k_n}(x_{k_n})-f(x_{k_n})$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. Однако

$$r_{k_n}g_{k_n}(x_{k_n})=r_{k_n}(g_{k_n}(x_{k_n})-f(x_{k_n}))+r_{k_n}f(x_{k_n}),$$

а в силу ограниченности функции f на C последовательность векторов $r_{k_n}f(x_{k_n})$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю. Поэтому последовательность векторов $r_{k_n}g_{k_n}(x_{k_n})$, $n\in\mathbb{N}$, тоже сходится к нулю. Но тогда, очевидно, последовательность векторов $r_n g_n(x_n)$,

$n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю. Тем самым доказано, что последовательность измеримых ступенчатых функций g_n, $n \in \mathbb{N}$, обладает свойством, указанным в условии 1) определения 3.30. Поэтому в силу б) функция f интегрируема на A. ▶

В случае полного нормируемого линейного пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ понятие интеграла, данное в определении 3.30, совпадает с понятием *интеграла Бохнера* для существенно ограниченной функции на множестве конечной меры (см. [31], с. 189—194; [47], с. 227—234; в [47] допущены неточность в определении этого понятия и необоснованность в доказательстве теоремы о достаточных условиях интегрируемости функции по Бохнеру).

Теорема 3.84. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — полуметрическое линейное пространство, а $f : X \to Y$ — функция, интегрируемая на измеримом $A \subset X$. Тогда существует последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, которая сходится к f равномерно на системе $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких подмножеств $M_n \subset A$ конечной меры, что $M_n \subset M_{n+1}$, $\mu\big(A \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n\big) = 0$ и функция f ограничена на каждом M_n, причем $f_n(x) = 0$ при $x \in X \setminus M_n$, а последовательность $\hat{s} = (s_n : n \in \mathbb{N})$ векторов*

$$s_n = \sum_{y \in f_n(M_n)} \mu(M_n \cap f_n^{-1}(y))y \tag{13}$$

сходится и $\widetilde{\Lambda}(\hat{s}) = \int\limits_A f\, d\mu$. Кроме того, для существенно ограниченной на A функции f последовательность $\hat{f}$ с указанными свойствами можно выбрать равномерно ограниченной на X.

◀ Если $\mu(A) < \infty$ и функция f существенно ограничена на A, то из определения 3.30 следует, что утверждения теоремы верны даже без условия полуметризуемости пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Поэтому нужно рассматривать случаи, когда либо $\mu(A) = \infty$, либо функция f не является существенно ограниченной на A. Из определений 3.31 и 3.32 следует существование последовательности таких подмножеств $G_n \subset A$, $n \in \mathbb{N}$, конечной меры, что $G_n \subset G_{n+1}$, $\mu(A \setminus \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n) = 0$ и функция f ограничена на каждом G_n. При этом если функция f ограничена на некотором $C \subset A$ с $\mu(A \setminus C) = 0$, то можно считать $G_n \subset C$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Из определения 3.30 следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность измеримых ступенчатых функций $g_{nm} : X \to Y$, $m \in \mathbb{N}$, которая существенно равномерно ограничена на G_n и сходится к f равномерно на системе $\{H_{nm} : m \in \mathbb{N}\}$ таких измеримых $H_{nm} \subset G_n$, что $H_{nm} \subset H_{n,m+1}$ и $\lim\limits_m \mu(G_n \backslash H_{nm}) = 0$. Число $m_n \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $\mu(G_n \backslash H_{nm_n}) < 2^{-n}$. Положим $M_n = \bigcap\limits_{k \geqslant n} H_{km_k}$. Имеем, что $M_n \subset M_{n+1}$ и

$$A \backslash \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \big(A \backslash \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n\big) \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} \bigcup_{i \geqslant k} (G_n \backslash H_{im_i}),$$

$$\mu\big(A \backslash \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n\big) = \mu\big(\bigcup_{n \geqslant 1} \bigcap_{k \geqslant n} \bigcup_{i \geqslant k} (G_n \backslash H_{im_i})\big) =$$

$$= \lim_n \mu\big(\bigcap_{k \geqslant n} \bigcup_{i \geqslant k} (G_n \backslash H_{im_i})\big) \leqslant \lim_n \mu\big(\bigcup_{i \geqslant n} (G_n \backslash H_{im_i})\big) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_n \sum_{i \geqslant n} \mu(G_n \backslash H_{im_i}) \leqslant \lim_n \sum_{i \geqslant n} 2^{-i} = \lim_n 2^{1-n} = 0.$$

Пусть d — инвариантная относительно сдвигов полуметрика на Y, определяющая операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Очевидно, число $i_n \in \mathbb{N}$ можно выбрать так, чтобы $d(g_{ni_n}(x),\, f(x)) < n^{-1}$ для всех $x \in M_n$, а $d(z_n - s_n,\, 0) = d(z_n,\, s_n) < n^{-1}$ для $z_n \in \int\limits_{M_n} f\, d\mu$ и

$$s_n = \sum_{y \in g_{ni_n}(M_n)} \mu(M_n \cap g_{ni_n}^{-1}(y))y. \tag{14}$$

Определим измеримую ступенчатую функцию $f_n : X \to Y$, положив $f_n(x) = g_{ni_n}(x)$ при $x \in M_n$ и $f_n(x) = 0$ при $x \notin M_n$. Тогда последовательность $\hat{f} = (f_n : n \in \mathbb{N})$ сходится к f равномерно на каждом M_n, а равенство (14) принимает вид (13). Пусть $\hat{z} = (z_n : n \in \mathbb{N})$ и $\hat{s} = (s_n : n \in \mathbb{N})$. Так как $0 \in \widetilde{\Lambda}(\hat{z} - \hat{s})$ и $\widetilde{\Lambda}(\hat{z}) = \int\limits_A f\, d\mu$, то $\widetilde{\Lambda}(\hat{s}) = \int\limits_A f\, d\mu$. При помощи рассуждений, сделанных в доказательстве утверждения г) теоремы 3.83, легко доказывается, что для существенно ограниченной на A функции f последовательность $\hat{f}$ равномерно ограничена на X. ▶

Теорема 3.85. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — полное полуметрическое линейное пространство, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, $A \subset X$ — измеримое подмножество, а $f : X \to Y$ — функция, ограниченная на системе $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$*

таких $M_n \subset A$ *конечной меры, что* $\mu\big(A \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \bigcap\limits_{n\geqslant k} M_n\big) = 0$, *причем выполняются условия:*

1) существует последовательность измеримых ступенчатых функций $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, *сходящаяся к* f *почти всюду на* A;

2) для каждой секвенциально непрерывной полунормы p *на* Y *числовая функция* $p \circ f$ *интегрируема на* A.

Тогда функция f *интегрируема на* A *и удовлетворяет неравенству* $p\big(\int\limits_A f\,d\mu\big) \leqslant \int\limits_A p \circ f\,d\mu$ *для любой секвенциально непрерывной полунормы* p *на* Y.

◀ Пусть p — секвенциально непрерывная полунорма на Y. В силу утверждения г) теоремы 3.83 из условия 1) следует, что функция f интегрируема на каждом подмножестве $G \subset A$ конечной меры, на котором она существенно ограничена. При этом $p\big(\int\limits_G f\,d\mu\big) \leqslant \int\limits_G p \circ f\,d\mu$. Тем самым в случае, когда $\mu(A) < \infty$ и функция f существенно ограничена на A, справедливость теоремы очевидна. Рассмотрим случаи, когда либо $\mu(A) = \infty$ и функция f существенно ограничена на A, либо $\mu(A) < \infty$ и функция f не является существенно ограниченной на A. Пусть $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ — некоторая система таких $M_n \subset A$ конечной меры, что $\mu\big(A \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \bigcap\limits_{n\geqslant k} M_n\big) = 0$ и функция f существенно ограничена на каждом M_n. Для измеримого $A' \subset A$ обозначим $H_n = A' \cap M_n$ и рассмотрим последовательность $\hat{y}' = (y'_n : n \in \mathbb{N})$ векторов $y'_n \in \int\limits_{H_n} f\,d\mu$. Для любых натуральных n и m имеем

$$p(y'_n - y'_m) = p\Big(\int\limits_{H_n} f d\mu - \int\limits_{H_m} f d\mu\Big) = p\Big(\int\limits_{H_n \setminus H_m} f d\mu - \int\limits_{H_m \setminus H_n} f d\mu\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{H_n \setminus H_m} p \circ f\,d\mu + \int\limits_{H_m \setminus H_n} p \circ f\,d\mu \leqslant \int\limits_{A \setminus M_m} p \circ f\,d\mu + \int\limits_{A \setminus M_n} p \circ f\,d\mu.$$

В силу условия 2) числовая функция $p \circ f$ интегрируема на A по Лебегу. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\int\limits_{A \setminus M_k} p \circ f\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $k \geqslant n_0$. Значит, $p(y'_n - y'_m) < \varepsilon$ для $n \geqslant n_0$ и $m \geqslant n_0$. Отсюда в силу произвольности p вытекает, что последовательность $\hat{y}'$ фундаментальна. Тогда она сходится в полном пространстве $(Y, \widetilde{\Lambda})$. Таким образом, в рассматриваемых случаях функция f удовлетворяет условиям определения

3.31 или 3.32 и, значит, интегрируема на A. Пусть $y \in \int\limits_A f\,d\mu$ и $y_n \in \int\limits_{M_n} f\,d\mu$, $n \in \mathbb{N}$. Последовательность векторов y_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится к y. В силу секвенциальной непрерывности p имеем $\lim\limits_n p(y_n) = p(y)$. Однако $p(y_n) = p\Big(\int\limits_{M_n} f\,d\mu\Big) \leqslant \int\limits_{M_n} p\circ f\,d\mu \leqslant \int\limits_A p\circ f\,d\mu$. Поэтому $p(y) = p\Big(\int\limits_A f\,d\mu\Big) \leqslant \int\limits_A p\circ f\,d\mu$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu(A) = \infty$ и функция f не является существенно ограниченной на A. Как уже было доказано, функция f интегрируема на любом измеримом подмножестве $G \subset A$, на котором она существенно ограничена, причем $p\Big(\int\limits_G f\,d\mu\Big) \leqslant \int\limits_G p\circ f\,d\mu$. Это позволяет повторить сделанные выше рассуждения относительно произвольной системы $\{M_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких измеримых $M_n \subset A$, что $\mu\Big(A \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \bigcap\limits_{n\geqslant k} M_n\Big) = 0$ и функция f существенно ограничена на каждом M_n. В результате мы получим интегрируемость f на A и справедливость неравенства $p\Big(\int\limits_A f\,d\mu\Big) \leqslant \int\limits_A p\circ f\,d\mu$ также в рассматриваемом случае. ►

Из теоремы 3.85 следует, что в случае полного нормируемого линейного пространства $(Y, \widetilde{\Lambda})$ функция, интегрируемая по Бохнеру, интегрируема также в данном здесь смысле.

Теорема 3.86. *Пусть μ — мера на непустом множестве X, $(Y, \widetilde{\Lambda})$ — полное полуметрическое линейное пространство, в котором система всех выпуклых окрестностей нуля определяет операцию предела $\widetilde{\Lambda}$, $A \subset X$ — измеримое подмножество, $f : X \to Y$ — функция, ограниченная на системе $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ таких $G_n \subset A$ конечной меры, что $G_n \subset G_{n+1}$ и $\mu\Big(A \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_n\Big) = 0$, а $(f_n : n \in \mathbb{N})$ — последовательность интегрируемых на A функций $f_n : X \to Y$, сходящаяся к f на A по мере. Если для каждой секвенциально непрерывной полунормы p на Y и некоторого подмножества $B_p \subset A$ с $\mu(A \setminus B_p) = 0$ выполняется неравенство $(p\circ f_n)(x) \leqslant \varphi_p(x)$ для всех $x \in B_p$ и $n \in \mathbb{N}$, где $\varphi_p : X \to \mathbb{R}$ — интегрируемая на A числовая неотрицательная функция, то функция f тоже интегрируема на A, а последовательность $\hat{y} = (y_n : \in \mathbb{N})$ векторов $y_n \in \int\limits_A f_n\,d\mu$ сходится и $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) = \int\limits_A f\,d\mu$.*

◄ Докажем существование последовательности измеримых ступенчатых функций $g_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся к f почти всюду на A. Выберем подпоследовательность $(f_{k_n} : n \in \mathbb{N})$, сходящуюся к f поточечно на некотором $C \subset A$ с $\mu(A \backslash C) = 0$. В силу теоремы 3.84 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность измеримых ступенчатых функций $g_{nm} : X \to Y$, $m \in \mathbb{N}$, которая сходится к f_{k_n} равномерно на системе $\{H_{nm} : m \in \mathbb{N}\}$ таких подмножеств $H_{nm} \subset A$ конечной меры, что $H_{nm} \subset H_{n,m+1}$ и $\mu\big(A \backslash \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} H_{nm}\big) = 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $m_n \in \mathbb{N}$ так, чтобы $\mu(G_n \backslash H_{nm_n}) < 2^{-n}$, где G_n — указанное в теореме множество. Положим $M_n = \bigcap\limits_{k \geqslant n} (C \cap H_{km_k})$ и $M = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} M_n$. Очевидно, $M_n \subset M_{n+1}$. Как и в теореме 3.84, легко доказывается, что $\mu(A \backslash M) = 0$. Пусть d — инвариантная относительно сдвигов полуметрика на Y, определяющая операцию предела $\widetilde{\Lambda}$. Число $i_n \in \mathbb{N}$ выберем так, чтобы $d(g_{ni_n}(x),\, f_{k_n}(x)) < n^{-1}$ для всех $x \in M_n$. Для каждых $x \in M$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $n_0^{-1} < \frac{\varepsilon}{2}$, $x \in M_n$ и $d(f_{k_n}(x),\, f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n \geqslant n_0$. Но тогда $d(g_{ni_n}(x),\, f(x)) < \varepsilon$ для всех $n \geqslant n_0$. Отсюда следует, что последовательность измеримых ступенчатых функций $g_n = g_{ni_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к f почти всюду на A. В силу условий теоремы для каждой секвенциально непрерывной полунормы p на Y имеет место неравенство $(p \circ f)(x) \leqslant \varphi_p(x)$ для всех $x \in C \cap B_p$. Числовая функция $p \circ f$, будучи пределом почти всюду на A последовательности измеримых ступенчатых числовых функций $p \circ g_n$, $n \in \mathbb{N}$, измерима на A и в силу указанного неравенства с учетом $\mu(A \backslash (C \cap B_p)) = 0$ интегрируема на A по Лебегу. Таким образом, функция f удовлетворяет условиям теоремы 3.85 и, следовательно, интегрируема на A. Каждая из числовых функций $p \circ f_n$, $n \in \mathbb{N}$, тоже интегрируема на A по Лебегу. Так как последовательность числовых функций $p \circ (f_n - f)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к нулю на A по мере, а $(p \circ (f_n - f))(x) \leqslant 2\varphi_p(x)$ для всех $x \in C \cap B_p$ и $n \in \mathbb{N}$, то в силу теоремы Лебега $\lim\limits_n \int\limits_A p \circ (f_n - f)\, d\mu = 0$. Однако

$$\Big|p\Big(\int\limits_A f_n\, d\mu\Big) - p\Big(\int\limits_A f\, d\mu\Big)\Big| \leqslant p\Big(\int\limits_A (f_n - f)\, d\mu\Big) \leqslant \int\limits_A p \circ (f_n - f)\, d\mu.$$

Поэтому для последовательности $\hat{y} = (y_n : \in \mathbb{N})$ произвольных векторов $y_n \in \int\limits_A f_n\, d\mu$ имеем, что $\lim\limits_n p(y_n) = p\big(\int\limits_A f\, d\mu\big)$. Отсюда в силу произвольности p получаем $\widetilde{\Lambda}(\hat{y}) = \int\limits_A f\, d\mu$. ►

§ 16. Примеры

1. Пример линейного пространства с операцией однозначного предела (X, λ), в котором существует фундаментальная и неограниченная последовательность.

В качестве X возьмем векторное пространство, имеющее счетный базис Гамеля $(e_1, e_2, \ldots)$. Обозначим через $\hat{X}_0'$ множество таких последовательностей $\hat{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ в X, что

$$x_n = \sum_{k=1}^{m} \beta_{kn} e_k + \sum_{k=i_n}^{i_n+s_n} \gamma_{kn} e_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

где m — независящее от n натуральное число (оно может быть различным для различных $\hat{x}$), $i_n > m$ — натуральные числа, последовательность которых стремится к бесконечности, $s_n \geqslant 0$ — целые числа, а β_{kn} и γ_{kn} — произвольные числа, причем

$$\lim_n \sum_{k=1}^{m} |\beta_{kn}| = 0.$$

Пусть $\hat{X}_0$ — множество таких последовательностей $\hat{x}$ в X, что каждая подпоследовательность последовательности $\hat{x}$ обладает подпоследовательностью из $\hat{X}_0'$. Легко проверить, что $\hat{X}_0$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции однозначного предела λ в X. Рассмотрим последовательность $\hat{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ в X, где

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} e_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, последовательность $\hat{y}$ фундаментальна в линейном пространстве (X, λ). Кроме того, для любой последовательности $\hat{\alpha}$ отличных от нуля чисел последовательность $\hat{\alpha}\hat{y}$ не сходится к нулю, так как $\hat{\alpha}\hat{y} \notin \hat{X}_0$. Следовательно, последовательность $\hat{y}$ не ограничена.

Пусть U_0 — полная система окрестностей нуля построенного линейного пространства (X, λ). В силу предложения 3.21 операция предела, определенная в X системой окрестностей нуля $\{u + u : u \in U_0\}$, отличается от λ. Отсюда, в частности, следует, что в (X, λ) существуют окрестность нуля u_0 и открытая окрестность нуля v_0, такие, что $(u + u) \setminus u_0 \neq \varnothing$ и $(v + v) \setminus v_0 \neq \varnothing$ для любой окрестности нуля u и любой открытой окрестности нуля v. Более того, в X не существует векторной топологии, определяющей операцию предела λ.

Пусть R — отношение секвенциальной равномерности в $X^{\mathbb{N}}$, ассоциированное с линейным пространством $(X,\ \lambda)$, а U — полная система окружений пространства $(X,\ R)$. Тогда в силу теоремы 3.10 и замечания 3.2 отношение секвенциальной квазиравномерности, определенное системой окружений $\{\mathrm{u}^2 : \mathrm{u}\in U\}$, отличается от R.

Заметим еще, что построенная линейная операция предела λ обладает свойствами, указанными в утверждениях а) и б) теоремы 3.30. Поэтому в X нет отличной от λ линейной операции предела, порождающей ту же систему ограниченных подмножеств, что и λ.

2. Пример неотделимого линейного пространства с операцией однозначного предела $(X,\ \lambda)$.

В качестве X возьмем векторное пространство, имеющее счетный базис Гамеля E, состоящий из векторов e и e_{nk} $(n\in\mathbb{N},$ $k\in\mathbb{N})$. Пусть $\hat{X}_1$ — множество последовательностей $(e_{nk}-e:$ $k\in\mathbb{N})$, $n\in\mathbb{N}$, и всех их подпоследовательностей, а $\hat{X}_2$ — множество последовательностей $(e_{nk_n} : n\in\mathbb{N})$ и всех их подпоследовательностей, где $(k_n : n\in\mathbb{N})\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Обозначим через $\hat{X}_3$ множество всех последовательностей $\hat{\alpha}\hat{x}$, где $\hat{x}\in\hat{X}_1\cup\hat{X}_2$, а $\hat{\alpha}$ — сходящаяся числовая последовательность. Пусть, кроме того, $\hat{X}_4$ — множество всех последовательностей $\hat{\beta}\dot{z}$, где $z\in X$, а $\hat{\beta}$ — сходящаяся к нулю числовая последовательность. Обозначим через $\hat{X}_0'$ линейную оболочку множества $\hat{X}_3\cup\hat{X}_4$ в векторном пространстве $X^{\mathbb{N}}$, а через $\hat{X}_0$ — множество таких $\hat{x}\in X^{\mathbb{N}}$, что каждое $\hat{x}'\prec\hat{x}$ обладает подпоследовательностью из $\hat{X}_0'$. Легко проверить, что $\hat{X}_0$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5 и, следовательно, является ядром некоторой линейной операции однозначного предела λ в X. Нетрудно убедиться, что в построенном линейном пространстве $(X,\ \lambda)$ любая окрестность нуля и любая окрестность вектора e имеют непустое пересечение (в связи с этим см. пример в главе I, § 10, n° 7).

Согласно утверждению г) предложения 3.11, если векторная топология определяет операцию однозначного предела, то эта топология хаусдорфова. Поэтому построенная линейная операция предела λ не может определяться векторной топологией. Более того, если U_0 полная система окрестностей нуля пространства $(X,\ \lambda)$, то в силу предложения 3.6 операция предела λ не определяется системой окрестностей нуля $\{u^+ : u\in U_0\}$.

3. Рассмотрим линейное пространство $(\mathbb{R}, \lim)$. Пусть R — отношение секвенциальной равномерности, ассоциированное с пространством $(\mathbb{R}, \lim)$, а R' — сильнейшее отношение секвенциальной равномерности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, определяющее операцию предела $\lim$ в $\mathbb{R}$. Согласно теореме 2.13, полная система окружений пространства $(\mathbb{R}, R')$ совпадает с системой всех окрестностей диагонали $\Delta(\mathbb{R})$ в $(\mathbb{R}, \lim)\times(\mathbb{R}, \lim)$. Рассмотрим последовательности $\hat{\xi}=(n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\eta}=(n+n^{-1}:n\in\mathbb{N})$. Очевидно, $(\hat{\xi}, \hat{\eta})\in R$. Однако $(\hat{\xi}, \hat{\eta})\notin R'$, так как существует окрестность диагонали $\Delta(\mathbb{R})$, не содержащая точки $(n, n+n^{-1})$, $n\in\mathbb{N}$. Поэтому $R'\subset R$ и $R'\neq R$. Пусть R'' — отношение секвенциальной равномерности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, состоящее из всех таких пар $(\hat{x}, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x}=(x_n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{y}=(y_n:n\in\mathbb{N})$ в $\mathbb{R}$, что $\lim\limits_n|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{y_n}|=0$. Отношение R'' определяет операцию предела $\lim$ в $\mathbb{R}$. При этом $R\subset R''$ и $R\neq R''$, так как для последовательностей $\hat{\xi}=(n:n\in\mathbb{N})$ и $\hat{\zeta}=(n+1:n\in\mathbb{N})$ имеем $(\hat{\xi}, \hat{\zeta})\in R''$ и $(\hat{\xi}, \hat{\zeta})\notin R$. Тем самым R не является ни сильнейшим и ни слабейшим отношением секвенциальной равномерности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, определяющим операцию предела $\lim$ в $\mathbb{R}$.

Пусть ρ — метрика на $\mathbb{R}$, заданная равенством $\rho(x, y)=|x-y|+|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}|$ для всех вещественных чисел x и y. Метрика ρ не инвариантна относительно сдвигов и определяет операцию предела $\lim$ в $\mathbb{R}$. Однако отношение секвенциальной равномерности, ассоциированное с пространством $(\mathbb{R}, \rho)$, совпадает с R.

4. Рассмотрим на $\mathbb{R}$ метрики ρ, ρ', ρ^* и ρ_1, заданные для всех x и y из $\mathbb{R}$ равенствами

$$\rho(x, y)=|x-y|, \quad \rho'(x, y)=\frac{|x-y|}{1+|x-y|},$$

$$\rho^*(x, y)=|arctg\, x-arctg\, y|,$$

$$\rho_1(x, y)=\min\{\rho^*(x, y), \pi-\rho^*(x, y)\}.$$

Каждая из этих метрик определяет операцию предела $\lim$ в $\mathbb{R}$, причем ρ и ρ' инвариантны, а ρ^* и ρ_1 не инвариантны относительно сдвигов. Линейное пространство $(\mathbb{R}, \lim)$ и пространства с метрикой $(\mathbb{R}, \rho)$, $(\mathbb{R}, \rho')$ полны. Пространства с метрикой $(\mathbb{R}, \rho^*)$, $(\mathbb{R}, \rho_1)$ не полны, так как последовательность $(n:n\in\mathbb{N})$ фундаментальна и не сходится в этих пространствах (в связи с теоремой Бэра заметим, что $\mathbb{R}$ является множеством второй категории в этих неполных пространствах). Множество $\mathbb{R}$ не ограничено в $(\mathbb{R}, \lim)$ и не ρ-ограничено. Однако оно ρ'-ограничено, ρ^*-ограничено и ρ_1-ограничено, а именно: $\rho'(x, y) < 1$, $\rho^*(x, y) < \pi$ и $\rho_1(x, y) \leqslant \frac{\pi}{2}$ для всех x и y из $\mathbb{R}$. Множество $\mathbb{R}$ не предкомпактно в $(\mathbb{R}, \lim)$, $(\mathbb{R}, \rho)$ и $(\mathbb{R}, \rho')$, хотя оно ρ^*-предкомпактно и ρ_1-предкомпактно.

Пополнение пространства $(\mathbb{R}, \rho^*)$ можно получить следующим образом. Присоединим к $\mathbb{R}$ два новых элемента, обозначаемых символами ∞ и $-\infty$. Множество $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ называется расширенной вещественной прямой и записывается в виде $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty; \infty]$, в отличие от записи $\mathbb{R} = (-\infty; \infty)$. Метрику $\overline{\rho}$ на $\overline{\mathbb{R}}$ определим при помощи равенств: $\overline{\rho}(x, y) = \rho^*(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$; $\overline{\rho}(\infty, x) = \overline{\rho}(x, \infty) = \frac{\pi}{2} - arctg\, x$ и $\overline{\rho}(-\infty, x) = \overline{\rho}(x, -\infty) = \frac{\pi}{2} + arctg\, x$, $x \in \mathbb{R}$; $\overline{\rho}(\infty, -\infty) = \overline{\rho}(-\infty, \infty) = \pi$; $\overline{\rho}(\infty, \infty) = \overline{\rho}(-\infty, -\infty) = 0$. Пространство с метрикой $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\rho})$ секвенциально компактно и является пополнением пространства $(\mathbb{R}, \rho^*)$. Пусть $\overline{\lambda}$ — операция предела в $\overline{\mathbb{R}}$, определенная метрикой $\overline{\rho}$. Поскольку $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\lambda})$ секвенциально компактно, его нельзя превратить в линейное пространство.

В пространстве с метрикой $(\mathbb{R}, \rho_1)$ любая последовательность либо ρ_1-фундаментальна, либо обладает сходящейся подпоследовательностью. Поэтому в силу теоремы 2.17 отношение секвенциальной равномерности, ассоциированное с пространством $(\mathbb{R}, \rho_1)$, является слабейшим отношением секвенциальной равномерности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, определяющим операцию предела $\lim$ в $\mathbb{R}$. В качестве пополнения пространства $(\mathbb{R}, \rho_1)$ может служить пространство с метрикой $(\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\rho})$, где множество $\widetilde{\mathbb{R}}$ получается присоединением к $\mathbb{R}$ одного нового элемента, обозначаемого символом ∞, т. е. $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, а метрика $\widetilde{\rho}$ на $\widetilde{\mathbb{R}}$ определяется при помощи следующих равенств: $\widetilde{\rho}(x, y) = \rho_1(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$ и $y \in \mathbb{R}$; $\widetilde{\rho}(\infty, x) = \widetilde{\rho}(x, \infty) = \frac{\pi}{2} - |arctg\, x|$, $x \in \mathbb{R}$; $\widetilde{\rho}(\infty, \infty) = 0$. Пополнение $(\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\rho})$ секвенциально компактно (см. предложение 2.24). Поэтому $(\widetilde{\mathbb{R}}, \widetilde{\lambda})$, где $\widetilde{\lambda}$ — операция предела в $\widetilde{\mathbb{R}}$, определенная метрикой $\widetilde{\rho}$, нельзя превратить в линейное пространство.

5. Пример метрического линейного пространства (X, λ), не имеющего λ-ограниченной окрестности нуля.

Пусть $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а λ — операция предела в X, определенная метрикой ρ, заданной для любых элементов $x = (a_1, a_2, \ldots)$ и $y = (b_1, b_2, \ldots)$ из X равенством

$$\rho(x,\, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}. \tag{1}$$

Очевидно, что $(X,\, \lambda) = (\mathbb{R},\, \lim)^{\mathbb{N}}$ и счетная система открытых шаров $K_n = \{x \in X : \rho(0,\, x) < 2^{-n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, образует фундаментальную систему окрестностей нуля линейного пространства $(X,\, \lambda)$. Однако ни один из этих шаров не является λ-ограниченным множеством, так как $(rK_n) \setminus K_{n+1} \neq \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $r > 0$. Действительно, для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и произвольного $r > 0$ рассмотрим элемент $x = (a_1,\, a_2,\, \ldots)$ из X, где $a_n = 2 \max\{1,\, r^{-1}\}$ и $a_i = 0$ для всех натуральных $i \neq n$. В силу $a_n \geqslant 2$ и $ra_n \geqslant 2$ имеют место неравенства $\frac{2}{3} \leqslant a_n(1 + a_n)^{-1} < 1$ и $\frac{2}{3} \leqslant ra_n(1 + ra_n)^{-1} < 1$. Поэтому $x \in K_n$, $x \notin K_{n+1}$ и $rx \notin K_{n+1}$.

6. Пример линейного пространства $(X,\, \lambda)$ и метрики ρ на X, определяющей операцию предела λ, таких, что λ-ограниченное множество может не быть ρ-ограниченным.

Пусть X — векторное пространство, имеющее счетный базис Гамеля $(e_1,\, e_2,\, \ldots)$. Метрику ρ на X определим формулой

$$\rho(x,\, y) = \sum_{i=1}^{\infty} (|a_i - b_i| + |a_i^i - b_i^i|), \tag{2}$$

для любых векторов x и y из X, имеющих представления

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i, \tag{3}$$

где числа a_i и b_i равны нулю для всех $i \geqslant m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что метрика ρ определяет в X линейную операцию предела. Пусть в пространстве $(X,\, \rho)$ последовательности $\hat{x} = (x_1,\, x_2,\, \ldots)$ и $\hat{y} = (y_1,\, y_2,\, \ldots)$ сходятся к x и y соответственно, а числовая последовательность $\hat{\alpha} = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots)$ сходится к α. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ векторы x_n и y_n представим в виде

$$x_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{in} e_i, \quad y_n = \sum_{i=1}^{\infty} b_{in} e_i, \tag{4}$$

где числа a_{in} и b_{in} равны нулю для всех $i \geqslant m_n$ при некотором $m_n \in \mathbb{N}$. Из (3) и (4) в силу (2) получаем

$$\rho(x_n,\, x) = \sum_{i=1}^{m-1} (|a_{in} - a_i| + |a_{in}^i - a_i^i|) + \sum_{i=m}^{\infty} (|a_{in}| + |a_{in}^i|), \tag{5}$$

$$\rho(y_n,\, y) = \sum_{i=1}^{m-1} (|b_{in} - b_i| + |b_{in}^i - b_i^i|) + \sum_{i=m}^{\infty} (|b_{in}| + |b_{in}^i|), \tag{6}$$

$$\rho(x_n + y_n,\, x + y) = \sum_{i=m}^{\infty} (|a_{in} + b_{in}| + |a_{in} + b_{in}|^i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} (|(a_{in} + b_{in}) - (a_i + b_i)| + |(a_{in} + b_{in})^i - (a_i + b_i)^i|), \tag{7}$$

$$\rho(\alpha_n x_n,\, \alpha x) = \sum_{i=m}^{\infty} (|\alpha_n a_{in}| + |\alpha_n a_{in}|^i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} (|\alpha_n a_{in} - \alpha a_i| + |(\alpha_n a_{in})^i - (\alpha a_i)^i|). \tag{8}$$

По условию, $\lim\limits_n \rho(x_n,\, x) = 0$, $\lim\limits_n \rho(y_n,\, y) = 0$ и $\lim\limits_n \alpha_n = \alpha$. Из (5) и (6) получаем, что $\lim\limits_n a_{in} = a_i$ и $\lim\limits_n b_{in} = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$, $\lim\limits_n a_{in} = 0$ и $\lim\limits_n b_{in} = 0$ при $i \geqslant m$. Более того,

$$\lim_n \sum_{i=m}^{\infty} |a_{in}| = 0, \quad \lim_n \sum_{i=m}^{\infty} |b_{in}| = 0. \tag{9}$$

Поэтому

$$\lim_n \sum_{i=1}^{m-1} (|(a_{in} + b_{in}) - (a_i + b_i)| + |(a_{in} + b_{in})^i - (a_i + b_i)^i|) = 0, \tag{10}$$

$$\lim_n \sum_{i=1}^{m-1} (|\alpha_n a_{in} - \alpha a_i| + |(\alpha_n a_{in})^i - (\alpha a_i)^i|) = 0. \tag{11}$$

В силу (9) существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $|a_{in}| < \frac{1}{4}$, $|b_{in}| < \frac{1}{4}$ и $|\alpha_n a_{in}| < \frac{1}{2}$ для всех $i \geqslant m$ и $n \geqslant n_0$. Следовательно, $|a_{in} + b_{in}|^i \leqslant \leqslant |a_{in}| + |b_{in}|$ и $|\alpha_n a_{in}|^i \leqslant |\alpha_n a_{in}|$ для всех $i \geqslant m$ и $n \geqslant n_0$. Отсюда в силу (9) получаем

$$\lim_n \sum_{i=m}^{\infty} (|a_{in} + b_{in}| + |a_{in} + b_{in}|^i) = 0, \tag{12}$$

$$\lim_n \sum_{i=m}^{\infty} (|\alpha_n a_{in}| + |\alpha_n a_{in}|^i) = 0. \tag{13}$$

Из (7), (8) и (10)—(13) следует, что $\lim\limits_n \rho(x_n+y_n,\, x+y)=0$ и $\lim\limits_n \rho(\alpha_n x_n,\, \alpha x)=0$. А это означает, что в $(X,\,\rho)$ последовательности $\hat{x}+\hat{y}$ и $\hat{\alpha}\hat{x}$ сходятся к $x+y$ и αx соответственно. Тем самым ρ определяет в X линейную операцию предела λ.

Очевидно, $\rho(0,\,2e_n)=2+2^n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Поэтому последовательность $(2e_n : n\in\mathbb{N})$ не ρ-ограничена. Однако для любой сходящейся к нулю последовательности чисел β_n, $n\in\mathbb{N}$, последовательность $(2\beta_n e_n : n\in\mathbb{N})$ сходится к нулю в $(X,\,\lambda)$, так как $\rho(0,\,2\beta_n e_n)=|2\beta_n|+|2\beta_n|^n$. А это означает, что последовательность $(2e_n : n\in\mathbb{N})$ λ-ограничена.

7. Пример линейного пространства $(X,\,\lambda)$ и метрики $\widetilde{\rho}$ на X, определяющей операцию предела λ, таких, что λ-фундаментальная последовательность может не быть $\widetilde{\rho}$-фундаментальной.

Пусть X — векторное пространство, имеющее счетный базис Гамеля $(e_1,\, e_1,\, \ldots)$, а ρ — инвариантная относительно сдвигов метрика на X, заданная формулой (1) для любых x и y из X, имеющих представления (3). Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим $\xi_n=e_1+e_2+\ldots+e_n$ и $K_n=\{\xi\in X : \rho(\xi_n,\,\xi)<2^{-n-4}\}$. Легко проверить, что $\rho(\xi_n,\,\xi_s)\geqslant \max\{2^{-n-2},\, 2^{-s-2}\}$ при $n\neq s$ и, значит, $K_n\cap K_s=\varnothing$. Определим функцию $f : X\to\mathbb{R}$, положив $f(x)=0$ для $x\in X\setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$ и $f(x)=(-1)^n(1-2^{n+4}\rho(\xi_n,\,x))$ для $x\in K_n$ при каждом $n\in\mathbb{N}$. Функция f секвенциально непрерывна, причем $0\leqslant|f(x)|\leqslant 1$ и $f(\xi_n)=(-1)^n$ для всех $x\in X$ и $n\in\mathbb{N}$. Теперь определим метрику $\widetilde{\rho}$ на X, положив

$$\widetilde{\rho}(x,\, y) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}(|a_i-b_i|+|a_i f(x)-b_i f(y)|) \tag{14}$$

для любых x и y из X, имеющих представления (3). Докажем, что $\widetilde{\rho}$ определяет в X линейную операцию предела. Пусть в $(X,\,\widetilde{\rho})$ последовательности $\hat{x}=(x_1,\, x_2,\, \ldots)$ и $\hat{y}=(y_1,\, y_2,\, \ldots)$ сходятся к x и y соответственно, а числовая последовательность $\hat{\alpha}=(\alpha_1,\, \alpha_2,\, \ldots)$ сходится к α. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ векторы x_n и y_n представим в виде (4). Из (3) и (4) в силу (14) получаем

$$\widetilde{\rho}(x_n,\, x) = (1+|f(x_n)|)\sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}|a_{in}|+ \\ +\sum_{i=1}^{m-1} 2^{-i}(|a_{in}-a_i|+|a_{in}f(x_n)-a_i f(x)|), \tag{15}$$

$$\widetilde{\rho}(y_n,\, y) = (1 + |f(y_n)|) \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}|b_{in}| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} 2^{-i}(|b_{in} - b_i| + |b_{in} f(y_n) - b_i f(y)|), \tag{16}$$

$$\widetilde{\rho}(x_n + y_n,\, x + y) = (1 + |f(x_n + y_n)|) \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}|a_{in} + b_{in}| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} 2^{-i}|(a_{in} + b_{in}) f(x_n + y_n) - (a_i + b_i) f(x + y)| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} 2^{-i}|(a_{in} + b_{in}) - (a_i + b_i)|, \tag{17}$$

$$\widetilde{\rho}(\alpha_n x_n,\, \alpha x) = |\alpha_n|(1 + |f(\alpha_n x_n)|) \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}|a_{in}| +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} 2^{-i}(|\alpha_n a_{in} - \alpha a_i| + |\alpha_n a_{in} f(\alpha_n x_n) - \alpha a_i f(\alpha x)|). \tag{18}$$

По условию, $\lim\limits_n \widetilde{\rho}(x_n,\, x) = 0$, $\lim\limits_n \widetilde{\rho}(y_n,\, y) = 0$ и $\lim\limits_n \alpha_n = \alpha$. Из (15) и (16) следует, что $\lim\limits_n a_{in} = a_i$, $\lim\limits_n b_{in} = b_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$ и $\lim\limits_n a_{in} = 0$, $\lim\limits_n b_{in} = 0$ при $i \geqslant m$. Более того,

$$\lim_n \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}|a_{in}| = 0, \quad \lim_n \sum_{i=m}^{\infty} 2^{-i}|b_{in}| = 0. \tag{19}$$

Отсюда с учетом (1) получаем $\lim\limits_n \rho(x_n,\, x) = 0$, $\lim\limits_n \rho(y_n,\, y) = 0$, $\lim\limits_n \rho(x_n + y_n,\, x + y) = 0$ и $\lim\limits_n \rho(\alpha_n x_n,\, \alpha x) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_n f(x_n) = f(x)$, $\lim\limits_n f(y_n) = f(y)$, $\lim\limits_n f(x_n + y_n) = f(x + y)$ и $\lim\limits_n f(\alpha_n x_n) = f(\alpha x)$. В силу этого из (17)—(19) вытекает, что $\lim\limits_n \widetilde{\rho}(x_n + y_n,\, x + y) = 0$ и $\lim\limits_n \widetilde{\rho}(\alpha_n x_n,\, \alpha x) = 0$. Значит, $\hat{x} + \hat{y}$ и $\hat{\alpha}\hat{x}$ сходятся в $(X,\, \widetilde{\rho})$ к $x + y$ и αx соответственно. Таким образом, $\widetilde{\rho}$ определяет в X линейную операцию предела λ. С учетом $f(\xi_n) = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, легко убедиться, что $\widetilde{\rho}(\xi_{n+1},\, \xi_n) = 2 - 2^{-n}$ и $\widetilde{\rho}(0,\, \xi_{n+s} - \xi_n) = (2^{-n} - 2^{-n-s})(1 + |f(\xi_{n+s} - \xi_n)|)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что последовательность $(\xi_n : n \in \mathbb{N})$ λ-фундаментальна, но не $\widetilde{\rho}$-фундаментальна.

8. Примеры различных линейных пространств с одним и тем же носителем, имеющих одно и то же фактор-пространство по одному и тому же замкнутому векторному подпространству.

Пусть X — векторное пространство всех функций $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Обозначим через E множество таких $M\subset\mathbb{R}$, что $\mathbb{R}\backslash M$ имеет нулевую меру Лебега. Для каждого $M\in E$ рассмотрим линейное пространство $(X,\,\Lambda_M)$, где операция предела Λ_M соответствует поточечной сходимости на M последовательности функций из X. Рассмотрим также линейные пространства $(X,\,\lambda)$ и $(X,\,\Lambda_0)$, где операции предела λ и Λ_0 являются соответственно точной нижней и точной верхней границами в $\mathcal{L}^*(X)$ множества $\{\Lambda_M : M\in E\}$ (см. § 8). Операция предела λ соответствует поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности функций, а Λ_0 соответствует сходимости по внешней мере Лебега последовательности функций на $\mathbb{R}$ (см. главу I, § 10, n° 1). Обозначим через X_0 множество всех функций из X, значения каждой из которых отличны от нуля лишь на множестве нулевой меры Лебега. Оно является замкнутым векторным подпространством в любом из линейных пространств $(X,\,\lambda)$, $(X,\,\Lambda_0)$ и $(X,\,\Lambda_M)$, $M\in E$, причем $X_0=\Lambda_0(\dot{0})=\bigcup\limits_{M\in E}\Lambda_M(\dot{0})$. Пусть $\varPhi=X/X_0$. С учетом утверждения а) теоремы 3.32 нетрудно убедиться, что все указанные линейные пространства имеют одно и то же фактор-пространство $(\varPhi,\,\widetilde{\lambda})$ по векторному подпространству X_0.

Пусть $X'\subset X$ — векторное подпространство всех измеримых по Лебегу функций. Рассмотрим линейные подпространства $(X',\,\lambda')\subset(X,\,\lambda)$, $(X',\,\Lambda_0')\subset(X,\,\Lambda_0)$ и $(X',\,\Lambda_M')\subset(X,\,\Lambda_M)$, $M\in E$. Все эти подпространства тоже имеют одно и то же фактор-пространство $(\varPhi',\,\widetilde{\lambda}')\subset(\varPhi,\,\widetilde{\lambda})$ по векторному подпространству $X_0\subset X'$. Операция предела Λ_0' соответствует сходимости по мере Лебега и, следовательно, $(X',\,\Lambda_0')$ полуметризуемо, а $(\varPhi',\,\widetilde{\lambda}')$ метризуемо. Отсюда следует, что в $(X',\,\lambda')$ для каждой окрестности нуля u существует такая открытая окрестность нуля v, что $v+v\subset u+X_0$, пеичем $u+X_0$ является окрестностью нуля также в $(X',\,\Lambda_0')$. Отметим, что X' является единственным непустым открытым выпуклым множеством в $(X',\,\Lambda_0')$. Поэтому $G+X_0=X'$ для любого открытого выпуклого подмножества $G\neq\varnothing$ пространства $(X',\,\lambda')$.

9. В векторном пространстве X всех функций $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ рассмотрим операцию предела λ, соответствующую поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности функций. Приведем несколько примеров, связанных с линейным пространством $(X,\,\lambda)$.

Пусть $X_1 \subset X$ — векторное подпространство всех непрерывных функций, а x_0 — функция Дирихле, т. е. $x_0(r) = 1$ для рациональных $r \in \mathbb{R}$ и $x_0(r) = 0$ для иррациональных $r \in \mathbb{R}$. Известно (см. [51], с. 348), что $x_0 \notin X_1^+$ и $x_0 \in (X_1^+)^+$ в (X, λ). Поэтому (X, λ) не является пространством Фреше–Урысона. Отсюда в силу предложения 3.11 следует существование такой окрестности нуля u_0 в (X, λ), что $(u+u) \backslash u_0 \neq \varnothing$ для любой окрестности нуля u. Примером может служить $u_0 = X \backslash Z$, где $Z = X_1 - x_0$. Действительно, $0 \notin Z^+$ и $0 \in (Z^+)^+$, т. е. $0 \in u_0^-$ и $0 \notin (u_0^-)^-$. С другой стороны, $u \subset (u+u)^-$ для любой окрестности нуля u и, значит, $0 \in ((u+u)^-)^-$. Поэтому $(u+u) \backslash u_0 \neq \varnothing$.

В связи с теоремами 3.38, 3.67 и замечанием 1.11 построим теперь пример секвенциально непрерывного линейного функционала, определенного на незамкнутом векторном подпространстве Y пространства (X, λ) и не допускающего секвенциально непрерывного продолжения на квазизамыкание Y^+. В качестве Y возьмем линейную оболочку множества $X_1 \cup \{x_0\}$, т. е. множество всех $y = \alpha x + \beta x_0$, где $x \in X_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$. Линейный функционал $f : Y \to \mathbb{R}$ определим равенством $f(y) = \beta$ для $y = \alpha x + \beta x_0$. В частности, $f(x_0) = 1$ и $f(x) = 0$ для $x \in X_1$. Функционал f секвенциально непрерывен, так как $x_0 \notin X_1^+$ в пространстве (X, λ). Однако f не допускает секвенциально непрерывного продолжения на Y^+, так как $x_0 \in (X_1^+)^+$.

Теперь в связи с теоремой 3.66 рассмотрим в Y локально выпуклую топологию τ_1, определенную следующим образом. Для каждого $x \in Y$ обозначим через V_x систему всех множеств

$$v_x = v_x(n, \varepsilon; r_1, r_2, \ldots, r_n) =$$
$$= \{y \in Y : |y(r_k) - x(r_k)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

где числа $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $r_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ произвольны. Семейство $(V_x : x \in Y)$ образует базу локально выпуклой топологии τ_1 в Y. Топология τ_1 определяет в Y операцию предела поточечной сходимости на $\mathbb{R}$. В подпространстве $(Y, \widetilde{\lambda}) \subset (X, \lambda)$ рассмотрим некоторую функцию $x \in Y$ и ее выпуклую открытую окрестность $v_x = v_x(n, \varepsilon; r_1, r_2, \ldots, r_n)$. Очевидно, для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ функцию $y_\alpha \in X_1$ можно выбрать так, что $\alpha x_0(r_k) + y_\alpha(r_k) - x(r_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\alpha x_0 + y_\alpha \in v_x$ и $f(\alpha x_0 + y_\alpha) = \alpha$, где f — рассмотренный выше линейный функционал на Y. Поэтому $f(v_x) = \mathbb{R}$. Следовательно, секвенциально непрерывный линейный функционал f не непрерывен в локально выпуклой топологии τ_1. Заметим, что множество всех функций $x+\alpha x_0$, где $x\in X_1$ и $|\alpha|<1$, является выпуклым открытым множеством в $(Y,\,\widetilde{\lambda})$ и не принадлежит τ_1. Поэтому система всех выпуклых открытых подмножеств пространства $(Y,\,\widetilde{\lambda})$ является базой локально выпуклой топологии τ_1' в Y, которая отличается от τ_1, причем $\tau_1\subset\tau_1'$. Кроме того, обе топологии τ_1 и τ_1' хаусдорфовы и определяют в Y операцию предела $\widetilde{\lambda}$. Заметим еще, что для каждого $r\in\mathbb{R}$ по формуле $\varphi_r(x)=x(r)$, $x\in Y$ определяется τ_1-непрерывный линейный функционал φ_r на Y. Отсюда вытекает, что операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(Y,\,\widetilde{\lambda})$, совпадает с $\widetilde{\lambda}$.

В связи с теоремой 3.37 и приведенным примером функционала f рассмотрим пополнения подпространств $(X_1,\,\lambda_1)\subset\subset(X,\,\lambda)$ и $(Y,\,\widetilde{\lambda})\subset(X,\,\lambda)$. Очевидно, пространство $(X,\,\lambda)$ полно. Поэтому в качестве носителей пополнений подпространств $(X_1,\,\lambda_1)$ и $(Y,\,\widetilde{\lambda})$ можно взять квазизамыкания X_1^+ и Y^+ соответственно. Пополнение $(X_1^+,\,\lambda_1')$ подпространства $(X_1,\,\lambda_1)$ не совпадает с подпространством $(X_1^+,\,\lambda_2)\subset(X,\,\lambda)$, т. е. $\lambda_1'\neq\lambda_2$, причем $\lambda_1'<\lambda_2$. Действительно, рассмотрим последовательность функций $x_n\in X$, $n\in\mathbb{N}$, где для каждого $n\in\mathbb{N}$ функция x_n определяется следующим образом: $x_n(n^{-1})=1$ и $x_n(r)=0$ для всех вещественных чисел $r\neq n^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $x_n\in X_1^+$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Указанная последовательность функций x_n, $n\in\mathbb{N}$, сходится к нулю в $(X,\,\lambda)$, однако она в силу утверждения а) предложения 3.40 не сходится в пополнении $(X_1^+,\,\lambda_1')$. Заметим, что подпространство $(X_1^+,\,\lambda_2)$ не полно и может быть получено из $(X_1,\,\lambda_1)$ и $(X_1^+,\,\lambda_1')$ указанным в предложении 3.41 способом (для $(X_1,\,\lambda_1)$ условие предложения 3.41 выполняется). Аналогичные утверждения справедливы также для подпространства $(Y^+,\,\widetilde{\lambda}'')\subset(X,\,\lambda)$ и пополнения $(Y^+,\,\widetilde{\lambda}')$ подпространства $(Y,\,\widetilde{\lambda})\subset(X,\,\lambda)$.

Очевидно, операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(X,\,\lambda)$, совпадает с λ.

Относительно секвенциальной топологии τ линейного пространства $(X,\,\lambda)$ остается открытым вопрос о том, является ли τ векторной топологией?

В X существует локально выпуклая топология $\tau^*\subset\tau$, определяющая операцию предела λ. Действительно, пусть V_0^* — система множеств

$$v_0^* = v_0^*(n, \varepsilon; r_1, r_2, \ldots, r_n) =$$
$$= \{y \in X : |y(r_k)| < \varepsilon, \ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

где числа $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $r_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ произвольны. Каждое v_0^* является выпуклой уравновешенной открытой окрестностью нуля в (X, λ). Система $\{x + v_0^* : x \in X, \ v_0^* \in V_0^*\}$ является базой локально выпуклой топологии τ^* в X, определяющей операцию предела λ. Можно доказать, что для каждой окрестности нуля u пространства (X, λ) существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $0 \in (u + u + \ldots + u)^\circ \in \tau^*$, где число слагаемых равно n.

Построим в X топологии, определяющие операцию предела λ и не являющиеся векторными топологиями.

Мощность и внешнюю меру Лебега произвольного $M \subset \mathbb{R}$ обозначим через $card(M)$ и $\mu^*(M)$ соответственно. Для $M \subset \mathbb{R}$, $y \in X$ и $\varepsilon > 0$ введем множество $M(y, \varepsilon) = \{t \in M : |y(t)| < \varepsilon\}$. Пусть $\widetilde{V}_0'$ — система множеств

$$\widetilde{v}_0' = \widetilde{v}_0'(r, \varepsilon, M) = \{y \in X : |y(r)| < \varepsilon, \ card(M(y, \varepsilon)) > \omega\},$$

где $r \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные числа, ω — счетная мощность, а $M \subset \mathbb{R}$ — произвольное подмножество с $card(M) > \omega$. Каждое $\widetilde{v}_0'$ явяется уравновешенной открытой окрестностью нуля в (X, λ). Обозначим через V_0' систему всевозможных конечных пересечений множеств из $\widetilde{V}_0'$. Тогда система $\{x + v_0' : x \in X, v_0' \in V_0'\}$ является базой для инвариантной относительно сдвигов топологии τ' в X, определяющей операцию предела λ, причем $\tau^* \subset \tau' \subset \tau$. Однако τ' не является векторной топологией, так как $(v_0' + v_0') \backslash \widetilde{v}_0' \neq \varnothing$ для любых $v_0' \in V_0'$ и $\widetilde{v}_0' \in \widetilde{V}_0'$.

Пусть $\widetilde{V}_0''$ — система множеств

$$\widetilde{v}_0'' = \widetilde{v}_0''(r, \varepsilon, M) = \{y \in X : |y(r)| < \varepsilon, \ \mu^*(M(y, \varepsilon)) > \mu^*(M) - \varepsilon\},$$

где $r \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ — произвольные числа, а $M \subset \mathbb{R}$ — произвольное подмножество, для которого $\varepsilon < \mu^*(M) < \infty$. Каждое $\widetilde{v}_0''$ является уравновешенной открытой окрестностью нуля в (X, λ). Обозначим через V_0'' систему всевозможных конечных пересечений множеств из $\widetilde{V}_0''$. Тогда система $\{x + v_0'' : x \in X, v_0'' \in V_0''\}$ является базой для инвариантной относительно сдвигов топологии τ'' в X, определяющей операцию предела λ, причем $\tau^* \subset \tau'' \subset \tau$. Однако τ'' не является векторной топологией, так как $(v_0'' + v_0'') \backslash \widetilde{v}_0'' \neq \varnothing$ для любых $v_0'' \in V_0''$ и $\widetilde{v}_0'' \in \widetilde{V}_0''$.

10. Рассмотрим линейное пространство $(X,\, \lambda)$, где X — векторное пространство всех многочленов, определенных на отрезке $[0;\, 1]$ вещественной оси, а операция предела λ соответствует равномерной сходимости на $[0;\, 1]$ последовательности многочленов из X. Пусть $(\widetilde{X},\, \widetilde{\lambda})$ — пополнение линейного пространства $(X,\, \lambda)$. Ясно, что в качестве $\widetilde{X}$ можно взять векторное пространство всех непрерывных числовых функций, определенных на $[0;\, 1]$, а в качестве линейного подпространства $(\widetilde{X}_0,\, \widetilde{\lambda}_0) \subset \subset (\widetilde{X},\, \widetilde{\lambda})$, удовлетворяющего условиям определения 3.15, можно взять $(X,\, \lambda)$. Рассмотрим последовательность функций $x_n \in \widetilde{X}$, $n \in \mathbb{N}$, определенных равенством $x_n(r) = \frac{1}{n} e^{\frac{r}{n}}$ для всех $r \in [0;\, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$. С учетом утверждения а) предложения 3.40 последовательность функций $x_n,\ n \in \mathbb{N}$, не сходится в $(\widetilde{X},\, \widetilde{\lambda})$, хотя она сходится к нулю равномерно на $[0;\, 1]$ в классическом смысле. Согласно замечанию 3.9, пространство $(\widetilde{X},\, \widetilde{\lambda})$ не метризуемо, хотя $(X,\, \lambda)$ нормируемо. Пусть λ' — операция предела в $\widetilde{X}$, соответствующая равномерной сходимости на $[0;\, 1]$ последовательности функций из $\widetilde{X}$. Тогда линейное пространство $(\widetilde{X},\, \lambda')$ полно и нормируемо. Ясно, что $(X,\, \lambda)$ является линейным подпространством каждого из пространств $(\widetilde{X},\, \widetilde{\lambda})$ и $(\widetilde{X},\, \lambda')$, причем равенство $\widetilde{X} = X^+$ имеет место в каждом из указанных пространств. Однако $\widetilde{\lambda} \neq \lambda'$, причем $\widetilde{\lambda} < \lambda'$. Заметим, что полное нормируемое линейное пространство $(\widetilde{X},\, \lambda')$ может быть получено из $(X,\, \lambda)$ и $(\widetilde{X},\, \widetilde{\lambda})$ указанным в теореме 3.36 способом.

11. Пример, связянный с теоремой 2.22 и утверждением г) предложения 2.23.

Пусть $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, а R' — классическое отношение секвенциальной равномерности в $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, т. е. R' есть множество всех пар $(\hat{x},\, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ в $\mathbb{Q}$, для которых $\lim\,(\hat{x} - \hat{y}) = 0$ (для классической операции предела как в $\mathbb{R}$, так и в $\mathbb{Q}$ будем использовать обозначение lim). Ясно, что в качестве носителя пополнения пространства с секвенциальной равномерностью $(\mathbb{Q},\, R')$ можно взять $\mathbb{R}$. Пусть $(\mathbb{R},\, \widetilde{R})$ — пополнение пространства $(\mathbb{Q},\, R')$. Согласно теореме 2.25 и утверждению г) предложения 2.23, пространство $(\mathbb{R},\, \widetilde{R})$ не метризуемо. В пространстве $(\mathbb{R},\, \widetilde{R})$ последовательность иррациональных чисел сходится тогда и только тогда, когда она почти стационарна. Пусть R — классическое отношение секвенциальной равномерности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, т. е. R есть множество всех пар $(\hat{x},\, \hat{y})$ последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{y}$ в $\mathbb{R}$, для которых $\lim\,(\hat{x}-\hat{y})=0$. Полное метризуемое пространство с секвенциальной равномерностью $(\mathbb{R},\, R)$ может быть получено из $(\mathbb{Q},\, R')$ и $(\mathbb{R},\, \widetilde{R})$ указанным в теореме 2.22 способом. Пополнение $(\mathbb{R},\, \lambda_0)$ коммутативной аддитивной группы с операцией предела $(\mathbb{Q},\, \lim)$ тоже отличается от $(\mathbb{R},\, \lim)$ и не метризуемо, причем если $\widetilde{\lambda}$ — операция предела пространства с секвенциальной равномерностью $(\mathbb{R},\, \widetilde{R})$, а R_0 — отношение секвенциальной равномерности, ассоциированное с коммутативной аддитивной группой с операцией предела $(\mathbb{R},\, \lambda_0)$, то $\widetilde{\lambda}<\lambda_0<\lim$ и $\widetilde{R}\subset R_0\subset R$.

12. Рассмотрим на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2$ норму, определенную для всех $x=(x_1,\, x_2)\in\mathbb{R}^2$ равенством $\|x\|=|x_1|+|x_2|$. Эта норма дифференцируема в точке $x=(x_1,\, x_2)$ только при $x_1x_2\neq 0$. Всякий ненулевой линейный функционал, определенный на одномерном векторном подпространстве $X_1=\{(\xi,\, 0):\xi\in\mathbb{R}\}$ или $X_2=\{(0,\, \xi):\xi\in\mathbb{R}\}$ допускает бесконечное множество линейных продолжений на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы. Действительно, линейный функционал $f:X_1\to\mathbb{R}$ задается при помощи равенства $f(\xi,\, 0)=c\xi$ для всех $(\xi,\, 0)\in X_1$, где $c\in\mathbb{R}$ — некоторое число. При этом $\|f\|=|c|$. Кроме того, линейный функционал $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ задается при помощи равенства $F(x_1,\, x_2)=\alpha x_1+\beta x_2$ для всех $(x_1,\, x_2)\in\mathbb{R}^2$, где α и β — некоторые вещественные числа. При этом $\|F\|=\max\{|\alpha|,\, |\beta|\}$. Очевидно, при $\alpha=c$ функционал F является продолжением f, а если и $|\beta|\leqslant|c|$, то $\|F\|=\|f\|$. Легко доказывается, что если в $\mathbb{R}^2$ одномерное векторное подпространство X' отлично от X_1 и X_2, то всякий линейный функционал, определенный на X', допускает единственное линейное продолжение на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

На $\mathbb{R}^2$ можно рассматривать также норму, заданную равенством $\|x\|=\max\{|x_1|,\, |x_2|\}$ для всех $x=(x_1,\, x_2)\in\mathbb{R}^2$. Эта норма дифференцируема в точке $x=(x_1,\, x_2)$ только при $|x_1|-|x_2|\neq$ $\neq 0$. Всякий ненулевой линейный функционал, определенный на одномерном векторном подпространстве $X_1'=\{(\xi,\, \xi):\xi\in\mathbb{R}\}$ или $X_2'=\{(\xi,\, -\xi):\xi\in\mathbb{R}\}$ допускает бесконечное множество линейных продолжений на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы. Действительно, линейный функционал $f:X_1'\to\mathbb{R}$ задается при помощи равенства $f(\xi, \xi) = c\xi$, где $c \in \mathbb{R}$ — некоторое число. При этом $\|f\| = |c|$. Для линейного функционала $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, заданного при помощи равенства $F(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, в рассматриваемом случае имеем $\|F\| = |\alpha| + |\beta|$. Если $\alpha + \beta = c$, то F является продолжением f, а если и $|\alpha| + |\beta| = |c|$, то $\|F\| = \|f\|$. Если в $\mathbb{R}^2$ одномерное векторное подпространство X'' отлично от X'_1 и X'_2, то всякий линейный функционал, определенный на X'', допускает единственное линейное продолжение на $\mathbb{R}^2$ с сохранением нормы.

13. В связи с замечанием 3.21 рассмотрим на трехмерном вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^3$ норму, заданную для всех $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ равенством $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, а также двухмерное векторное подпространство

$$X_0 = \{(x_1, x_2, x_1 + x_2) : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Всякий линейный функционал f на X_0 задается равенством $f(x_1, x_2, x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$, где α и β — вещественные числа, и, как нетрудно убедиться, $\|f\| = \frac{1}{2} \max\{|\alpha|, |\beta|, |\alpha - \beta|\}$. Всякий линейный функционал F на $\mathbb{R}^3$ задается при помощи равенства $F(x_1, x_2, x_3) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, где c_1, c_2 и c_3 — вещественные числа, причем $\|F\| = \max\{|c_1|, |c_2|, |c_3|\}$. Если требовать, чтобы функционал F был продолжением f с сохранением нормы, то числа c_1, c_2 и c_3 — определятся однозначно. Следовательно, f допускает единственное линейное продолжение на $\mathbb{R}^3$ с сохранением нормы. Рассмотрим линейные функционалы f_1 и f_2 на X_0, заданные равенствами $f_1(x_1, x_2, x_1 + x_2) = 2x_1$ и $f_2(x_1, x_2, x_1 + x_2) = 2x_2$. Пусть F_1, F_2 и F — соответственно линейные продолжения функционалов f_1, f_2 и $f_1 + f_2$ на $\mathbb{R}^3$ с сохранением нормы. Тогда $F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$, $F_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + x_2 + x_3$ и $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$. Так как $F_1(x_1, x_2, x_3) + F_2(x_1, x_2, x_3) = 2x_3$, то $F \neq F_1 + F_2$. При этом $\|F\| = \|f_1 + f_2\| = \|f_1\| = \|f_2\| = 1$ и $\|F_1 + F_2\| = 2$.

14. Рассмотрим нормированное вещественное линейное пространство l_1, элементами которого являются всевозможные последовательности $x = (x_i : i \in \mathbb{N})$ в $\mathbb{R}$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$, причем $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|$. Пусть $x = (x_i : i \in \mathbb{N})$ — такая точка в l_1, что $x_i > 0$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Легко можно доказать, что норма пространства l_1 дифференцируема в точке x по любому конечномерному векторному подпространству. Докажем однако, что норма не дифференцируема в точке x. Как известно (см. [38], с. 187; [47], с. 150), всякий секвенциально непрерывный линейный функционал f, определенный на l_1, задается равенством $f(h)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i h_i$ для любого элемента $h=(h_i : i\in\mathbb{N})$ из l_1, где $(c_i : i\in\mathbb{N})$ — некоторая ограниченная последовательность в $\mathbb{R}$ (своя для каждого f). Рассмотрим в l_1 последовательности элементов $h^{(n)}=(h_i^{(n)} : i\in\mathbb{N})$ и $\widetilde{h}^{(n)}=(\widetilde{h}_i^{(n)} : i\in\mathbb{N})$, $n\in\mathbb{N}$, где

$$h_i^{(n)}=\begin{cases}-x_n, & i=n,\\ 0, & i\neq n,\end{cases}\qquad \widetilde{h}_i^{(n)}=\begin{cases}-2x_n, & i=n,\\ 0, & i\neq n.\end{cases}$$

Очевидно, $\|h^{(n)}\|=x_n$ и $\|\widetilde{h}^{(n)}\|=2x_n$. Следовательно,

$$\lim_n \|h^{(n)}\|=\lim_n \|\widetilde{h}^{(n)}\|=0.$$

Кроме того, для указанного выше функционала f имеем

$$\|h^{(n)}\|^{-1}(\|x+h^{(n)}\|-\|x\|-f(h^{(n)}))=c_n-1,$$
$$\|\widetilde{h}^{(n)}\|^{-1}(\|x+\widetilde{h}^{(n)}\|-\|x\|-f(\widetilde{h}^{(n)}))=c_n.$$

Однако требования $\lim\limits_n (c_n-1)=0$ и $\lim\limits_n c_n=0$ не совместимы. Поэтому норма пространства l_1 не дифференцируема в точке x.

15. Для числа $r\in(1;\,\infty)$ рассмотрим нормированное комплексное линейное пространство l_r, элементами которого являются всевозможные последовательности $x=(x_i : i\in\mathbb{N})$ в $\mathbb{C}$, такие, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^r<\infty$, причем $\|x\|=\big(\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i|^r\big)^{\frac{1}{r}}$. Для каждой точки $x\neq 0$ пространства l_r рассмотрим секвенциально непрерывный вещественно линейный функционал $p_x : l_r\to\mathbb{R}$, определенный для всех $h=(h_i : i\in\mathbb{N})$ из l_r равенством

$$p_x(h)=\Re\big(\|x\|^{1-r}\sum_{i=1}^{\infty} h_i\overline{x}_i|x_i|^{r-2}\big),\tag{20}$$

где считается $\overline{x}_i|x_i|^{r-2}=0$ при $x_i=0$. Докажем, что в l_r норма вещественно дифференцируема в каждой точке $x\neq 0$, а функционал p_x является вещественной производной нормы в точке x. С этой целью для $h\in l_r$ такого, что $0<\|h\|<\|x\|$, рассмотрим функцию $\psi : \mathbb{R}\to R$, определенную для всех $t\in\mathbb{R}$ равенством $\psi(t)=\|x+th\|$. Функция ψ имеет производную $\psi'(t)$ в каждой точке $t\in[0;\,1]$, причем $\psi'(t)=p_{x+th}(h)$. Очевидно,

$$\|x+h\|-\|x\|=\psi(1)-\psi(0)=\psi'(\theta), \tag{21}$$

где $\theta\in(0;\,1)$ — некоторое число, зависящее от h. Следовательно,

$$\|x+h\|-\|x\|-p_x(h)=p_{x+\theta h}(h)-p_x(h). \tag{22}$$

С учетом (20) имеем

$$|p_{x+\theta h}(h)-p_x(h)|\leqslant \big|\|x+\theta h\|^{1-r}-\|x\|^{1-r}\big|\sum_{i=1}^{\infty}|h_i|\,|x_i+\theta h_i|^{r-1}+$$

$$+\|x\|^{1-r}\sum_{i=1}^{\infty}|h_i|\,\big|(\overline{x}_i+\theta\overline{h}_i)|x_i+\theta h_i|^{r-2}-\overline{x}_i|x_i|^{r-2}\big|.$$

Отсюда в силу *неравенства Гельдера* (см. [32], с. 130—134) получаем

$$|p_{x+\theta h}(h)-p_x(h)|\,\|h\|^{-1}\leqslant \big|1-\|x\|^{1-r}\,\|x+\theta h\|^{r-1}\big|+$$

$$+\|x\|^{1-r}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\big|(\overline{x}_i+\theta\overline{h}_i)|x_i+\theta h_i|^{r-2}-\overline{x}_i|x_i|^{r-2}\big|^{\frac{r}{r-1}}\Big)^{\frac{r-1}{r}}. \tag{23}$$

Для натурального числа $m>1$ обозначим

$$A_m(h)=\Big(\sum_{i=1}^{m-1}\big|(\overline{x}_i+\theta\overline{h}_i)|x_i+\theta h_i|^{r-2}-\overline{x}_i|x_i|^{r-2}\big|^{\frac{r}{r-1}}\Big)^{\frac{r-1}{r}}. \tag{24}$$

Заметим, что $(a+b)^\alpha\leqslant a^\alpha+b^\alpha$ для любых чисел $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ и $\alpha\in(0;\,1)$. С учетом этого в силу *неравенства Минковского* (см. [32], с. 130—134) имеем

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\big|(\overline{x}_i+\theta\overline{h}_i)|x_i+\theta h_i|^{r-2}-\overline{x}_i|x_i|^{r-2}\big|^{\frac{r}{r-1}}\Big)^{\frac{r-1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant A_m(h)+\Big(\sum_{i=m}^{\infty}\big|(\overline{x}_i+\theta\overline{h}_i)|x_i+\theta h_i|^{r-2}-\overline{x}_i|x_i|^{r-2}\big|^{\frac{r}{r-1}}\Big)^{\frac{r-1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant A_m(h)+\Big(\sum_{i=m}^{\infty}\big(|x_i+\theta h_i|^{r-1}+|x_i|^{r-1}\big)^{\frac{r}{r-1}}\Big)^{\frac{r-1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant A_m(h)+\Big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i+\theta h_i|^{r}\Big)^{\frac{r-1}{r}}+\Big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^{r}\Big)^{\frac{r-1}{r}}\leqslant$$

$$\leqslant A_m(h)+\bigg(\|h\|+\Big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^{r}\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg)^{r-1}+\Big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^{r}\Big)^{\frac{r-1}{r}}.$$

В силу этой оценки из (23) получаем

$$|p_{x+\theta h}(h)-p_x(h)|\,\|h\|^{-1}\leqslant \Big|1-\|x\|^{1-r}\,\|x+\theta h\|^{r-1}\Big|+$$
$$+\|x\|^{1-r}\Big(A_m(h)+\Big(\|h\|+\big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^r\big)^{\frac{1}{r}}\Big)^{r-1}+\big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^r\big)^{\frac{r-1}{r}}\Big). \tag{25}$$

Рассмотрим в l_r сходящуюся к нулю последовательность векторов $h^{(n)}=(h_i^{(n)}:i\in\mathbb{N})$, $n\in\mathbb{N}$, причем $0<\|h^{(n)}\|<\|x\|$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Из (22) и (25) для каждого $n\in\mathbb{N}$ имеем

$$\Big|\|x+h^{(n)}\|-\|x\|-p_x(h^{(n)})\Big|\,\|h^{(n)}\|^{-1}\leqslant \Big|1-\|x\|^{1-r}\,\|x+\theta_n h^{(n)}\|^{r-1}\Big|+$$
$$+\|x\|^{1-r}\Big(A_m(h^{(n)})+\Big(\|h^{(n)}\|+\big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^r\big)^{\frac{1}{r}}\Big)^{r-1}+\big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^r\big)^{\frac{r-1}{r}}\Big), \tag{26}$$

где $\theta_n\in(0;\,1)$ — число, соответствующее вектору $h^{(n)}$ в смысле равенства (21). Так как $\lim\limits_n\|h^{(n)}\|=0$, то с учетм (24) имеем $\lim\limits_n A_m(h^{(n)})=0$. Очевидно также равенство

$$\lim_n\Big|1-\|x\|^{1-r}\,\|x+\theta_n h^{(n)}\|^{r-1}\Big|=0.$$

Поэтому из (26) получаем

$$\overline{\lim_n}\,\Big|\|x+h^{(n)}\|-\|x\|-p_x(h^{(n)})\Big|\,\|h^{(n)}\|^{-1}\leqslant 2\|x\|^{1-r}\big(\sum_{i=m}^{\infty}|x_i|^r\big)^{\frac{r-1}{r}}.$$

Отсюда в силу произвольности m вытекает, что

$$\lim_n\Big|\|x+h^{(n)}\|-\|x\|-p_x(h^{(n)})\Big|\,\|h^{(n)}\|^{-1}=0.$$

Следовательно, функционал p_x является вещественной производной нормы в точке x.

В силу теоремы 3.77 $p_x+\mathrm{i}p_{\mathrm{i}x}$ является единственным секвенциально непрерывным линейным функционалом на l_r, имеющим единичную норму и принимающим значение $\|x\|$ в точке $x\neq 0$. При этом в силу (20) имеет место равенство

$$(p_x+\mathrm{i}p_{\mathrm{i}x})(h)=p_x(h)-\mathrm{i}p_x(\mathrm{i}h)=\|x\|^{1-r}\sum_{n=1}^{\infty}h_n\overline{x}_n|x_n|^{r-2}.$$

В связи с теоремой 3.78 докажем, что для любого $h\in l_r$, любой последовательности $(e_n : n\in\mathbb{N})$ в l_r, где $\|e_n\|=1$ при всех $n\in\mathbb{N}$, и любых сходящихся к нулю последовательностей чисел $t_n\geqslant 0$ и $t'_n\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$, имеет место равенство

$$\lim_n \big(p_{e_n+t_nh}(h)+p_{e_n-t'_nh}(-h)\big)=0. \tag{27}$$

Действительно, пусть $h=(h_i : i\in\mathbb{N})$, а $e_n=(e_{ni} : i\in\mathbb{N})$ для каждого $n\in\mathbb{N}$, где h_i и e_{ni} — комплексные числа. Можно считать $t_n\|h\|<1$ и $t'_n\|h\|<1$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Обозначим $I_n=\{i\in\mathbb{N} : h_i(e_{ni}+t_nh_i)(e_{ni}-t'_nh_i)\neq 0\}$, $I'_n=\{i\in\mathbb{N} : e_{ni}+t_nh_i=0\}$ и $I''_n=\{i\in\mathbb{N} : e_{ni}-t'_nh_i=0\}$. Тогда с учетом (20) имеем

$$\begin{gathered} p_{e_n+t_nh}(h)+p_{e_n-t'_nh}(-h)= \\ =(t_n+t'_n)^{r-1}\|e_n-t'_nh\|^{1-r}\sum_{i\in I'_n}|h_i|^r+ \\ +(t_n+t'_n)^{r-1}\|e_n+t_nh\|^{1-r}\sum_{i\in I''_n}|h_i|^r+ \\ +\Re\Big(\|e_n+t_nh\|^{1-r}\sum_{i\in I_n}h_i(\overline{e}_{ni}+t_n\overline{h}_i)|e_{ni}+t_nh_i|^{r-2}\Big)- \\ -\Re\Big(\|e_n-t'_nh\|^{1-r}\sum_{i\in I_n}h_i(\overline{e}_{ni}-t'_n\overline{h}_i)|e_{ni}-t'_nh_i|^{r-2}\Big). \end{gathered} \tag{28}$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ при $i\in I_n$ положим

$$\beta_{ni}=\left|\frac{e_{ni}+t_nh_i}{|e_{ni}+t_nh_i|}\frac{|e_{ni}+t_nh_i|^{r-1}}{(|e_{ni}|+|h_i|)^{r-1}}-\frac{e_{ni}-t'_nh_i}{|e_{ni}-t'_nh_i|}\frac{|e_{ni}-t'_nh_i|^{r-1}}{(|e_{ni}|+|h_i|)^{r-1}}\right|,$$

а при $i\in\mathbb{N}\backslash I_n$ положим $\beta_{ni}=0$. Из (28) получаем неравенство

$$\begin{gathered} |p_{e_n+t_nh}(h)+p_{e_n-t'_nh}(-h)|\leqslant A_n+B_n\|e_n-t'_nh\|^{1-r}+ \\ +(t_n+t'_n)^{r-1}\|h\|^r(\|e_n+t_nh\|^{1-r}+\|e_n-t'_nh\|^{1-r}), \end{gathered} \tag{29}$$

где $A_n=\big|\|e_n+t_nh\|^{1-r}-\|e_n-t'_nh\|^{1-r}\big|\sum\limits_{i=1}^{\infty}|h_i|\,|e_{ni}+t_nh_i|^{r-1}$ и $B_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\beta_{ni}|h_i|(|e_{ni}|+|h_i|)^{r-1}$. В силу неравенств Гельдера и Минковского имеем

$$A_n\leqslant\|h\|\|e_n+t_nh\|^{r-1}\big|\|e_n+t_nh\|^{1-r}-\|e_n-t'_nh\|^{1-r}\big|,$$

$$B_n\leqslant(1+\|h\|)^{r-1}\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\beta_{ni}^r|h_i|^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Очевидно, $\lim\limits_n A_n = 0$. Кроме того, $\beta_{ni} \leqslant 2$ и $\lim\limits_n \beta_{ni} = 0$ при каждом $i \in \mathbb{N}$. Поэтому $\lim\limits_n B_n = 0$. Но тогда из (29) получаем (27).

Аналогичные утверждения верны также для полунормированного линейного пространства L_r, $r \in (1; \infty)$ (определение дано, например, в [32], с. 142).

16. В связи с теоремой 3.54 и утверждением в) теоремы 3.28 построим в бесконечномерном гильбертовом пространстве с носителем X поглощающее выпуклое подмножество $M \subset X$, не имеющее внутренних точек. Для этого выберем в X базис Гамеля E так, чтобы последовательность некоторых векторов $e_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, сходилась к нулю. Тогда в качестве M можно взять множество всевозможных конечных линейных комбинаций векторов из E с коэффициентами, не превосходящими по модулю единицу. Действительно, M поглощающе, уравновешено и выпукло, а для любого $x \in M$ последовательность векторов $x + 3e_n \notin M$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к x. Заметим, что в силу теоремы 3.54 замыкание $\overline{M}$ является окрестностью нуля и, значит, для каждого $r > 0$ найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что $re_n \in \overline{M}$ для всех $n \geqslant m$.

17. Пусть G — непустое открытое множество на комплексной плоскости $(\mathbb{C}, \lim)$, $\mathcal{F}$ — множество всех аналитических функций $f : G \to \mathbb{C}$, $\mathfrak{S}$ — система всех компактных подмножеств в G, а $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ — операция предела $\mathfrak{S}$-равномерной сходимости в $\mathcal{F}$. Ясно, что в линейном пространстве $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ множество ограничено тогда и только тогда, когда оно как множество функций равномерно ограничено на системе $\mathfrak{S}$. Согласно *теореме Монтеля* (см. [48], с. 198), в $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ ограниченное множество секвенциально квазикомпактно. Отсюда следует, что пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ полно и в нем последовательность сходится к $f \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда она ограничена и сходится к f поточечно на G. Кроме того, в силу утверждения б) следствия 3.7 операцию предела $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ нельзя ослабить с сохранением системы всех ограниченных множеств. Заметим, что в $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ существует счетная фундаментальная система окрестностей нуля, состоящая из выпуклых множеств $v_n = \{f \in \mathcal{F} : |f(z)| < n^{-1},\ z \in M_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, где последовательность множеств $M_n \in \mathfrak{S}$, $n \in \mathbb{N}$, выбрана так, что $M_n \subset M_{n+1}$ и каждое $M \in \mathfrak{S}$ содержится в некотором M_n. Поэтому пространство $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$ метризуемо и локально выпукло. Отсюда в силу утверждения а) следствия 3.7 вытекает, что операцию предела $\Lambda_{\mathfrak{S}}$ нельзя усилить с сохранением системы всех ограниченных множеств. Кроме того, в силу теоремы 3.68 операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(\mathcal{F}, \Lambda_{\mathfrak{S}})$, совпадает с $\Lambda_{\mathfrak{S}}$.

18. С точки зрения построенной здесь теории одним из интересных примеров является пространство основных (или пробных) функций, которое рассматривается в теории обобщенных функций (или распределений) (см. [27], [52], [54], [70]).

Пусть Ω — непустое открытое множество в пространстве $(\mathbb{R}, \lim)^m$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Носителем функции $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ называется замыкание множества $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$ и обозначается через $supp\, \varphi$. Рассмотрим комплексное векторное пространство $\mathcal{D}_\Omega$ всех бесконечно дифференцируемых (в классическом смысле) функций $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ с компактным носителем $supp\, \varphi \subset \Omega$. Для каждого семейства $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ целых чисел $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, называемого мультииндексом, рассмотрим также отображение $D^\alpha : \mathcal{D}_\Omega \to \mathcal{D}_\Omega$, называемое дифференциальным оператором порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m$ и определяемое равенством

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad \varphi \in \mathcal{D}_\Omega,$$

где $x_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \Omega$, а для удобства положены $D^\alpha(\varphi) = D^\alpha \varphi$ и $(D^\alpha \varphi)(x) = D^\alpha \varphi(x)$. Введем в $\mathcal{D}_\Omega$ линейную операцию однозначного предела λ следующим образом: для функции $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ и последовательности $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N})$ функций $\varphi_n \in \mathcal{D}_\Omega$ будем считать $\lambda(\hat{\varphi}) = \varphi$, если множество $M = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} supp\, \varphi_n$ ограничено и $\overline{M} \subset \Omega$, а для каждого мультииндекса α последовательность функций $D^\alpha \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к функции $D^\alpha \varphi$ равномерно на Ω. Линейное пространство $(\mathcal{D}_\Omega, \lambda)$ называется пространством основных (или пробных) функций. Комплексное векторное пространство всех секвенциально непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}_\Omega$ (т. е. сопряженное с $(\mathcal{D}_\Omega, \lambda)$ векторное пространство) обозначим через $\mathcal{D}'_\Omega$. Линейную операцию однозначного предела в $\mathcal{D}'_\Omega$, соответствующую поточечной сходимости, обозначим через λ'. Линейное пространство $(\mathcal{D}'_\Omega, \lambda')$ называется пространством обобщенных функций (или распределений).

Выберем последовательность непустых компактных подмножеств $K_j \subset \Omega$, $j \in \mathbb{N}$, так, чтобы $K_j = \overline{K_j^\circ}$, $K_j \subset K_{j+1}^\circ$ и каждое компактное $K \subset \Omega$ содержалось в некотором K_j. Ясно, что $\Omega = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} K_j$. Для каждого $j \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{D}_j$ векторное подпространство в $\mathcal{D}_\Omega$, состоящее из всех таких $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, что

$supp\,\varphi \subset K_j$. Очевидно, $\mathcal{D}_\Omega = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_j$. Рассмотрим также линейное подпространство $(\mathcal{D}_j,\, \lambda_j) \subset (\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$. Нетрудно убедиться, что $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ полно и в нем каждое $\mathcal{D}_j$ замкнуто. Кроме того, каждое ограниченное в $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ подмножество содержится в некотором $\mathcal{D}_j$. Так как каждое $\mathcal{D}_j$ имеет пустую внутренность в $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$, то пространство $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ является множеством первой категории в себе. Поэтому $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ не метризуемо. Однако каждое подпространство $(\mathcal{D}_j,\, \lambda_j)$ метризуемо и локально выпукло (т. е. операция предела λ_j определяется счетным семейством полунорм). Действительно, при каждом целом $\nu \geqslant 0$ определим на $\mathcal{D}_\Omega$ норму $\|\cdot\|_\nu$ по формуле $\|\varphi\|_\nu = \max\{|D^\alpha\varphi(x)| : x\in\Omega,\ |\alpha| \leqslant \nu\}$, $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$, и заметим, что в $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ последовательность функций $\varphi_n \in \mathcal{D}_\Omega$, $n\in\mathbb{N}$, сходится к функции $\varphi\in\mathcal{D}_\Omega$ тогда и только тогда, когда найдется такое $j\in\mathbb{N}$, что $\varphi\in\mathcal{D}_j$, $\varphi_n\in\mathcal{D}_j$ для всех $n\in\mathbb{N}$ и $\lim\limits_n \|\varphi_n - \varphi\|_\nu = 0$ при любом $\nu\in\mathbb{N}$.

Сформулируем несколько предложений (некоторые из них известны) и наметим доказательства.

а) $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ не является пространством Фреше–Урысона.

б) В $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ для каждой сходящейся к нулю последовательности $\hat\varphi$ существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность $\hat r$ натуральных чисел, что $\hat r\hat\varphi$ сходится к нулю.

в) В $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ ограниченное множество секвенциально квазикомпактно.

г) Если $E\subset\mathcal{D}_\Omega$ такое, что для каждого $j\in\mathbb{N}$ пересечение $E\cap\mathcal{D}_j$ является окрестностью нуля в подпространстве $(\mathcal{D}_j,\, \lambda_j)$, то E является окрестностью нуля в $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$.

д) Система всех выпуклых окрестностей нуля пространства $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ определяет операцию предела λ.

е) Сильнейшая локально выпуклая топология τ в $\mathcal{D}_\Omega$, определяющая операцию предела λ, индуцирует в каждом подпространстве $\mathcal{D}_j$ секвенциальную топологию, причем секвенциально непрерывный линейный функционал на $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ τ-непрерывен, а всякий секвенциально непрерывный линейный функционал, определенный на $(\mathcal{D}_j,\, \lambda_j)$, допускает секвенциально непрерывное линейное продолжение на $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$.

ж) Операцию предела λ нельзя усилить или ослабить с сохранением системы всех ограниченных подмножеств.

з) Операция предела ослабленной сходимости, соответствующая пространству $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$, совпадает с λ.

и) $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ содержит такое замкнутое линейное подпространство со счетным базисом Гамеля, что его операция предела является сильнейшей линейной операцией предела.

к) В $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ для всякого поглощающего и радиально уравновешенного множества E множество $E+E^+$ является окрестностью нуля.

л) В $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ квазизамыкание поглощающего выпуклого множества является окрестностью нуля.

м) В $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ всякое радиально уравновешенное множество, которое поглощает каждую сходящуюся к нулю последовательность, является окрестностью нуля.

н) Равномерно ограниченная система линейных функционалов на $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ равностепенно секвенциально непрерывна.

о) Если система F секвенциально непрерывных линейных функционалов на $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ такая, что для каждого $\varphi \in \mathcal{D}_\Omega$ числовое множество $\{f(\varphi) : f \in F\}$ ограничено, то F равностепенно секвенциально непрерывна.

п) Пространство $(\mathcal{D}'_\Omega,\, \lambda')$ полно, а операция предела λ' соответствует также равномерной сходимости последовательностей функционалов из $\mathcal{D}'_\Omega$ на каждом ограниченном множестве в $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$.

Предложение а) вытекает из того, что, как легко заметить, пространство $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ не обладает свойством, указанным в теореме 1.34, а б) вытекает из метризуемости каждого $(\mathcal{D}_j,\, \lambda_j)$.

Для доказательства в) рассмотрим в $(\mathcal{D}_\Omega,\, \lambda)$ некоторую ограниченную последовательность $\hat{\varphi} = (\varphi_n : n \in \mathbb{N})$. Тогда $\varphi_n \in \mathcal{D}_j$ для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. Так как последовательность норм $\|\varphi_n\|_1,\ n \in \mathbb{N}$, ограничена, то последовательность $\hat{\varphi}$ равностепенно секвенциально непрерывна на Ω. В силу теоремы 3.45 $\hat{\varphi}$ обладает подпоследовательностью $\hat{\varphi}_1 = (\varphi_{n1} : n \in \mathbb{N})$, которая сходится к некоторой непрерывной на Ω функции φ равномерно на каждом компактном $K \subset \Omega$. Очевидно, $supp\, \varphi \subset K_j$. Так как последовательность норм $\|\varphi_{n1}\|_2,\ n \in \mathbb{N}$, ограничена, то для каждого мультииндекса α с $|\alpha| = 1$ последовательность функций $D^\alpha \varphi_{n1},\ n \in \mathbb{N}$, равностепенно секвенциально непрерывна на Ω. В силу теоремы 3.45 $\hat{\varphi}_1$ обладает такой подпоследовательностью $\hat{\varphi}_2 = (\varphi_{n2} : n \in \mathbb{N})$, что для каждого мультииндекса α с $|\alpha| = 1$ последовательность функций $D^\alpha \varphi_{n2},\ n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно на Ω к непрерывной функции $D^\alpha \varphi$. Продолжая эти рассуждения, для каждого $k \in \mathbb{N}$ получим существование такой подпоследовательности $\hat{\varphi}_k = (\varphi_{nk} : n \in \mathbb{N})$ последовательности $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_0$, что $\hat{\varphi}_k \prec \hat{\varphi}_{k-1}$ и для каждого мультииндекса α с $|\alpha| \leqslant k-1$ последовательность функций $D^\alpha\varphi_{nk}$, $n\in\mathbb{N}$, сходится равномерно на Ω к непрерывной функции $D^\alpha\varphi$. Отсюда следует, что $\varphi\in\mathcal{D}_j$. Ясно, что подпоследовательность $(\varphi_{nn}:n\in\mathbb{N})$ последовательности $\hat\varphi$ сходится к φ в пространстве $(\mathcal{D}_\Omega,\ \lambda)$.

Предложение г) очевидно. Относительно д) достаточно доказать, что если в $(\mathcal{D}_\Omega,\ \lambda)$ последовательность $(\varphi_n:n\in\mathbb{N})$ не сходится к нулю, то существует выпуклая окрестность нуля, вне которого находится бесконечное число членов этой последовательности. Возможны два случая: либо $\varphi_n\in\mathcal{D}_j$ для всех $n\in\mathbb{N}$ при некотором $j\in\mathbb{N}$, либо существуют такие строго возрастающие последовательности натуральных чисел k_n и j_n $(n\in\mathbb{N})$, что $\varphi_{k_n}\in\mathcal{D}_{j_{n+1}}\backslash\mathcal{D}_{j_n}$ для каждого $n\in\mathbb{N}$. В первом случае существование требуемой окрестности нуля очевидно. Во втором случае существует такая последовательность точек $x_n\in K_{j_{n+1}}\backslash K_{j_n}$, $n\in\mathbb{N}$, что $\varphi_{k_n}(x_n)\neq 0$. Положим $c_n=\min\{|\varphi_{k_i}(x_i)|:1\leqslant i\leqslant n\}$ и $E_n=\{\varphi\in\mathcal{D}_{j_{n+1}}:\|\varphi\|_0<c_n2^{-n-1}\}$. Очевидно, E_n является окрестностью нуля в пространстве $(\mathcal{D}_{j_{n+1}},\ \lambda_{j_{n+1}})$. Обозначим через E выпуклую оболочку множества $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Пусть $\psi\in E$. Тогда $\psi=t_1\psi_1+t_2\psi_2+\ldots+t_\nu\psi_\nu$ с некоторыми $\nu\in\mathbb{N}$, $\psi_i\in E_i$ и $t_i\in\mathbb{R}_+$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu)$, причем $t_1+t_2+\ldots+t_\nu=1$. Для произвольного $n\in\mathbb{N}$ в силу выбора x_n имеем, что $\psi(x_n)=0$ при $n>\nu$ и $\psi(x_n)=t_1\psi_1(x_n)+t_2\psi_2(x_n)+\ldots+t_\nu\psi_\nu(x_n)$ при $n\leqslant\nu$. В последнем случае $|\psi(x_n)|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i|\psi_i(x_n)|\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_i\|\psi_i\|_0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{\nu}t_ic_i2^{-i-1}\leqslant$ $\leqslant c_n2^{-n}<c_n\leqslant|\varphi_{k_n}(x_n)|$. Следовательно, $\psi\neq\varphi_{k_n}$. Тем самым $\varphi_{k_n}\notin E$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Так как $E_n\subset E\cap\mathcal{D}_{j_{n+1}}$, то в силу г) множество E является выпуклой окрестностью нуля в $(\mathcal{D}_\Omega,\ \lambda)$.

В предложении е) первые два утверждения очевидны, а последнее утверждение вытекает из предложения 3.54. Предложение ж) вытекает из утверждения а) теоремы 3.30 и утверждения б) следствия 3.7. Предложение з) вытекает из теоремы 3.68 и утверждения б) теоремы 3.30.

В качестве носителя указанного в предложении и) подпространства может служить линейная оболочка последовательности некоторых функций $\varphi_j\in\mathcal{D}_{j+1}\backslash\mathcal{D}_j$, $j\in\mathbb{N}$.

Предложения к) и л) вытекают из следствия 3.10, а м) — из предложения 3.46. Предложение н) вытекает из утверждения б) теоремы 3.52, а о) и п) — из следствий 3.11 и 3.12.

Глава IV

ПРОСТРАНСТВА С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА НАПРАВЛЕННОСТИ ИЛИ ФИЛЬТРА

§ 1. Пространства с операцией предела направленности

1. Операция предела направленности. Полная система окрестностей точки. Понятия окрестности точки и предела направленности совместно вводятся следующим образом. Класс всех направленностей в непустом множестве X обозначим через $\mathcal{K}(X)$ (некоторые понятия и обозначения, указанные в n° 1 и n° 2 раздела обозначений и определений и связанные с множествами, будем использовать также для классов). Исходя из семейства $(V_x : x \in X)$ некоторых систем окрестностей, введем в X понятие предела направленности. Точка $x \in X$ называется пределом направленности $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ по системе V_x окрестностей точки x, если $\check{x}$ почти вся лежит в каждом $v \in V_x$. Сопоставляя каждой направленности из $\mathcal{K}(X)$ множество ее пределов, получим отображение $L : \mathcal{K}(X) \to 2^X$, называемое операцией предела направленности в X. Пара $(X,\, L)$ называется пространством с операцией предела направленности. Очевидно, множество $L(\dot{x})$ не зависит от области определения стационарной направленности $\dot{x}$ и содержит точку x. В исходном семействе $(V_x : x \in X)$ каждую систему V_x расширим с сохранением операции предела направленности L и полученную сильнейшую систему U_x назовем полной системой окрестностей точки x пространства $(X,\, L)$. Система U_x совпадает с фильтром в X, имеющим предбазу V_x. Следовательно, всякий фильтр подмножеств множества X, содержащих точку $x \in X$, может служить полной системой окрестностей точки x в некотором пространстве с операцией предела направленности, имеющем носитель X. В $(X,\, L)$ множество v называется окрестностью множества M, если v является окрестностью каждой точки из M (любое множество считается окрестностью пустого множества). Этим завершается совместное введение понятий окрестности и предела направленности.

Отображение $L : \mathcal{K}(X) \to 2^X$ является операцией предела направленности в множестве X тогда и только тогда, когда

1) $x \in L(\dot{x})$ для каждого $x \in X$;

2) $L(\check{x}) \subset L(\check{x}')$ для любых $\check{x}' \prec \check{x}$ из $\mathcal{K}(X)$;

3) для каждых $\check{x}\in\mathcal{K}(X)$ и $x\in X\setminus L(\check{x})$ существует такое $\check{x}'\prec\check{x}$, что $x\notin L(\check{\xi})$ для любого $\check{\xi}\in\mathcal{K}([\check{x}'])$.

В пространстве с операцией предела направленности $(X,\,L)$ полная система U_x окрестностей точки x есть множество таких $u\subset X$, что $x\notin L(\check{\xi})$ для любого $\check{\xi}\in\mathcal{K}(X\setminus u)$. В $(X,\,L)$ множество v является окрестностью множества M тогда и только тогда, когда $M\cap L(\check{\xi})=\varnothing$ для любого $\check{\xi}\in\mathcal{K}(X\setminus v)$.

В свойстве 1) отображения L не предполагается, что множество $L(\dot{x})$ инвариантно относительно области определения стационарной направленности $\dot{x}$. Эта инвариантность следует из свойств 1)—3).

Отметим, что вместо класса $\mathcal{K}(X)$ можно было ограничиться рассмотрением множества направленностей в X, указанного в n° 5 раздела обозначений и определений.

2. Замыкание и квазизамыкание. Открытые множества. В пространстве с операцией предела направленности $(X,\,L)$ точка x называется предельной точкой множества M, если существует направленность $\check{x}$ в $M\setminus\{x\}$, сходящаяся к x, т. е. $x\in L(\check{x})$. Точка x является предельной точкой множества M тогда и только тогда, когда каждая ее окрестность имеет непустое пересечение с $M\setminus\{x\}$. Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки. Пересечение любой системы и объединение конечной системы замкнутых множеств являются замкнутыми множествами. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих множество M, называется замыканием, а объединение M с множеством его предельных точек называется квазизамыканием множества M и обозначаются соответственно через $\overline{M}$ и M^+. Имеет место включение $M^+\subset\overline{M}$.

Отображение $M\mapsto M^+$ множества 2^X в себя является операцией квазизамыкания в некотором (притом единственном) пространстве с операцией предела направленности $(X,\,L)$ тогда и только тогда, когда

1) $\varnothing^+=\varnothing$; 2) $M\subset M^+$; 3) $(M\cup G)^+=M^+\cup G^+$.

В пространстве $(X,\,L)$ множество называется открытым, если оно является своей окрестностью. Множество открыто тогда и только тогда, когда его дополнение замкнуто. Система τ всех открытых подмножеств пространства $(X,\,L)$ является топологией в X. В $(X,\,L)$ точка x называется точкой накопления множества M, если каждая ее открытая окрестность имеет непустое пересечение с $M\setminus\{x\}$. Предельная точка множества является его точкой накопления. Однако обратное утверждение не верно. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои точки накопления. Замыкание множества совпадает с объединением этого множества и множества его точек накопления.

Операция предела направленности L', определенная в X топологией τ всех открытых подмножеств пространства (X, L), может отличаться от L, причем $L(\check{x}) \subset L'(\check{x})$ для любого $\check{x} \in \in \mathcal{K}(X)$. Кроме того, τ является также топологией всех открытых подмножеств пространства (X, L'). Следовательно, в (X, L) и (X, L') операции замыкания совпадают.

3. Топологические пространства с операцией предела направленности. Пространство с операцией предела направленности (X, L) называется топологическим, а L — топологической операцией предела направленности, если L может быть определено топологией всех открытых подмножеств этого пространства.

Пространство (X, L) является топологическим тогда и только тогда, когда в нем окрестность точки содержит ее открытую окрестность. Следовательно, в топологическом пространстве (X, L) понятия точки накопления и предельной точки множества совпадают, а, значит, понятия замыкания и квазизамыкания множества тоже совпадают.

Пусть γ — система подмножеств множества X, покрывающая X, а L — операция предела направленности в X, определенная системой γ, рассматриваемой как система открытых множеств. Тогда пространство (X, L) топологическое, причем γ является предбазой для топологии всех открытых подмножеств этого пространства. Следовательно, всякая топология в непустом множестве может служить топологией всех открытых подмножеств некоторого топологического пространства с операцией предела направленности, имеющего носитель X.

Пространство (X, L) является топологическим тогда и только тогда, когда для каждых $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ и $x \in X \setminus L(\check{x})$ существует такое $\check{x}' \prec \check{x}$, что $x \notin \overline{[\check{x}']}$. Отсюда следует, что отображение $L : \mathcal{K}(X) \to 2^X$ является топологической операцией предела направленности в X тогда и только тогда, когда

1) $x \in L(\dot{x})$ для каждого $x \in X$;

2) $L(\check{x}) \subset L(\check{x}')$ для любых $\check{x}' \prec \check{x}$ из $\mathcal{K}(X)$;

3) для каждых $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$ и $x \in X \setminus L(\check{x})$ существует такое $M \subset X \setminus \{x\}$, что $\check{x}$ является частым в M и $L(\check{\xi}) \subset M$ для любого $\check{\xi} \in \mathcal{K}(M)$.

В [35], с. 107, указаны характеристические свойства топологической операции предела направленности, которые аналогичны свойствам операции предела Фреше—Урысона, указанным в теоремах 1.3 и 1.33. Чтобы привести эти свойства, введем отношение частичного предупорядочения в декартовом произведении $J=\prod\limits_{i\in I} J_i$ семейства направленных множеств $(J_i : i\in I)$, положив $j'\leqslant j''$ для элементов j' и j'' из J, если $pr_i(j')\leqslant pr_i(j'')$ для всех $i\in I$. Тогда J становится направленным множеством и называется направленным произведением этого семейства.

Свойства 1)—3) отображения L эквивалентны следующим:

1) $x\in L(\dot{x})$ для каждого $x\in X$;

2) $L(\check{x})\subset L(\check{x}')$ для любых $\check{x}'\prec\check{x}$ из $\mathcal{K}(X)$;

3) если $x\in X$ и $\check{x}\in\mathcal{K}(X)$ такие, что для каждого $\check{x}'\prec\check{x}$ существует $\check{x}''\prec\check{x}'$, для которого $x\in L(\check{x}'')$, то $x\in L(\check{x})$;

4) если семейство $\big(x_{\nu k} : (\nu,\, k)\in\bigcup\limits_{i\in I}(\{i\}\times J_i)\big)$ в X такое, что множества I и J_i, $i\in I$, направленные, а для каждого $i\in I$ направленность $\check{x}_i=(x_{ik} : k\in J_i)$ удовлетворяет условию $L(\check{x}_i)\neq\varnothing$, то $L(\check{\xi})\subset L(\check{x})$ для направленности $\check{x}=\big(x_{\nu j_\nu} : (\nu,\, j)\in I\times\prod\limits_{i\in I} J_i\big)$, где $j_\nu=pr_\nu(j)$, и произвольной направленности $\check{\xi}=(\xi_i : i\in I)$, где $\xi_i\in L(\check{x}_i)$.

В топологическом пространстве $(X,\, L)$ множество пределов любой направленности $\check{x}=(x_i : i\in I)$ замкнуто и $L(\check{\xi})\subset L(\check{x})$ для любой направленности $\check{\xi}=(\xi_i : i\in I)$ точек $\xi_i\in L(\dot{x}_i)$.

В любом пространстве с операцией предела направленности операция замыкания обладает свойствами

1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$; 2) $M\subset\overline{M}$; 3) $\overline{M\cup G}=\overline{M}\cup\overline{G}$; 4) $\overline{(\overline{M})}=\overline{M}$.

Обратно, если отображение $M\mapsto\overline{M}$ множества 2^X в себя обладает свойствами 1)—4), то оно является операцией замыкания в некотором (притом единственном) топологическом пространстве $(X,\, L)$.

Операция однозначного предела направленности может не быть топологической. Семейство $(V_x : x\in X)$ фильтров окрестностей в X определяет операцию однозначного предела направленности тогда и только тогда, когда любые две различные точки x и y из X имеют непересекающиеся окрестности $v_x\in V_x$ и $v_y\in V_y$.

Пространство с операцией предела направленности, состоящее из одной или двух точек, является топологическим. Однако есть нетопологическое пространство, состоящее из трех точек.

4. Подпространства. Прямое произведение пространств. Пусть X_1 — непустое подмножество в пространстве с операцией предела направленности (X, L), а $\mathcal{K}(X_1)$ — класс всех направленностей в X_1. Отображение $L_1 : \mathcal{K}(X_1) \to 2^{X_1}$, определенное равенством $L_1(\check{x}) = L(\check{x}) \cap X_1$, для всех $\check{x} \in \mathcal{K}(X_1)$, является операцией предела направленности в X_1. Пространство (X_1, L_1) называется подпространством пространства (X, L) и указывается записью $(X_1, L_1) \subset (X, L)$. Если $(U_x : x \in X)$ и $(U'_x : x \in X_1)$ — семейства полных систем окрестностей в пространстве (X, L) и его подпространстве (X_1, L_1) соответственно, то для каждого $x \in X_1$ система U'_x индуцируется в X_1 системой U_x. Топология τ всех открытых подмножеств пространства (X, L) индуцирует в X_1 топологию τ', которая содержится в топологии τ_1 всех открытых подмножеств подпространства (X_1, L_1). Однако если пространство (X, L) топологическое, то подпространство (X_1, L_1) тоже топологическое и $\tau' = \tau_1$. Если в (X, L) замыкание и квазизамыкание подмножества $M \subset X_1$ обозначить через $\overline{M}$ и M^+, а в (X_1, L_1) — через $\overline{(M)}_1$ и $(M)_1^+$, то $(M)_1^+ = M^+ \cap X_1$ и $\overline{(M)}_1 \subset \overline{M} \cap X_1$, причем если пространство (X, L) топологическое, то $\overline{(M)}_1 = \overline{M} \cap X_1$.

Пусть $((X_i, L_i) : i \in I)$ — семейство пространств с операцией предела направленности. В $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$ определим операцию предела направленности L следующим образом. Для любой направленности $\check{x} = (x^{(\alpha)} : \alpha \in A)$ в X и каждого $i \in I$ рассмотрим направленность $\check{x}_i = \big(x_i^{(\alpha)} : \alpha \in A\big)$ в X_i, где $x_i^{(\alpha)} = pr_i\big(x^{(\alpha)}\big)$. Положим

$$L(\check{x}) = \prod_{i \in I} L_i(\check{x}_i).$$

Для L используется запись

$$L = \prod_{i \in I} L_i.$$

Пространство (X, L) называется прямым произведением семейства пространств $((X_i, L_i) : i \in I)$ и записывается в виде

$$(X, L) = \prod_{i \in I} (X_i, L_i).$$

Операция предела направленности L может быть определена семейством систем окрестностей $(V_x : x \in X)$, где V_x — система всех $v \subset X$, представимых в виде $v = \prod\limits_{i \in I} u_i$, где u_i — окрестность точки $x_i = pr_i(x)$ в (X_i, L_i), причем $u_i = X_i$ для всех $i \in I$, кроме конечного числа значений. При этом в (X, L) полная система U_x окрестностей точки x есть фильтр, имеющий базу V_x. Фильтр U_x является произведением семейства фильтров $\bigl(U^{(i)}_{x_i} : i \in I\bigr)$, где $U^{(i)}_{x_i}$ — полная система окрестностей точки $x_i = pr_i(x)$ пространства (X_i, L_i).

Для семейства произвольных подмножеств $M_i \subset X_i$, $i \in I$, имеют место

$$(\prod_{i \in I} M_i)^+ = \prod_{i \in I} M_i^+, \qquad \overline{\prod_{i \in I} M_i} \subset \prod_{i \in I} \overline{M}_i.$$

Если все пространства (X_i, L_i), $i \in I$, топологические, то их прямое произведение (X, L) тоже топологическое, причем $\tau = \prod\limits_{i \in I} \tau_i$, где τ и τ_i — топологии всех открытых подмножеств пространств (X, L) и (X_i, L_i) соответственно. Кроме того, для семейства произвольных подмножеств $M_i \subset X_i$, $i \in I$, справедливо равенство

$$\overline{\prod_{i \in I} M_i} = \prod_{i \in I} \overline{M}_i.$$

Из указанных выше свойств топологического пространства с операцией предела направленности (X, L) следует, что его можно отождествить с пространством с топологией (X, τ), где τ — топология всех открытых подмножеств пространств (X, L). Это означает, что теория топологических пространств с операцией предела направленности эквивалентна общей топологии.

5. Отношение квазиравномерности. Полная система окружений. Пусть $\mathcal{K}(X \times X)$ — класс всех направленностей в $X \times X$, а V — некоторая система окружений в $X \times X$, т. е. система подмножеств $\mathrm{v} \subset X \times X$, содержащих диагональ $\Delta(X)$. С помощью системы окружений V определим подкласс $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}(X \times X)$, называемый структурой квазиравномерности на X и состоящий из тех направленностей в $X \times X$, каждая из которых почти вся лежит в каждом $\mathrm{v} \in V$. Каждой направленности $\check{\zeta} = (\zeta_i : i \in I)$ из $\mathcal{S}$, где $\zeta_i = (x_i, y_i)$, сопоставим пару $(\check{x}, \check{y})$ направленностей $\check{x} = (x_i : i \in I)$ и $\check{y} = (y_i : i \in I)$ в X и полученный класс этих пар обозначим через $\mathfrak{R}$. Подкласс $\mathfrak{R} \subset \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X)$ определяет в $\mathcal{K}(X)$ рефлексивное бинарное отношение, называемое отношением квазиравномерности. Исходную систему окружений V расширим с сохранением отношения квазиравномерности $\mathfrak{R}$ (или структуры квазиравномерности $\mathcal{S}$) и полученную сильнейшую систему U назовем полной системой окружений, соответствующей отношению квазиравномерности $\mathfrak{R}$ (или структуре квазиравномерности $\mathcal{S}$). Система U совпадает с фильтром в $X \times X$, имеющим предбазу V. Следовательно, всякий фильтр подмножеств произведения $X \times X$, содержащих $\Delta(X)$, может служить полной системой окружений, соответствующей некоторому отношению квазиравномерности в $\mathcal{K}(X)$.

Подкласс $\mathcal{S} \subset \mathcal{K}(X \times X)$ является структурой квазиравномерности на X тогда и только тогда, когда

1) $\dot{\zeta} \in \mathcal{S}$ для каждого $\zeta \in \Delta(X)$;

2) если $\check{\zeta} \in \mathcal{S}$ и $\check{\zeta}' \prec \check{\zeta}$, то $\check{\zeta}' \in \mathcal{S}$;

3) если $\check{\zeta} \in \mathcal{K}(X \times X) \backslash \mathcal{S}$, то существует такое $\check{\zeta}' \prec \check{\zeta}$, что $\mathcal{S} \cap \mathcal{K}([\check{\zeta}']) = \varnothing$.

Полная система окружений U, соответствующая структуре квазиравномерности $\mathcal{S}$, есть множество таких подмножеств $\mathrm{u} \subset X \times X$, что $\mathcal{S} \cap \mathcal{K}((X \times X) \backslash \mathrm{u}) = \varnothing$.

Для пары $(\check{x}, \check{y})$ направленностей $\check{x} = (x_i : i \in I)$ и $\check{y} = (y_i : i \in I)$ в X обозначим $[(\check{x}, \check{y})] = \{(x_i, y_i) : i \in I\}$. Запись $(\check{x}', \check{y}') \prec \prec (\check{x}, \check{y})$ означает, что $\check{x}' \prec \check{x}$, $\check{y}' \prec \check{y}$ и поднаправленности $\check{x}'$, $\check{y}'$ имеют одну и ту же область определения.

Подкласс $\mathfrak{R} \subset \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X)$, состоящий из некоторых пар $(\check{x}, \check{y})$ направленностей $\check{x}$ и $\check{y}$ в X, имеющих одну и ту же область определения (своя для каждой пары), определяет в $\mathcal{K}(X)$ отношение квазиравномерности тогда и только тогда, когда

1) $(\dot{x}, \dot{x}) \in \mathfrak{R}$ для каждого $x \in X$;

2) если $(\check{x}, \check{y}) \in \mathfrak{R}$ и $(\check{x}', \check{y}') \prec (\check{x}, \check{y})$, то $(\check{x}', \check{y}') \in \mathfrak{R}$;

3) для каждой пары $(\check{x}, \check{y}) \notin \mathfrak{R}$ направленностей $\check{x}$ и $\check{y}$ в X, имеющих одну и ту же область определения, существует такое $(\check{x}', \check{y}') \prec (\check{x}, \check{y})$, что $(\check{\xi}, \check{\eta}) \notin \mathfrak{R}$ для любых направленностей $\check{\xi}$ и $\check{\eta}$ в X, имеющих одну и ту же область определения и удовлетворяющих включению $[(\check{\xi}, \check{\eta})] \subset [(\check{x}', \check{y}')]$.

Полная система окружений U, соответствующая отношению квазиравномерности $\mathfrak{R}$, есть множество таких $\mathrm{u} \subset X \times X$, что $(\check{\xi}, \check{\eta}) \notin \mathfrak{R}$ для любых направленностей $\check{\xi}$ и $\check{\eta}$ в X, имеющих одну и ту же область определения и удовлетворяющих включению $[(\check{\xi}, \check{\eta})] \subset (X \times X) \backslash \mathrm{u}$.

Из свойств 1) и 3) следует рефлексивность отношения $\mathfrak{R}$, т. е. принадлежность $(\check{x}, \check{x}) \in \mathfrak{R}$ для любого $\check{x} \in \mathcal{K}(X)$.

При помощи отношения квазиравномерности $\mathfrak{R}$ определим отображение $L:\mathcal{K}(X)\to 2^X$, считая, что $x\in L(\check{x})$ для $\check{x}\in\mathcal{K}(X)$, если $(\check{x},\,\dot{x})\in\mathfrak{R}$. Из свойств 1)—3) отношения $\mathfrak{R}$ следует, что L является операцией предела направленности в X. Пусть U — некоторая система окружений, определяющая отношение квазиравномерности $\mathfrak{R}$. Для каждого $x\in X$ рассмотрим систему $U_x=\{\mathrm{u}[x]_1:\mathrm{u}\in U\}$ подмножеств $\mathrm{u}[x]_1=\{y:(y,\,x)\in\mathrm{u}\}$ множества X. Если U_x принять как систему окрестностей точки x, то семейство $(U_x:x\in X)$ систем окрестностей определит в X операцию предела направленности L. При этом если U является полной системой окружений, соответствующей отношению $\mathfrak{R}$, то U_x является полной системой окрестностей точки x в пространстве $(X,\,L)$. Отметим, что всякая операция предела направленности в X может быть определена отношением квазиравномерности в $\mathcal{K}(X)$.

6. Отношение равномерности. Если отношение квазиравномерности, определенное подклассом $\mathfrak{R}\subset\mathcal{K}(X)\times\mathcal{K}(X)$, является отношением эквивалентности, т. е. дополнительно обладает свойствами симметричности и транзитивности, то оно называется отношением равномерности в $\mathcal{K}(X)$, а соответствующая структура квазиравномерности $\mathcal{S}\subset\mathcal{K}(X\times X)$ называется структурой равномерности на X. При этом пара $(X,\,\mathfrak{R})$ или $(X,\,\mathcal{S})$ называется пространством с равномерностью.

Если операция предела направленности L в X определена отношением равномерности, то пространство $(X,\,L)$ топологическое.

Фильтр U в $X\times X$ тогда и только тогда является полной системой окружений, соответствующей отношению равномерности, когда

1) каждое $\mathrm{u}\in U$ содержит $\Delta(X)$;

2) если $\mathrm{u}\in U$, то $\mathrm{u}^{-1}\in U$;

3) для каждого $\mathrm{u}\in U$ существует такое $\mathrm{v}\in U$, что $\mathrm{v}^2\subset\mathrm{u}$.

Это означает, что понятие пространства с равномерностью эквивалентно понятию равномерного пространства, рассматриваемому в общей топологии.

В пространстве с равномерностью $(X,\,\mathfrak{R})$, имеющем операцию предела направленности L, множество пределов любой сходящейся направленности $\check{x}=(x_i:i\in I)$ замкнуто, а каждая окрестность точки из $L(\check{x})$ является окрестностью для $L(\check{x})$, причем если $\check{x}'\prec\check{x}$, $\check{z}$ — направленность в $L(\check{x})$, а $\check{\xi}=(\xi_i:i\in I)$ — направленность точек $\xi_i\in L(\dot{x}_i)$, то $L(\check{x})=L(\check{x}')=L(\check{z})=L(\check{\xi})$. Множество пределов любых двух направленностей $\check{x}$ и $\check{y}$ либо не пересекаются, либо совпадают. Если $(\check{x}, \check{y}) \in \mathfrak{R}$, то $L(\check{x}) = L(\check{y})$. Обратно, если $L(\check{x}) = L(\check{y}) \neq \varnothing$ и эти направленности имеют одну и ту же область определения, то $(\check{x}, \check{y}) \in \mathfrak{R}$. Пересечение всех окрестностей точки $x \in X$ совпадает с $L(\dot{x})$.

Указанные свойства позволяют для пространства с равномерностью $(X, \mathfrak{R})$ ввести понятие фактор-пространства, являющегося хаусдорфовым пространством с равномерностью.

В пространстве $(X, \mathfrak{R})$ направленность $\check{x}$ называется направленностью Коши, если $(\check{x}', \check{x}'') \in \mathfrak{R}$ для любых поднаправленностей $\check{x}' \prec \check{x}$ и $\check{x}'' \prec \check{x}$, имеющих одну и ту же область определения. Пространство $(X, \mathfrak{R})$ называется полным, если в нем каждая направленность Коши сходится.

Вместе с направленностью $\check{x} = (x_i : i \in I)$ в X рассмотрим также направленность $\check{\zeta} = (\zeta_j : j \in J)$ в $X \times X$, где $J = I \times I$, а $\zeta_j = (x_{i'}, x_{i''})$ для $j = (i', i'')$. В пространстве с равномерностью $(X, \mathfrak{R})$ направленность $\check{x}$ является направленностью Коши тогда и только тогда, когда $\check{\zeta} \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ — соответствующая структура равномерности.

По аналогии с определениями 3.1, 3.16, 3.18 и 3.20 можно ввести понятия линейного пространства, группы, кольца и алгебры с операцией предела направленности. Однако эти понятия эквивалентны соответственно понятиям топологического векторного пространства, топологической группы, топологического кольца и топологической алгебры.

§ 2. Пространства с операцией предела фильтра

1. Операция предела фильтра. Полная система окрестностей точки. Теорию, эквивалентную теории пространств с операцией предела направленности, можно построить на основании понятия предела фильтра. Замена направленностей фильтрами упрощает теорию и позволяет обойтись без понятия класса (несмотря на это, теория пространств с операцией предела направленности удобнее для сравнения с теорией пространств с операцией предела последовательности). Понятия окрестности точки и предела фильтра совместно вводятся следующим образом. Пусть $\mathcal{F}(X)$ — множество всех фильтров в непустом множестве X. Исходя из семейства $(V_x : x \in X)$ некоторых систем окрестностей в X, введем понятие предела фильтра. Точка $x \in X$ называется пределом фильтра $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$ по системе V_x окрестностей точки x, если $V_x \subset \mathfrak{F}$. Сопоставляя каждому фильтру множество его пределов, получим отображение $L : \mathcal{F}(X) \to 2^X$, называемое операцией предела фильтра в X.

Пара (X, L) называется пространством с операцией предела фильтра. В исходном семействе $(V_x : x \in X)$ каждую систему V_x расширим с сохранением операции предела фильтра L и полученную сильнейшую систему U_x назовем полной системой окрестностей точки x пространства (X, L). Система U_x совпадает с фильтром в X, имеющим предбазу V_x.

Отображение $L : \mathcal{F}(X) \to 2^X$ является операцией предела фильтра в X тогда и только тогда, когда

1) $x \in L(\mathfrak{F}_x)$ для каждого $x \in X$, где $\mathfrak{F}_x$ — фильтр всех подмножеств в X, содержащих x;

2) $L(\mathfrak{F}) \subset L(\mathfrak{F}')$ для любых $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ из $\mathcal{F}(X)$;

3) $x \in L(U_x)$ для каждого $x \in X$, где $U_x = \bigcap\{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X) : x \in L(\mathfrak{F})\}$.

В пространстве с операцией предела фильтра (X, L) полная система окрестностей точки x есть фильтр $U_x = \bigcap\{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X) : x \in L(\mathfrak{F})\}$, а система всех окрестностей множества M есть фильтр $U_M = \bigcap\{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X) : M \cap L(\mathfrak{F}) \neq \varnothing\}$.

Заметим, что для фильтра $\mathfrak{F}$ в X и подмножества $M \subset X$ при $M \notin \mathfrak{F}$ существует фильтр $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$ в X, содержащий $X \backslash M$. Действительно, в качестев $\mathfrak{F}'$ можно взять фильтр, имеющий базу $\{A \backslash M : A \in \mathfrak{F}\}$. Используя это, легко доказать, что в указанных характеристических свойствах операции предела фильтра свойство 3) можно заменить следующим: для каждых $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$ и $x \in X \backslash L(\mathfrak{F})$ существует фильтр $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$ из $\mathcal{F}(X)$, содержащий такое $M \subset X$, что $x \notin L(\mathfrak{F}'')$ для любого $\mathfrak{F}'' \in \mathcal{F}(X)$, содержащего M. При этом в (X, L) полная система U_x окрестностей точки x состоит из таких $u \subset X$, что $x \notin L(\mathfrak{F})$ для любого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$, содержащего $X \backslash u$. Кроме того, множество v является окрестностью множества M тогда и только тогда, когда $M \cap L(\mathfrak{F}) = \varnothing$ для любого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$, содержащего $X \backslash v$.

В (X, L) точка x называется предельной точкой множества M, если $x \in L(\mathfrak{F})$ для некоторого $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$, содержащего $M \backslash \{x\}$.

В пространстве с операцией предела фильтра понятия открытого множества, замкнутого множества, точки накопления множества, замыкания и квазизамыкания множества вводятся таким же образом, как в пространстве с операцией предела направленности. Аналогично определяется также понятие топологического пространства с операцией предела фильтра.

Пространство (X, L) топологическое тогда и только тогда, когда для каждых $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$ и $x \in X \backslash L(\mathfrak{F})$ существует фильтр

$\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$ из $\mathcal{F}(X)$, содержащий такое множество M, что $x \notin \overline{M}$. Значит, отображение $L: \mathcal{F}(X) \to 2^X$ является топологической операцией предела фильтра в X тогда и только тогда, когда

1) $x \in L(\mathfrak{F}_x)$ для каждого $x \in X$, где $\mathfrak{F}_x$ — фильтр всех подмножеств в X, содержащих x;

2) $L(\mathfrak{F}) \subset L(\mathfrak{F}')$ для любых $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}'$ из $\mathcal{F}(X)$;

3) для каждых $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$ и $x \in X \setminus L(\mathfrak{F})$ существует фильтр $\mathfrak{F}' \supset \mathfrak{F}$ из $\mathcal{F}(X)$, содержащий такое $M \subset X \setminus \{x\}$, что $L(\mathfrak{F}'') \subset M$ для любого $\mathfrak{F}'' \in \mathcal{F}(X)$, содержащего M.

В (X, L) множество S_x всех фильтров, сходящихся к точке $x \in X$, называется структурой сходимости фильтров к x, а семейство $(S_x : x \in X)$ называется структурой сходимости фильтров в X. Очевидно, $S_x = \{\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X) : x \in L(\mathfrak{F})\}$, $x \in X$, и $L(\mathfrak{F}) = \{x \in X : \mathfrak{F} \in S_x\}$, $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X)$, а полная система окрестностей точки x есть фильтр $U_x = \bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in S_x} \mathfrak{F}$.

Для точки $x \in X$ подмножество $S_x \subset \mathcal{F}(X)$ является структурой сходимости фильтров к x тогда и только тогда, когда

1) $\mathfrak{F}_x \in S_x$, где $\mathfrak{F}_x$ — фильтр всех подмножеств в X, содержащих x;

2) из $\mathfrak{F} \in S_x$ и $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}' \in \mathcal{F}(X)$ следует, что $\mathfrak{F}' \in S_x$;

3) $\left(\bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in S_x} \mathfrak{F}\right) \in S_x$.

Семейство $(S_x : x \in X)$ подмножеств $S_x \subset \mathcal{F}(X)$ тогда и только тогда является структурой сходимости фильтров в X, соответствующей топологической операции предела фильтра, когда S_x для каждого $x \in X$ обладает свойствами 1)—3) и, кроме того, для каждого $M \in \bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in S_x} \mathfrak{F}$ существует такое $G \subset M \setminus \{x\}$, что $G \in \bigcap\limits_{\mathfrak{F} \in S_y} \mathfrak{F}$ для любого $y \in G$.

2. Структуры квазиравномерности и равномерности. Полная система окружений. Пусть $\mathcal{F}(X \times X)$ — множество всех фильтров в $X \times X$, а V — некоторая система окружений в $X \times X$. При помощи V определим подмножество $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}(X \times X)$, называемое структурой квазиравномерности на X и состоящее из таких $\mathfrak{F} \in \mathcal{F}(X \times X)$, что $V \subset \mathfrak{F}$. Исходную систему окружений V расширим с сохранением структуры квазиравномерности $\mathcal{S}$ и полученную сильнейшую систему U назовем полной системой окружений, соответствующей структуре квазиравномерности $\mathcal{S}$. Система U совпадает с фильтром в $X \times X$, имеющим предбазу V.

Подмножество $\mathcal{S}\subset\mathcal{F}(X\times X)$ является структурой квазиравномерности на X тогда и только тогда, когда

1) $\mathfrak{F}_\zeta\in\mathcal{S}$ для каждого $\zeta\in\Delta(X)$, где $\mathfrak{F}_\zeta$ — фильтр всех подмножеств в $X\times X$, содержащих ζ;

2) если $\mathfrak{F}\in\mathcal{S}$ и $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{F}'\in\mathcal{F}(X\times X)$, то $\mathfrak{F}'\in\mathcal{S}$;

3) $\big(\bigcap\limits_{\mathfrak{F}\in\mathcal{S}}\mathfrak{F}\big)\in\mathcal{S}$.

Полная система окружений, соответствующая структуре квазиравномерности $\mathcal{S}$, есть фильтр $U=\bigcap\limits_{\mathfrak{F}\in\mathcal{S}}\mathfrak{F}$.

Свойство 3) можно заменить следующим: для каждого $\mathfrak{F}\in$ $\in\mathcal{F}(X\times X)\setminus\mathcal{S}$ существует фильтр $\mathfrak{F}'\supset\mathfrak{F}$ в $X\times X$, содержащий такое множество H, что $\mathfrak{F}''\notin\mathcal{S}$ для любого $\mathfrak{F}''\in\mathcal{F}(X\times X)$, содержащего H. При этом полная система окружений U, соответствующая структуре квазиравномерности $\mathcal{S}$, состоит из таких подмножеств $\mathrm{u}\subset X\times X$, что $\mathcal{S}\cap\mathcal{F}((X\times X)\setminus\mathrm{u})=\varnothing$.

При помощи структуры квазиравномерности $\mathcal{S}$ на X определим отображение $L\colon\mathcal{F}(X)\to 2^X$, считая, что $x\in L(\mathfrak{F})$ для $\mathfrak{F}\in\mathcal{F}(X)$, если $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}_x\in\mathcal{S}$, где $\mathfrak{F}_x$ — фильтр всех подмножеств в X, содержащих x. Отображение L является операцией предела фильтра в X. Всякая операция предела фильтра в X может быть определена структурой квазиравномерности.

Для $\mathfrak{F}\in\mathcal{F}(X\times X)$ обозначим $\mathfrak{F}^{-1}=\{H^{-1}:H\in\mathfrak{F}\}\in\mathcal{F}(X\times X)$. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — такие фильтры в $X\times X$, что $A\circ B\neq\varnothing$ для любых $A\in\mathfrak{F}_1$ и $B\in\mathfrak{F}_2$. Тогда система $\{A\circ B: A\in\mathfrak{F}_1,\ B\in\mathfrak{F}_2\}$ является базой некоторого фильтра в $X\times X$, обозначаемого через $\mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}_2$. Для непустого подмножества $\mathcal{S}\subset\mathcal{F}(X\times X)$ обозначим $\mathcal{S}^{-1}=\{\mathfrak{F}^{-1}:\mathfrak{F}\in\mathcal{S}\}$ и

$$\mathcal{S}\circ\mathcal{S}=\{\mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}_2:\mathfrak{F}_1\in\mathcal{S},\ \mathfrak{F}_2\in\mathcal{S}\ \text{ и существует }\ \mathfrak{F}_1\circ\mathfrak{F}_2\}.$$

Если структура квазиравномерности $\mathcal{S}\subset\mathcal{F}(X\times X)$ обладает свойствами $\mathcal{S}^{-1}=\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}\circ\mathcal{S}=\mathcal{S}$, то она называется структурой равномерности на X. При этом пара $(X,\,\mathcal{S})$ называется пространством с равномерностью.

Если операция предела фильтра L в X определена структурой равномерности, то пространство $(X,\,L)$ топологическое.

Фильтр U в $X\times X$ тогда и только тогда является полной системой окружений, соответствующей структуре равномерности, когда он удовлетворяет условиям 1)—3), указанным в § 1, n° 6.

В пространстве с равномерностью $(X,\,\mathcal{S})$ фильтр $\mathfrak{F}\in\mathcal{F}(X)$ называется фильтром Коши, если $\mathfrak{F}\times\mathfrak{F}\in\mathcal{S}$. Пространство $(X,\,\mathcal{S})$ называется полным, если в нем каждый фильтр Коши сходится.

§ 3. Сравнение теорий пространств с операцией предела последовательности и пространств с операцией предела направленности или фильтра

Операции замыкания и квазизамыкания в пространстве с операцией предела последовательности являются частными случаями операций замыкания и квазизамыкания в пространстве с операцией предела направленности или фильтра. Несмотря на это, теория пространств с операцией предела последовательности не является частной по отношению к теории пространств с операцией предела направленности или фильтра. Причина этого частично заключается в понятиях подпространства и прямого произведения пространств. В этих теориях различны способы распространения операции замыкания на подпространство и на прямое произведение пространств. Поясним сказанное и рассмотрим пример.

Если отображение $L:\mathcal{K}(X)\to 2^X$ является операцией предела направленности в множестве X, то его сужение $L|_{X^{\mathbb{N}}} = \Lambda : X^{\mathbb{N}}\to 2^X$ является операцией предела последовательности в X. Обратно, любая операция предела последовательности Λ в X есть сужение на $X^{\mathbb{N}}$ некоторой (вообще говоря, неединственной) операции предела направленности L в X.

Пусть $(U_x : x\in X)$ — семейство полных систем окрестностей пространства с операцией предела последовательности $(X,\,\Lambda)$. При помощи этого семейства систем окрестностей определим в X операцию предела направленности L. Тогда $\Lambda = L|_{X^{\mathbb{N}}}$, а $(U_x : x\in X)$ является также семейством полных систем окрестностей пространства $(X,\,L)$. Кроме того, L является сильнейшей операцией предела направленности в X, имеющей сужение Λ на $X^{\mathbb{N}}$. Для топологического пространства $(X,\,\Lambda)$ пространство $(X,\,L)$ может не быть топологическим. Оно топологическое тогда и только тогда, когда $(X,\,\Lambda)$ — пространство Фреше–Урысона. Пространства $(X,\,\Lambda)$ и $(X,\,L)$ имеют одну и ту же операцию квазизамыкания, а следовательно, и операцию замыкания. Однако эти пространства нельзя отождествить, поскольку в прямых произведениях $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda}) = (X,\,\Lambda)^{\nu}$ и $(\widetilde{X},\,\widetilde{L}) = (X,\,L)^{\nu}$, где $\nu\geqslant 2$ — некоторая мощность, $\widetilde{L}$ может не быть сильнейшей операцией предела направленности, для которой $\widetilde{\Lambda} = \widetilde{L}|_{\widetilde{X}^{\mathbb{N}}}$, даже если $(X,\,\Lambda)$ — пространство Фреше–Урысона. Другими словами, пространства $(\widetilde{X},\,\widetilde{\Lambda})$ и $(\widetilde{X},\,\widetilde{L})$ могут иметь различные операции квазизамыкания.

Пусть τ — секвенциальная топология топологического пространства с операцией предела последовательности (X, Λ), а L — операция предела направленности в X, определенная топологией τ. Тогда $\Lambda = L|_{X^{\mathbb{N}}}$, а пространство (X, L) топологическое. Пространства (X, Λ) и (X, L) имеют одну и ту же операцию замыкания, хотя они могут иметь различные операции квазизамыкания. Есть и другие причины, не позволяющие отождествить эти пространства, а именно: подпространства $(X_1, \Lambda_1) \subset \subset (X, \Lambda)$ и $(X_1, L_1) \subset (X, L)$ могут иметь различные операции замыкания, если, конечно, (X, Λ) не является пространством Фреше–Урысона. Если же (X, Λ) — пространство Фреше–Урысона, то могут отличаться операции замыкания в прямых произведениях $(X, \Lambda)^\nu$ и $(X, L)^\nu$, где $\nu \geqslant 2$ — некоторая мощность. Это означает также, что топологическое пространство с операцией предела последовательности (X, Λ), имеющее секвенциальную топологию τ, вообще говоря, нельзя отождествить с пространством с топологией (X, τ).

Таким образом, пространства (X, Λ) и (X, L), независимо от совпадения их операций замыкания или квазизамыкания, нужно рассматривать как различные пространства. То, что понятие направленности обобщает понятие последовательности, говорит лишь о том, что операция предела последовательности является сужением некоторой операции предела направленности. Однако сужение отображения не является частным случаем этого отображения. Итак, теории пространств с операцией предела последовательности и пространств с операцией предела направленности или фильтра не сравнимы с точки зрения общности, и их нужно рассматривать как различные теории.

В отличие от пространства с операцией предела направленности (X, L), в пространстве с операцией предела последовательности (X, Λ) вместо отображения L фиксируется его сужение Λ и тем самым дается некоторая свобода отображению L. Всякая операция предела направленности в X, сужение которой на $X^{\mathbb{N}}$ есть данная операция предела последовательности Λ, может быть использована для расширения классификаций точек, множеств и функций в пространстве (X, Λ). Другими словами, в теории пространств с операцией предела последовательности для расширения классификаций точек, множеств и функций может быть использовано произвольное семейство фильтров окрестностей. Теорема Тихонова о компактности множества в прямом произведении и ее применения, а также замечание 1.11 уже показывают важность такого расширения понятий. Понятия, введенные при помощи произвольного семейства фильтров окрестностей, могут быть исследованы также в отдельной теории, которая есть теория пространств с операцией предела направленности или фильтра. В указанном смысле теория пространств с операцией предела направленности или фильтра может быть включена в теорию пространств с операцией предела последовательности.

Рассмотрим пример. Пусть lim и Lim — операции предела последовательности и направленности соответственно, определенные в $\mathbb{R}$ системой всех открытых промежутков. Пространство $(\mathbb{R}, \lim)$ и прямое произведение $(X, \lambda) = (\mathbb{R}, \lim)^{\mathbb{R}}$ сравним с $(\mathbb{R}, \mathrm{Lim})$ и $(X, L) = (\mathbb{R}, \mathrm{Lim})^{\mathbb{R}}$. Ясно, что X есть множество всех функций $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Операция предела последовательности λ в X соответствует поточечной сходимости на $\mathbb{R}$ последовательности функций. Секвенциальную топологию пространства (X, λ) обозначим через τ, а топологию всех открытых подмножеств пространства с операцией предела направленности (X, L) — через τ^*. Пусть τ_0 — секвенциальная топология пространства $(\mathbb{R}, \lim)$, которая является также топологией всех открытых подмножеств пространства $(\mathbb{R}, \mathrm{Lim})$. В каждом из пространств $(\mathbb{R}, \lim)$ и $(\mathbb{R}, \mathrm{Lim})$ операции замыкания и квазизамыкания совпадают, причем эти пространства имеют одну и ту же операцию замыкания. В пространстве (X, λ) операция замыкания отличается от операции квазизамыкания. Поскольку (X, L) — топологическое пространство с операцией предела направленности, в нем операции замыкания и квазизамыкания совпадают. Уже ясно, что пространства (X, λ) и (X, L) различны, хотя λ есть сужение операции предела направленности L на множестве всех сходящихся последовательностей функций и может быть определена каждой из топологий τ и τ^*. Эти пространства имеют различные операции замыкания, т. е. $\tau \neq \tau^*$. Действительно, $\tau^* = \tau_0^{\mathbb{R}}$ и, значит, в (X, L) фундаментальной системой окрестностей произвольного $x \in X$ служит система V_x^* множеств

$$v_x^* = v_x^*(n, \varepsilon; r_1, r_2, \ldots, r_n) =$$

$$= \{y \in X : |y(r_k) - x(r_k)| < \varepsilon,\ k = 1, 2, \ldots, n\},$$

где $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ и $r_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные числа. Рассмотрим подмножество $M \subset X$ тех функций, которые отличны от нуля лишь на конечном или счетном множестве (своем для каждой функции). Множество M замкнуто в (X, λ), а в (X, L) его замыкание есть X. Тем самым $\tau^* \subset \tau$, $\tau^* \neq \tau$ и, значит, пространства $(\mathbb{R}, \lim)$ и $(\mathbb{R}, \mathrm{Lim})$ нельзя отождествить.

ДОБАВЛЕНИЕ

В этом разделе исследуется причина появления известных парадоксов в интуитивной теории множеств и обсуждаются некоторые вопросы, связанные с формализацией теории множеств (излагается содержание работы автора [72]).

В интуитивной теории множеств из каких-то объектов образуются множества (совокупности объектов), которые принимаются за объекты. Затем из имеющихся объектов образуются множества, которые, в свою очередь, принимаются за объекты и т. д. Докажем, что процесс образования множеств является незавершаемым, т. е. после образования какой угодно совокупности множеств можно образовать новое множество (ниже мы приведем дополнительное пояснение относительно понятия незавершаемого процесса).

Пустое множество обозначим символом $\varnothing$, а множество всех подмножеств множества X — через 2^X. Объединение и пересечение совокупности множеств Y обозначим через $\cup Y$ и $\cap Y$ соответственно (считается $\cup\varnothing = \varnothing$, а $\cap\varnothing$ не определяется).

Теорема 1. *Пусть X — множество. Тогда $2^X \notin 2^X$.*

◀ Предположим $2^X \in 2^X$. Тогда $2^X \subset X$. Обозначим через S множество тех элементов из 2^X, каждый из которых не является своим элементом. Так как $S \subset 2^X \subset X$, то $S \in 2^X$. В силу этого, соотношения $S \in S$ и $S \notin S$ могут выполняться лишь одновременно. Но это противоречие. Поэтому $2^X \notin 2^X$. ▶

Аналогично доказывается более общая

Теорема 2. *Пусть Y — такая совокупность множеств, что $2^y \subset Y$ для каждого $y \in Y$. Тогда $Y \notin Y$.*

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть Y — некоторая совокупность множеств, а $X = \cup Y$. Тогда $Y \subset 2^X$ и, значит, $2^X \notin Y$.*

Следствие 1 показывает, что процесс образования множеств является незавершаемым, а выражение "все множества" — бессмысленным. Оно опровергает укоренившееся представление о том, что процесс образования множеств является завершаемым (т. е. все множества могут быть образованы), а появление в интуитивной теории множеств известных парадоксов связано с самим интуитивным понятием множества (по этому поводу см. [15], с. 332–341; [34], с. 17–55; [39], с. 39–63; [40], с. 224; [55], с. 357; [73], с. 348–350). На самом деле причина появления этих парадоксов заключается в неправильном представлении о характере процесса образования множеств. При восприятии процесса образования множеств как незавершаемого процесса (с учетом также доказанной ниже теоремы 5) интуитивная теория множеств становится свободной от парадоксов Рассела, Кантора и Бурали–Форти (тем самым эти парадоксы перестают быть препятствием для построения теории множеств на интуитивной основе (см. [48], с. 14)).

Объект, который используется при образовании множеств и интуитивно не воспринимается как множество, удобно формально считать множеством, таким, что оно само является единственным своим элементом. Его будем называть *атомом* (пустое множество также является формально введенным понятием). Итак, атом есть такое множество a, что $a \in a$ и $b \notin a$ при $b \neq a$. Это понятие атома отличается от используемого в теории множеств понятия с таким же названием (см. [32], с. 122). С введением понятия атома каждый элемент множества становится множеством, а каждое множество Y становиться совокупностью множеств и к нему применимы обозначения $\cup Y$ и $\cap Y$. Подмножествами атома a являются только a и $\varnothing$, причем $\cup a = \cap a = a$. Теорема 2 и следствие 1 верны также для совокупности Y, среди элементов которой имеются атомы.

Для множества, состоящего только из элемента x, используется запись $\{x\}$, а множество, состоящее только из элементов x и y, принято записывать в виде $\{x, y\}$ и называть *неупорядоченной парой.* При этом считается $\{x, x\} = \{x\}$. Очевидно, множество a является атомом тогда и только тогда, когда $\{a\} = a$. *Упорядоченной парой* (x, y) называется множество $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Ясно, что $(x, x) = \{\{x\}\}$, а для атома a имеют место равенства $(a, y) = \{a, \{a, y\}\}$ и $(a, a) = a$. Если $z = (x, y)$, то $x = \cup \cap z = \cap \cap z$ и $y = (\cap \cup z) \cup ((\cup \cup z) \setminus \cup \cap z)$. Это определение упорядоченной пары было предложено Куратовским (см. [48], с. 67). В [15] также под упорядоченной парой понимается множество, но не уточняется какое именно, и требуется лишь, чтобы из $(x, y) = (u, v)$ следовало $x = u$ и $y = v$.

Если множество x не является атомом, то будем считать $x \notin y$ для каждого $y \in x$ и, значит, $x \notin x$. Это соглашение вполне соответствует интуитивному понятию множества. В силу принятого соглашения отношение "$\in$ или $=$" рефлексивно и антисимметрично. Отметим, что для построения теории множеств наличие атомов необязательно (в качестве исходного объекта можно взять только $\varnothing$).

Поскольку мы не исключаем наличие атомов, считаем нужным привести определения ординала (порядкового числа) и кардинала (кардинального числа) способом, предложенным фон-

Нейманом (см. [37], с. 343–360; [44], с. 109–129; [48], с. 271).

Множество x называется *транзитивным*, если $y \subset x$ для каждого $y \in x$.

Очевидно, атом является транзитивным множеством.

Определение 1. *Множество называется ординалом, если оно транзи- тивно, не содержит атомов и вполне упорядочено отношением "$\in$ или $=$".*

Ординалами являются, например, множества $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, а также их совокупность и т. д. Если x — ординал, то $x \cup \{x\}$ — тоже ординал. Если x — ординал и $y \in x$, то y — тоже ординал и $y \subset x$. Если x и y — ординалы, то выполняется одно и только одно из соотношений $x = y$, $x \in y$, $y \in x$. Если x и y — ординалы и $y \subset x$, то выполняется одно и только одно из соотношений $x = y$, $y \in x$.

Для вполне упорядоченных множеств X и Y говорят, что X *изоморфно* Y, если существует сохраняющее порядок взаимно однозначное отображение множества X на Y (считается, что $\varnothing$ изоморфно себе).

Доказательства следующей теоремы и указанных выше свойств ординалов можно найти в [44], с. 102–123.

Теорема 3. *Каждое вполне упорядоченное множество изоморфно некоторому, притом единственному, ординалу.*

Говорят, что множество X *равномощно* множеству Y, если существует взаимно однозначное отображение множества X на Y (считается, что $\varnothing$ равномощно себе). Будем говорить, что непустое множество X *мощнее* множества Y, если невозможно взаимно однозначно отобразить X в Y (не исключается $Y = \varnothing$).

Определение 2. *Кардинал есть ординал, который мощнее каждого своего элемента ($\varnothing$ считается кардиналом).*

В [15] кардинал определяется как привилегированный представитель среди равномощных множеств без уточнения, какой из них считать привилегированным (такое понятие кардинала и рассмотренное в [15] понятие упорядоченной пары могут быть содержательными только при наличии всех множеств).

С использованием теоремы 3 и теоремы Цермело о полном упорядочении легко доказывается

Теорема 4. *Каждое множество X равномощно некоторому, притом единственному, кардиналу, называемому мощностью множества X и обозначаемому через $card(X)$.*

Процесс образования кардиналов, а значит, и ординалов является незавершаемым. Это доказывается при помощи рассуждений, приводящих к парадоксам Кантора и Бурали–Форти (теорема 1 также была доказана при помощи рассуждений, приводящих к парадоксу Рассела). А именно, справедлива

Теорема 5. *Пусть Y — некоторая совокупность множеств, а $X = \cup Y$. Тогда $card(y) \in card(2^X)$ для каждого $y \in Y$ и, значит, $card(2^X) \notin Y$.*

◀ По теореме Кантора, 2^X мощнее X. Если $y \in Y$, то $y \subset X$ и, следовательно, 2^X мощнее y. Отсюда вытекают утверждения теоремы. ▶

Легко доказывается также

Теорема 6. *Пусть Y — некоторая совокупность ординалов, а $X = \cup Y$. Тогда X и $X \cup \{X\}$ являются ординалами, причем $Y \subset X \cup \{X\}$ и, значит, $X \cup \{X\} \notin Y$.*

Внесем теперь некоторое уточнение в понятие незавершаемого процесса. Процесс, описываемый при помощи шагов, называется бесконечным, если после совершения какого угодно конечного количества шагов можно сделать еще один шаг. С точки зрения каких-то количеств процесс считается незавершаемым, если после совершения какого угодно находящегося в рассмотрении количества шагов можно сделать еще один шаг, иначе процесс считается завершаемым. Ясно, что понятие незавершаемого процесса носит относительный характер и зависит от количеств, с точки зрения которых рассматривается процесс. Например, процесс построения натуральных чисел с точки зрения конечных количеств (т. е. количеств, определяемых натуральными числами) является незавершаемым и ему невозможно приписать окончательный результат, являющийся натуральным числом (не имеет смысла говорить о натуральном числе всех натуральных чисел). Однако этот процесс определяет бесконечное (а именно, счетное) количество, с точки зрения которого процесс становится завершаемым и его окончательным результатом является множество всех натуральных чисел. Возможность завершения бесконечного процесса (т. е. существование бесконечного множества) мы должны принять, чтобы избежать парадоксов, которые могут возникнуть в математическом пространственно-временном представлении движения. К этому вопросу относится пример древнегреческого философа Зенона о преследовании Ахиллом черепахи. В начальный момент Ахилл находится в точке A_0, а черепаха — в точке A_1. Когда Ахилл доходит до точки A_1, черепаха будет находиться в точке A_2 прямой A_0A_1 и т. д. Догнав черепаху, Ахилл совершает бесконечное количество таких шагов. В этом примере мы имеем дело с завершаемым бесконечным процессом, так как в результате бесконечного количества шагов Ахилл и черепаха будут находиться в одной точке, а тогда невозможно сделать еще один шаг указанного типа. В связи с примером Зенона заметим, что математика дает средства для построения и исследования в мышлении моделей реального мира. При этом не важно, есть ли в природе бесконечные процессы, а важно, чтобы соответствовали реальности окончательные результаты бесконечных процессов, рассматриваемых в мышлении. Один и тот же объект может быть представлен в мышлении по разному. Например, число 1 может быть воспринято и как результат конечного процесса, и как результат бесконечного процесса ($1 = 0,9\ldots$). Сторона и диагональ квадрата не соизмеримы и, значит, диагональ является по отношению к стороне результатом бесконечного процесса (так определяется иррациональное число $\sqrt{2}$). Понятие незавершаемого процесса нужно различать от понятия бесконечного процесса, так как их отождествление приводит в мышлении к парадоксу Зенона. При этом не всякий бесконечный процесс может быть принят в рамках интуитивного восприятия как завершаемый процесс, ибо это приводит к парадоксу Рассела. Множество выражает также смысл количества (конечного или бесконечного). Следствие 1 показывает, что с точки зрения количеств, определяемых множествами, процесс образования множеств является незавершаемым и ему невозможно приписать окончательный результат, являющийся множеством (не имеет смысла говорить о множестве всех множеств). Этот процесс определяет количество, которое не укладывается в рамки интуитивного восприятия, а с точки зрения такого количества процесс образования множеств является завершаемым. При помощи введения понятия *класса* как окончательного результата процесса построения объектов процессу образования множеств можно приписать окончательный результат, называемый классом всех множеств. Можно также считать, что понятие множества является обобщением понятия натурального числа, а понятие класса — обобщением понятия множества. Удобно истолковывать класс как объект, указывающий на некоторое свойство. Например, под классом всех множеств можно понимать объект, указывающий на свойство "быть множеством". Образно говоря, класс всех множеств есть само понятие множества, а понятие множества не является множеством, причем множество есть класс, который представляется в рамках интуитивного восприятия как окончательный результат завершаемого процесса и выражает смысл собрания (коллекции). В связи с этим отметим, что понятие натурального числа есть класс всех натуральных чисел, который считается множеством. Уточним еще, что выражение "имеются объекты"понимается в смысле "имеется множество объектов", а при использовании последнего выражения понимается также, что имеются все объекты, принадлежащие этому множеству. Однако при использовании выражения "имеется класс объектов", вообще говоря, нельзя понимать, что имеются все объекты, принадлежащие этому классу. В частности, говоря о классе всех множеств, нельзя считать, что имеются все множества. В отличие от класса, для множества всегда считается возможным определить, принадлежит ли ему данный объект и выполняется ли данное условие, относящееся к его элементам. Иначе говоря, в множестве действует закон исключенного третьего с оговоркой, чтобы нарушение этого закона было воспринято как требование дополнительного уточнения интуитивного понятия множества. Можно сказать, что причиной появления в интуитивной теории множеств известных парадоксов является отождествление понятий множества (совокупности) и класса.

При обсуждении некоторых вопросов нам понадобится

Определение 3. *Замкнутой совокупностью будем называть всякое множество $\mathcal{K}$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) если $x \in \mathcal{K}$, то $x \subset \mathcal{K}$ (т. е. $\mathcal{K}$ транзитивно);

2) если $x \in \mathcal{K}$, то $2^x \in \mathcal{K}$;

3) если $x \in \mathcal{K}$ и $y \in \mathcal{K}$, то $\{x, y\} \in \mathcal{K}$;

4) если $x \in \mathcal{K}$, то $\cup x \in \mathcal{K}$.

Замкнутой совокупностью считается также $\varnothing$. Пересечение непустого множества замкнутых совокупностей есть замкнутая совокупность.

Teorema 7. *Каждое множество S является подмножеством некоторой замкнутой совокупности $\mathcal{K}$.*

◀ Последовательно строим множества S_1, S_2, ... следующим образом. Положим $S_1 = S$. Если для натурального числа n множество S_n построено, то в качестве S_{n+1} возьмем множество всех z, удовлетворяющих хотя бы одному из условий: $z \in S_n$; $z \in x$ для некоторого $x \in S_n$; $z = 2^x$ для некоторого $x \in S_n$; $z = \{x, y\}$ для некоторых $x \in S_n$ и $y \in S_n$; $z = \cup x$ для некоторого $x \in S_n$. Легко видеть, что требуемой замкнутой совокупностью является множество $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. ▶

Следствие 2. *Для каждого множества S существует наименьшая замкнутая совокупность, для которой S является подмножеством.*

◀ Пусть $\mathcal{K}$ — некоторая замкнутая совокупность, такая, что $S \subset \mathcal{K}$. Рассмотрим подмножества $\mathcal{K}$, каждое из которых является замкнутой совокупностью и содержит S как подмножество. Пересечение всех этих совокупностей является искомым. ▶

Нетрудно убедиться, что построенная в доказательстве теоремы 7 замкнутая совокупность $\mathcal{K}$ является наименьшей замкнутой совокупностью, содержащей S как подмножество.

Следствие 3. *Для каждого множества X существует наименьшая замкнутая совокупность, содержащая X как элемент.*

◀ Наименьшая замкнутая совокупность $\mathcal{K}$, для которой $\{X\} \subset \mathcal{K}$, является искомой. ▶

Легко проверить справедливость следующей теоремы.

Теорема 8. *Если множество X транзитивно, то 2^X также транзитивно, а наименьшая замкнутая совокупность $\mathcal{K}$, содержащая X как элемент, определяется равенством $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $A_1 = X$ и $A_{n+1} = 2^{A_n}$ для каждого натурального числа n.*

Теорема 9. *Пусть $\mathcal{K}$ — замкнутая совокупность. Тогда $\cup\mathcal{K} = \mathcal{K}$, $\mathcal{K} \notin \mathcal{K}$ (т. е. $\mathcal{K}$ не является атомом), $card(\mathcal{K}) \notin \mathcal{K}$ и $card(x) \in card(\mathcal{K})$ для каждого $x \in \mathcal{K}$, а, значит, $card(x) \in \mathcal{K}$ при $card(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.*

◀ Пусть $x \in \mathcal{K}$. Так как $x \subset \mathcal{K}$, то $\cup\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$. В силу $2^x \in \mathcal{K}$ и $x \in 2^x$ получаем $x \in \cup\mathcal{K}$ и, значит, $\mathcal{K} \subset \cup\mathcal{K}$. Поэтому $\cup\mathcal{K} = \mathcal{K}$. Очевидно, для $\mathcal{K}$ выполняется условие теоремы 2 и, следовательно, $\mathcal{K} \notin \mathcal{K}$. Если предположить $y = card(\mathcal{K}) \in \mathcal{K}$, то в силу $2^y \subset \mathcal{K}$ будем иметь $card(2^y) \subset y$, что приводит к противоречию, так как, по теореме Кантора, $y \subset card(2^y)$ и $y \neq card(2^y)$. Следовательно, $card(\mathcal{K}) \notin \mathcal{K}$. Из $2^x \subset \mathcal{K}$ вытекает $card(2^x) \subset card(\mathcal{K})$, а, по теореме Кантора, $card(x) \in card(2^x)$. Поэтому $card(x) \in \in card(\mathcal{K})$. ▶

Пусть $\mathcal{K}_1$ — наименьшая непустая замкнутая совокупность (т. е. указанная в теореме 8 совокупность $\mathcal{K}$ при $X = \varnothing$). Множество $\mathcal{K}_1$ счетно и каждый его элемент является конечным множеством, причем $card(\mathcal{K}_1) \subset \mathcal{K}_1$. Обозначим через $\mathcal{K}_2$ наименьшую замкнутую совокупность, для которой счетный кардинал $\omega = card(\mathcal{K}_1)$ является элементом (т. е. указанную в теореме 8 совокупность $\mathcal{K}$ при $X = \omega$). Ординалы и кардиналы, принадлежащие $\mathcal{K}_2$, конечны или счетны, а объединение этих ординалов (или, что то же самое, множество этих ординалов) является счетным ординалом, не принадлежащим $\mathcal{K}_2$. При этом $2^\omega \in \mathcal{K}_2$ и $card(2^\omega) \notin \mathcal{K}_2$. Обозначим через $\mathcal{K}_2'$ наименьшую замкнутую совокупность, такую, что $card(\mathcal{K}_2) \subset \mathcal{K}_2'$. С учетом теорем 8, 9 и доказательства теоремы 7 нетрудно убедиться, что $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_2'$, $card(\mathcal{K}_2) = card(\mathcal{K}_2')$ и $card(x) \in \mathcal{K}_2'$ для каждого $x \in \mathcal{K}_2'$.

Нам понадобятся еще два понятия из теории множеств.

Множество $\mathcal{U}$ называется *универсальным* (см. [43], с. 18), когда оно удовлетворяет следующим условиям:

1) если $x \in \mathcal{U}$, то $x \subset \mathcal{U}$;

2) если $x \in \mathcal{U}$, то $2^x \in \mathcal{U}$;

3) если $x \in \mathcal{U}$ и $y \in \mathcal{U}$, то $\{x, y\} \in \mathcal{U}$;

4) если $I \in \mathcal{U}$ и $z_i \in \mathcal{U}$ $(i \in I)$, то $\bigcup\limits_{i \in I} z_i \in \mathcal{U}$.

Разница между определениями замкнутой совокупности и универсального множества заключается в различии условий 4) (в определении универсального множества условие 3) является следствием остальных). Примером универсального множества, элементы которого являются конечными множествами, может служить замкнутая совокупность $\mathcal{K}_1$ ($\varnothing$ можно считать универсальным множеством). На вопрос о существовании универсального множества, содержащего в качестве элемента бесконечное множество, мы склонны дать отрицательный ответ, считая, что в процессе образования замкнутых совокупностей не может появиться замкнутая совокупность, содержащая в качестве элемента бесконечное множество и удовлетворяющая условиям определения универсального множества (этим условиям удовлетворяет класс всех множеств). Этот ответ мы отнесем к числу утверждений, которые уточняют суть интуитивного понятия множества и принимаются без доказательства, как, например, утверждение о том, что отличное от атома множество не является элементом своего элемента.

Кардинал $\mathcal{C}$ называется *недостижимым* (см. [44], с. 154), если

1) $card(2^c) \in \mathcal{C}$ для любого кардинала $c \in \mathcal{C}$;

2) для любых кардиналов $I \in \mathcal{C}$ и $c_i \in \mathcal{C}$ $(i \in I)$ множество $X = \big\{(i, x) : x \in c_i, i \in I\big\}$ удовлетворяет соотношению $card(X) \in \mathcal{C}$.

Счетный кардинал недостижим ($\varnothing$ можно считать недостижимым кардиналом). Примером несчетного кардинала, удовлетворяющего условию 1), служит $card(\mathcal{K}_2)$, а примером несчетного кардинала, удовлетворяющего условию 2), — множество всех конечных или счетных ординалов. На вопрос о существовании недостижимого несчетного кардинала мы склонны снова дать отрицательный ответ, считая, что в процессе образования кардиналов не может появиться несчетный кардинал, удовлетворяющий условиям определения недостижимого кардинала, даже если в условии 2) требование $card(X) \in \mathcal{C}$ заменить на $\bigcup\limits_{i \in I} c_i \in \mathcal{C}$ (этим условиям удовлетворяет класс всех кардиналов).

В основу аксиоматического построения теории множеств заложено восприятие процесса образования множеств как завершаемого, а именно: считается, что все объекты теории, называемые множествами, заданы и для них определено бинарное отношение, называемое отношением принадлежности и обозначаемое знаком $\in$, относительно которого требуется выполнение некоторых аксиом. Аксиомы позволяют образовывать множества с требованием, чтобы они были в числе заданных множеств. Противоречиво это требование или нет — зависит от позволенных аксиомами возможностей образования множеств. При отсутствии ограничений на образование множеств, как в интуитивном случае, указанное требование противоречиво. А если сильно ограничить возможности образования множеств, то можно обеспечить непротиворечивость указанного требования, однако это может привести к потере некоторых существенных результатов интуитивной теории. Обсудим это на примере системы аксиом Цермело–Френкеля (см. [44], с. 87–102; [48], с. 53–66).

1. Аксиома объемности (или экстенсиональности):

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y).$$

2. Аксиома существования пустого множества:

$$\exists \varnothing \forall y (y \notin \varnothing).$$

3. Аксиома неупорядоченной пары:

$$\forall x \forall y \exists z \forall v (v \in z \leftrightarrow v = x \vee v = y).$$

4. Аксиома объединения (или суммы):

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists t (t \in x \;\&\; z \in t)).$$

5. Аксиома бесконечности:

$$\exists x (\varnothing \in x \;\&\; \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)).$$

6_Φ. Аксиома замены (или подстановки) для высказывательной функции Φ. Если для каждого x существует единственное y, такое, что $\Phi(x, y)$ истинно, то для каждого множества u существует множество v, состоящее из тех элементов r, для каждого из которых $\Phi(s, r)$ истинно при некотором $s \in u$:

$$\forall x \exists ! y (\Phi(x, y)) \to \forall u \exists v \forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s (s \in u \;\&\; \Phi(s, r))).$$

7. Аксиома степени:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subset x).$$

8. Аксиома выбора:

$$\forall X\,(\forall x\,((x\in X\to x\neq\varnothing)\,\&\,\forall z\,(z\in X\,\&\,z\neq x\to z\cap x=\varnothing))\to$$
$$\to\ \exists Y\,(Y\subset\cup X\ \&\ \forall u\,(u\in X\ \to\ \exists!\,y\,(y\in u\cap Y)))).$$

9. Аксиома регулярности:

$$\forall x\,(x\neq\varnothing\ \to\ \exists y\,(y\in x\ \&\ \forall z\,(z\in x\ \to\ z\notin y))).$$

Аксиома регулярности исключает наличие атомов.

Указанную систему аксиом обозначим через Σ, а систему без аксиомы бесконечности — через Σ_1. Замкнутая совокупность $\mathcal{K}_1$ является моделью для Σ_1 и, значит, система аксиом Σ_1 относительно непротиворечива. Обозначим через Σ_2 систему аксиом, получаемую из Σ заменой аксиомы 6_Φ следующей аксиомой, дающей более слабую возможность для образования множеств (см. [44], с. 98; [48], с. 62).

$6'_\Phi$. Аксиома выделения для высказывательной функции Φ. Для каждого множества x существует множество y, состоящее из тех элементов $z\in x$, для которых $\Phi(z)$ истинно:

$$\forall x\,\exists y\,\forall z\,(z\in y\ \leftrightarrow\ z\in x\ \&\ \Phi(z)).$$

Каждая из замкнутых совокупностей $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}'_2$ является моделью для Σ_2 и, значит, система аксиом Σ_2 относительно непротиворечива. Модель $\mathcal{K}_2$ показывает, что теоремы 3 и 4 не вытекают из системы аксиом Σ_2, а модель $\mathcal{K}'_2$ показывает, что эти теоремы не противоречат Σ_2.

Вопрос, может ли интуитивное множество служить моделью для Σ при интерпретации отношения принадлежности формальной теории как интуитивного отношения принадлежности, связан с вопросом о существовании недостижимого несчетного кардинала или универсального множества, содержащего в качестве элемента бесконечное множество. В [44], с. 165–177 (см. также [32]), утверждается, что класс всех конструктивных множеств является моделью для Σ. Однако в связи с этим возникает вопрос: являются ли вполне осмысленными понятие истинности без наличия всех элементов модели и общее понятие отображения класса в класс (а именно, можно ли считать проверяемой в такой модели выполнимость условия аксиомы 6_Φ).

Заметим, что интуитивная теория множеств образует объекты на основании заданного отношения, а аксиоматическая теория вводит отношение между заданными объектами. Этим также объясняется наличие различных аксиоматических теорий множеств (см. [44], с. 140–145; [48], с. 64–66). Для формализации интуитивной теории множеств, так чтобы аксиомы описали этап процесса образования множеств и класс всех интуитивных множеств служил моделью для формальной теории, можно поступить следующим образом: считать заданными лишь пустое множество и, быть может, атомы, а также одно бесконечное множество, и образовать новые множества по правилам, указанным в системе аксиом, выбранной по образцу какой-либо известной системы аксиом с подходящими изменениями, используя при этом дополнительный квантор, указывающий на новое множество. Говоря яснее, нужно использовать кванторы $\forall$, $\exists$ и $\exists^\circ$, выражающие следующий смысл: $\forall$ означает "для каждого построенного объекта", $\exists$ — "среди построенных объектов существует", а $\exists^\circ$ — "вводится в рассмотрение новый объект", причем квантор $\exists^\circ$ удобно использовать в контексте $\exists \vee \exists^\circ = \exists'$. Аксиомы 6_Φ и 7 нужно записывать, соответственно, в виде

$$\forall\, x\, \exists!\, y\, (\Phi(x,\, y)) \;\to\; \forall\, u\, \exists'\, v\, \forall\, r\, (r \in v \;\leftrightarrow\; \exists\, s\, (s \in u \;\&\; \Phi(s,\, r))),$$

$$\forall\, x\, \exists'\, y\, \forall\, z\, (z \in y \;\leftrightarrow\; z \subset x).$$

Выполнимость условия $\forall\, x\, \exists!\, y\, (\Phi(x,\, y))$ обновленной аксиомы 6_Φ подлежит проверке лишь для тех множеств, которые образованы до рассматриваемого этапа процесса построения. Эти множества образуют множество, а условие, относящееся к элементам множества, считается проверяемым. Однако в обновленной аксиоме 7 для построенного множества x говорится о множестве y, элементами которого являются лишь те подмножества $z \subset x$, которые образованы до рассматриваемого этапа процесса построения. Поэтому при такой формализации остается открытым вопрос: получится ли множество всех подмножеств бесконечного множества как вполне сформировавшийся объект, или оно будет находиться в процессе своего становления (т. е. речь может идти только о классе всех подмножеств бесконечного множества). Изложенное ставит под сомнение возможность полноценной формализации интуитивной теории множеств (по мнению автора, интуитивная теория множеств не поддается полноценной формализации).

ЛИТЕРАТУРА

1. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах. — УМН 22, 6 (1967).
2. Авербух В. И., Смолянов О. Г. Различные определения производной в линейных топологических пространствах. — УМН 23, 4 (1968).
3. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
4. Александров, Хопф (Alexandroff P., Hopf H.). Topologie. I. Berlin, 1935.
5. Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А. Общая топология. М.: Высшая школа, 1979.
6. Антоновский М. Я., Кошевникова И. Г. Пространства сходимости типа Фреше—Урысона и обобщенная метризация. — Матем. вестник 9(24) (1972), 373—378.
7. Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
8. Ахиезер Н. И., Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
9. Бартл (Bartle R. G.). Nets and filters in topology. — Amer. Math. Monthly 62 (1955), 551—557.
10. Бинц (Binz E.). Bemerkungen zu limitierten Funktionenalgebren. — Math. Ann. 175 (1968), 169—184.
11. Биркгоф (Birkhoff G.). Moore—Smith convergence in general topology. — Ann. of Math. 38 (1937), 39—56.
12. Бохме (Boehme T. K.). Linear s-spaces. — Preprint of a tolk presended at the Symposium on Convergence Structures, Univ. of Oklahoma, 1965.
13. Брунс, Шмидт (Bruns G., Schmidt J.). Zur Äquivalenz von Moore—Smith-Folgen und Filtern. — Math. Nachr. 13 (1955), 169—186.
14. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. М.: ИЛ, 1963.
15. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
16. Бурбаки Н. Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
17. Бурбаки Н. Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.
18. Бурбаки Н. Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. М.: Наука, 1975.
19. Бурбаки Н. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
20. Бурбаки Н. Алгебра. Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.
21. Бурбаки Н. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свертка и представления. М.: Наука, 1970.
22. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры, интегрирование мер. М.: Наука, 1967.
23. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.

24. Ван дер Варден Б. Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
25. Вейл (Weil A.). Sur les espaces a structure uniforme et sur la topologie generale. — Actual. Scient. et Ind., n° 551, Paris (Hermann), 1937.
26. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
27. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.
28. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
29. Готц (Goetz A.). On a notion of uniformity for L-spaces of Frechet. — Coll. Math. 9 (1962), 223—231.
30. Данфорд Н. Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
31. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
32. Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
33. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
34. Карри Х. Б. Основания математической логики. М.: Мир, 1969.
35. Картан (Cartan H.). Theorie des Filtres. Filtres et ultrafiltres. — C. R. Acad. Sci. Paris 205 (1937), 595—598, 777—779.
36. Келли (Kelley J. L.). Convergence in topology. — Duke Math. J. 17 (1950), 277—283.
37. Келли Дж. Л. Общая топология. М.: Наука, 1980.
38. Кисынский (Kisynski J.). Convergence du type L. — Coll. Math. 7 (1960), 205—221.
39. Клини С. К. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957.
40. Клини С. К. Математическая логика. М.: Мир, 1973.
41. Ковальский (Kowalsky H. J.). Limesräume und Komplettierung. — Math. Nachr. 12 (1954), 301—340.
42. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
43. Кон П. Универсальная алгебра. М.: Мир, 1968.
44. Коэн П. Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.
45. Кук, Фишер (Cook C. M., Fisher H. R.). Uniform convergence structures. — Math. Ann. 173 (1967), 290—306.
46. Куратовский К. Топология. I. М.: Мир, 1966.
47. Куратовский К. Топология. II. М.: Мир, 1969.
48. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970.
49. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.
50. Лоран Шварц. Анализ. II. М.: Мир, 1972.
51. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982.
52. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1966.

53. Мур (Moore E. H.). General analysis. I. Philadelphia, 1939.

54. Мур, Смит (Moore E. H., Smith H. L.). A general theory of limits. — Amer. J. of Math. 44 (1922), 102—121.

55. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

56. Рид М. Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

57. Рисс (Riez F.). Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. — Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1908, vol. II, pp. 18—24. Roma, 1909.

58. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

59. Себаштьян э Сильва (Sebastiao e Silva J.). Le calcul differentiel et integral dans les espaces localement convexex, reels on complexes. I, II. — Atti Acad. Lincei Rend. 20, 6 (1956); 21, 1—2 (1956).

60. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

61. Тейлор (Taylor W.). Convergence in Relational Structures. — Math. Ann. 186 (1970), 215—227.

62. Тихонов (Tychonoff A.). Ein Fixpunktsatz. — Math. Ann. 111 (1935), 767—776.

63. Урысон (Urysohn P.). Sur les classes (L) de M. Frechet. — Enseign. Math. 25 (1926), 77—83.

64. Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. II. М., Л.: Гостехиздат, 1951.

65. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. I. М.: Наука, 1969.

66. Фишер (Fisher H. R.). Limesräume.—Math. Ann. 137 (1959), 269—303.

67. Франклин (Franklin S. P.). Spaces in which sequences suffice. — Fund. Math. 57 (1965), 107—115.

68. Франклин (Franklin S. P.). Spaces in which sequences suffice. II. — Fund. Math. 61 (1967), 51—56.

69. Фреше (Frechet M.). Sur quelques points du calcul fonctionnel. — Rend. del Circ. Mat. di Palermo 22 (1906), 1—74.

70. Фрёлихер А., Бухер В. Дифференциальное исчисление в векторных пространствах без нормы. М.: Мир, 1970.

71. Хаусдорф (Hausdorff F.). Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914.

72. Хачатрян И. Г. Об интуитивной теории множеств и ее формализации. — Ученые записки ЕГУ, естественные науки, 2 (2008), 3—12.

73. Шенфилд Дж. Математическая логика. М.: Наука, 1975.

74. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.

75. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969.

76. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.

ПРЕДМЕТНЫЙ И ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

Ишхан Гвидонович Хачатрян

ПРОСТРАНСТВА С ОПЕРАЦИЕЙ ПРЕДЕЛА